

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

VI. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1—2. FÜZET

1961

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА  
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ  
ТОМ VI., СЕРИЯ А, 1—2.

1961

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
VOLUME VI. SERIES A, FASC. 1—2.

1961



1961

2



# INDEX

# СОДЕРЖАНИЕ

Голенко, Д. И.: Некоторые вопросы расчета вероятностных процессов методом Монте-Карло .....	3
ŠALÁT, T.: Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Mass .....	15
DÜCK, W.: Abschätzung der Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten in die Lösung bei linearen Gleichungssystemen und Matrizengleichungen.....	43
PERGEL, J.: An extension of Kolmogorov's theorem to conditional probability spaces .....	61
SALLAY, M.: Sur un procédé d'approximation avec des conditions aux limites.....	65
FREUD, G.: Über positive Zygmundsche Approximationsfolgen .....	71
KARDOS, G.—LADIK, J.: The ground State of the hydrogen molecule on the basis of relativistic quantum mechanics with the aid of the Wang wave function, II. Method for evaluation of the two-centre integrals occurring in the calculation of the retarded magnetic orbit-orbit interaction .....	77
VERMES, P.: Fixed points in graph colouring .....	89
CSÁKI, E.—VINCZE, I.: On some problems connected with the Galton-test.....	97
ACZÉL, J.: Über die Begründung der Additions- und Multiplikationsformeln von bedingten Wahrscheinlichkeiten .....	110
ARATÓ, M.: Несколько замечаний об абсолютно непрерывности мер .....	123
SARKADI, K.: On Galton's rank order test.....	127
BOD, P.: L'analyse d'efficacité de la modernisation technique de la production (une approximation).....	133
PÉTER, R.: Primitiv-rekursive Wortbeziehungen in der Programmierungssprache "Algol 60" .....	137
HAJTMAN, B.: On systems of equations containing only one nonlinear equation .....	145
ALPÁR, L.—TURÁN, P.: Sur la distribution des valeurs d'une fonction entière.....	157
TURÁN, P.: On a density theorem of Yu. V. Linnik.....	165
ERDŐS, P.—GALLAI, T.: On the minimal number of vertices representing the edges of a graph .....	181
RÉVÉSZ, P.: Some remarks on the random ergodic theorem, II.....	205
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On a classical problem of probability theory.....	215
ERDŐS, P.: Some unsolved problems.....	221
List of lectures by guests held in the institute in 1960.....	255
Список докладов прочитанных гостями в институте в 1960 года .....	255
Bibliography. List of recent papers and books written by members of the institute, published or in print elsewhere in foreign languages.....	256
Библиография. Список новых работ членов института, опубликованных в других местах в иностранных языках .....	256
Exact data of papers mentioned earlier with incomplete bibliographical data.....	259
Точные данные работ приведенных раньше с неполными библиографическими данными .....	259



**A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI**

**VI. ÉVFOLYAM**

**1961**

★

**ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА  
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ**

**ТОМ VI.**

**1961**

★

**PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES**

**VOLUME VI.**

**1961**



**1962**



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEIT az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közlések a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszerűsített átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. Külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРЭД РЕЪНИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНАР, ПÁL РЕВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ V., РЕАЛТАНОДА U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия A и B. Серия A выходит на иностранных языках, Серия B — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии A и одного выпуска серии B. К каждой работе прилагается резюме на языке, отличным от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS  
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).



## TARTALOMJEGYZÉK

## INDEX

## СОДЕРЖАНИЕ

ACZÉL, J.: Über die Begründung der Additions- und Multiplikationsformeln von bedingten Wahrscheinlichkeiten .....	111
(Об основании формул сложения и умножения условных вероятностей)	
ALPÁR, L.—TURÁN, P.: Sur la distribution des valeurs d'une fonction entière ...	157
(О распределении значений целой функции)	
ARATÓ, M.: Несколько замечаний об абсолютно непрерывности мер .....	123
(Some remarks on the absolute continuity of measures)	
BOD, P.: L'analyse d'efficacité de la modernisation technique de la production (une approximation) .....	133
(К эффективности технического усовершенствования производства [один из подходов к проблеме])	
BOD, P.: Az ágazati és igazgatási rendszerű input-output mérlegek kapcsolatáról ..	499
(О связи инпут-аутпут балансов отраслевого и административного построения)	
(Über die Zusammenhänge der nach Produktionszweigen bzw. Verwaltungszweigen zusammengestellten Verflechtungsbilanzen) .....	
BIHARI, I.: On the nonlinear equation $u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$ .....	287
(Замечание относительно нелинейного уравнения $u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$ )	
BIHARI, I.: Asymptotic behaviour of the solutions of certain second order ordinary differential equations perturbed by a half-linear term .....	291
(Асимптотическое поведение решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в случае квазилинейного возмущающего члена)	
BOGNÁR, J.: O существовании квадратного корня из оператора, самосопряженного относительно индефинитной метрики .....	351
(On the existence of square roots of operators, selfadjoint with respect to an indefinit metric) .....	
COHN, J. H. E.: On some problems of P. Vermes .....	373
CSÁKI, E.: On the number of intersections in the onedimensional random walk ...	281
(О числе пересечений при случайном блуждании по линии)	
CSÁKI, E.—VINCZE, I.: On some problems connected with the Galton-test .....	97
(О некоторых проблемах, связанных с критерием Гальтона)	
CZIPSZER, J.: Sur le module de continuité intégrale .....	393
(Об интегральном модуле непрерывности)	
DÜCK, W.: Abschätzung der Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten in die Lösung bei linearen Gleichungssystemen und Matrizengleichungen .....	43
(Оценка неустраивимой погрешности решений систем линейных уравнений и матричных уравнений)	
ERDŐS, P.—GALLAI, T.: On the minimal number of vertices representing the edges of a graph .....	181
(О минимальном числе точек, репрезентирующих ребра графа)	
ERDŐS, P.: Some unsolved problems .....	221
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On a classical problem of probability theory .....	215
(Об одном классическом проблеме теории вероятностей)	
FREUD, G.: Über positive Zygmundsche Approximationsfolgen .....	71
(О положительных аппроксимационных методах типа Зигмунда)	



FREUD, G.—SALLAY, M.: Sur la vitesse de convergence du developpement selon des fonctions propres de Sturm-Liouville ..... (О скорости сходимости разложения по собственным функциям Штурма—Лиувилья)	271
ГОЛЕНКО, Д. И.: Некоторые вопросы расчета вероятностных процессов методом Монте-Карло ..... (On certain problems of evaluation of stochastic processes by Monte Carlo methods)	3
НАЙТМАН, В.: On systems of equations containing only one nonlinear equation ... (О системах уравнений, содержащих только одно нелинейное уравнение)	145
ХАРАДЗЕ, А. К.: Заметка об одной теореме П. Турана ..... (Bemerkung über einen Satz von P. Turán)	399
HOSSZÚ, M.—VINCZE, E.: Über die Verallgemeinerungen eines Funktionalgleichungssystems der Wirtschaftlichkeit ..... (Об обобщении одной функциональных уравнений экономичности)	313
JANKÓ, B.: Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires, I. .... (Об единой теории итерационных методов для решения нелинейных операционных уравнений, I)	301
JÁNOSY, L.—LEE, A.—RÓZSA, P.: A Coulomb-szóródás paraméterének becslése fotoemulzióban végzett mérések alapján ..... (Оценка параметра рассеивания Кулона на основании измерений, выполненные в фотоземлюлиции) (On the estimation of the scattering constant of an emulsion track in the presence of noise)	467
KARDOS, G.—LADIK, J.: The ground state of the hydrogen molecule on the basis of the relativistic quantum mechanics with the aid of the Wang wave function, II. Method for evaluation of the twocentre integrals occurring in the calculation of the retarded magnetic orbit-orbit interaction term ..... (Изучение основного состояния молекулы водорода на основании относительной квантовой механики с помощью волновой функции WANG-a II)	77
MOGYORÓDI, J.: On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables ..... (Предельные теоремы для сумм случайного числа независимых случайных величин)	365
PALÁSTI, I.: On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph ..... (О распределении изолированных деревьев в случайном неоднородном графе)	450
PERGEL, J.: An extension of Kolmogorov's fundamental theorem to conditional probability spaces ..... (Расширение фундаментальной теоремы Колмогорова на условные вероятностные пространства)	61
PÉTER, R.: Primitiv-rekursive Wortbeziehungen in der Programmierungssprache „Algol 60“ ..... (Примитивно-рекурсивные словосоотношения на языке программирования „Algol 60“)	173
PINTÉR, L.: Oszillationssätze für einen Typ von nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ..... (Осцилляционные теоремы для одного типа нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка)	333
RENNIE, B. C.: Random walks ..... (Случайные блуждания)	263
RÉNYI, A.: On Kolmogoroff's inequality ..... (О неравенстве А. Н. Колмогорова)	411
RÉNYI, A.: Egy információelméleti problémáról ..... (Об одной проблеме теории информации) (On a problem of information theory)	505
RÉVÉSZ, P.: Some remarks on the random ergodic theorem, II. .... (Несколько замечаний о случайной эргодической теореме, II)	205
ŠALÁT, T.: Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Mass ..... (Разложение вещественных чисел в ряде Кантора и мера Хаусдорфа)	15



SALLAY, M.: Sur un procédé d'approximation avec des conditions aux limites .....	65
(Одна аппроксимационная задача с граничными условиями)	
SARKADI, K.: On Galton's rank order test .....	127
(О ранговом критерии Galton-a)	
SCHMETTERER, L.: Über eine allgemeine Theorie der erwartungstreuen Schätzungen .....	295
(Об одной общей теории несмещенных оценок)	
SCHÜTZENBERGER, M. P.: On a family of submonoids .....	381
(Об одном семействе подмоноидов)	
SZILÁRD, K.: Über die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in verallgemeinerten Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, I. ....	375
(Об аналогах целых рациональных функций в обобщенных классах функций одного комплексного переменного, I)	
TURÁN, P.: On a density theorem of Yu. V. Linnik .....	165
(О теореме плотности Ю. В. Линника)	
TURÁN, P.: Research problems .....	417
VEIDINGER, L.: Error estimation for Massau's method of characteristics .....	323
(Оценки погрешности метода характеристик (метода Макко))	
VERMES, P.: Fixed points in graph colouring .....	89
(Фиксированные точки окрашивания графов)	
Jelentés az Algol 60 algoritmikus nyelvről (fordítás) .....	425
(Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ 60 (перевод))	
(Report on the Algorithmic Language ALGOL 60 (translation)) .....	
List of lectures by guests held in the Institute in 1960 .....	255
(Список докладов, прочитанных гостями в институте в 1960-ом году)	
Bibliography. List of recent papers and books written by members of the Institute, published or in print elsewhere in foreign languages .....	256
(Библиография. Список новых работ членов института, опубликованных в других местах на иностранных языках)	
Exact data of papers mentioned earlier with incomplete bibliographical data ....	259
(Точные данные работ, приведенных раньше с неполными библиографическими данными)	
A Matematikai Kutató Intézet Osztályszemináriumaiiban elhangzott előadások .....	517
(Доклады, произнесенных в семинарах отделений Института)	
(Lectures delivered in the seminars of the Institute) .....	
Az Intézet munkatársainak a korábbi dolgozatjegyzékekben még fel nem tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó alatt levő magyar nyelvű dolgozatainak jegyzéke .....	541
(Список работ сотрудников Института на венгерском языке, опубликованных в других изданиях или находящихся в печати и еще не отмеченных предыдущих списках литературы)	
(List of papers in Hungarian of the members of the Institute published or in print in another periodical and not yet marked in the previous lists of papers) ..	



A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

---

1962/54992 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

HAGYAT  
UDOMÁNYOS AKADÉMIA  
KÖNYVTÁRA



**A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI**

**VI. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1—2. FÜZET**

**1961**

★

**ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА  
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ  
ТОМ VI., СЕРИЯ А, 1—2.**

**1961**

★

**PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
VOLUME VI. SERIES A, FASC. 1—2.**

**1961**



**1961**



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИ az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatolóznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИnek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. Külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающих от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS  
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5,— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).



## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Д. И. ГОЛЕНКО<sup>1</sup>

1. Рассмотрим ветвящийся марковский процесс следующего вида. В начальный момент  $t_0$  имеется конечная совокупность  $N^{(t_0)}$  частиц, причем каждая частица относится к одному из  $m$  ( $m < \infty$ ) типов. Количество частиц каждого типа в момент  $t_0$  равно  $n_j^{(t_0)}$ , так что  $\sum_{j=1}^m n_j^{(t_0)} = N^{(t_0)}$ .

Вообще условимся впредь обозначать частицу буквой  $\alpha_{jk}$ , где  $j$  обозначает тип частицы, а  $k$  — порядковый номер частицы среди частиц данного типа ( $1 \leq k \leq n_j$ ).

Каждая частица  $\alpha_{jk}$  может по истечении некоторого промежутка времени  $\Delta t_{jk}$  вступать в один из  $l_j$  процессов (одинаковых для частиц одного и того же типа), которые мы впредь будем обозначать буквой  $\Pi_{ji}$  ( $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq i \leq l_j$ ), причем поведение частицы происходит совершенно независимо от поведения остальных. Каждая частица  $\alpha_{jk}$  является обладателем некоторого свойства, которое мы будем называть массой и обозначать  $M_{jk}$ . Отметим, что промежуток времени  $\Delta t_{jk}$  не зависит от  $t_0$  и является случайной величиной, в функцию распределения которой параметром входит масса частиц  $M_{jk}$  в момент совершения процесса.

Процесс  $\Pi_{ji}$ , в который вступает по истечении интервала времени  $\Delta t_{jk}$  каждая из частиц  $\alpha_{jk}$ , не зависит от момента совершения и является случайным в том смысле, что сам происходит случайно с вероятностью

$$p_{ji} \left( \sum_{i=1}^{l_j} p_{ji} = 1 \right).$$

Вероятность  $p_{ji}$  является функцией массы частицы  $\alpha_{jk}$

$$p_{ji} = f_{ji}(\alpha_{jk}).$$

В результате процесса  $\Pi_{ji}$  из одной участвующей в процессе частицы  $\alpha_{jk}$  образуется  $r_{ji}$  новых частиц, из которых  $r_{jis}$  относятся к типу  $s$ .

$$\sum_{j=1}^m r_{jis} = r_{ji}.$$

Сумма масс всех вновь образованных в процессе  $\Pi_{ji}$  частиц равна массе первоначальной частицы  $\alpha_{jk}$ . Массы — компоненты вновь образованных

<sup>1</sup> Москва, Вычислительный центр АН СССР.



частиц являются случайными величинами. При этом в плотность распределения массы первой образованной частицы (частицы номер 1) параметром входит масса частицы  $\alpha_{jk}$ , а в плотность распределения массы частицы с номером  $q$  ( $1 \leq q \leq r_{ji} - 1$ ) параметрами входят масса частицы  $\alpha_{jk}$  и массы  $q - 1$  предшествующих частиц, все параметры которых уже определены. Иными словами, массы вновь образованных частиц являются зависимыми случайными величинами.

Аналогичные явления происходят (по истечении разных промежутков  $\Delta t_{jk}$ ) со всеми частицами  $\alpha_{jk}$ .

Образовавшись в результате процессов  $\Pi_{ji}$ , новые частицы по истечении случайных промежутков времени вновь участвуют в этих процессах, образуя все новые и новые частицы различных типов.

«Послеживая» дальше вновь образованные частицы, получаем «ливень» частиц, который с увеличением времени процесса делается все больше и больше. Фиксируя определенный конечный момент времени  $t_{\text{КОН}}$ , после которого наблюдение над всеми частицами прекращается, получаем разветвленное «дерево» участвующих в процессе частиц (см. рис. № 1).

Описываемый процесс, как легко видеть, является ветвящимся марковским процессом. Вероятностями перехода его служат вероятности  $p_{ji}$ , а состояниями — процессы  $\Pi_{ji}$ , а также время совершения этих процессов.

Если рассмотреть нашу систему в фиксированный момент времени  $t$ , то она будет состоять из случайного числа  $N^{(t)}$  частиц. Количество входящих в систему в момент  $t$  частиц каждого типа обозначим  $n_j^{(t)}$

$$N^{(t)} = \sum_{j=1}^m n_j^{(t)}.$$

Величины  $n_j^{(t)}$  также являются зависимыми случайными величинами, аналитические плотности распределения которых, как правило, неизвестны.

Однако, характеристика системы в момент  $t$  отнюдь не исчерпывается распределением величины  $n_j^{(t)}$ ; весьма интересным является также распределение частиц каждого типа по массе, и ряд других вопросов.

Решением вероятностных задач этого рода обычно являются ответы на все эти вопросы.

Применение теории ветвящихся процессов (равно как и уравнения переноса) обычно не дает желаемых результатов. Практика решения такого рода задач показывает, что главным (и едва ли не единственным) эффективным приемом является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Метод Монте-Карло сводится к моделированию вероятностного процесса, к его многократной повторной реализации и получению эмпирических функций распределения в результате статистической обработки данных. Ввиду огромного объема вычислительных работ такое моделирование обычно проводится с помощью быстродействующих электронных счетных машин (БСМ).

II. При моделировании описанного выше вероятностного процесса необходимо определять значения масс всех новых частиц, образовавшихся в результате разыгранных процессов  $\Pi_{ji}$ . Ввиду того, что масса образующейся частицы является случайной величиной с известным законом распределения, необходимо уметь получать случайные, распределенные по некоторому закону величины. С этой целью обычно применяется весьма эффективный метод Неймана (1) (2, 3), заключающийся в следующем.

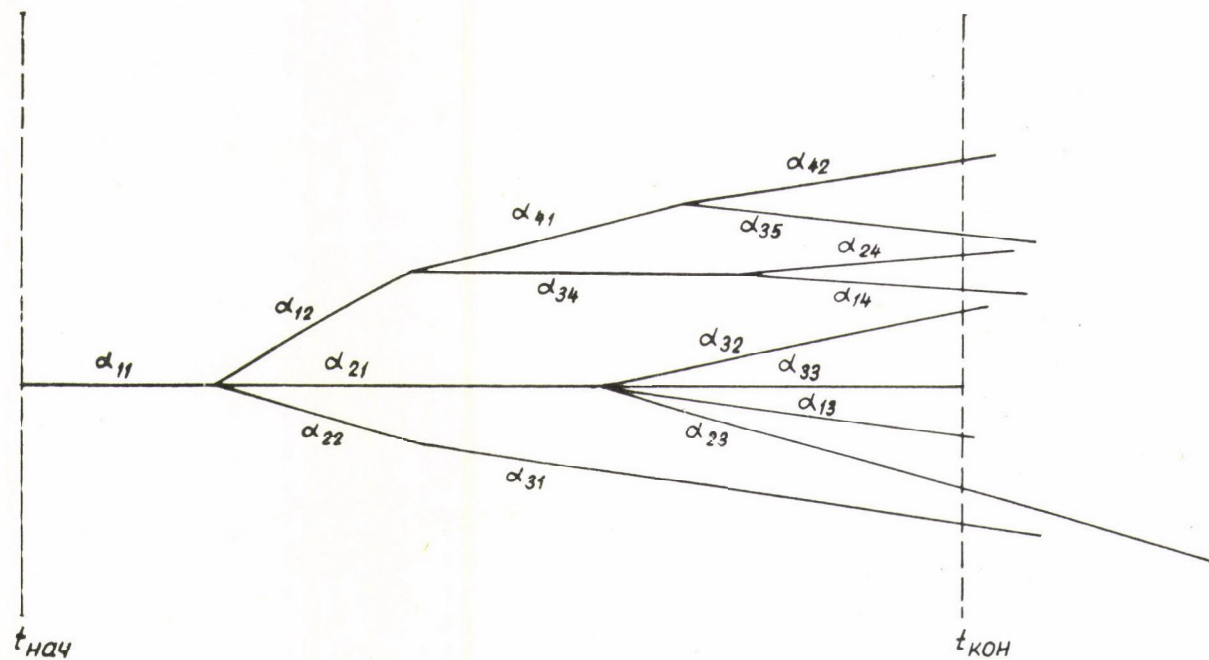
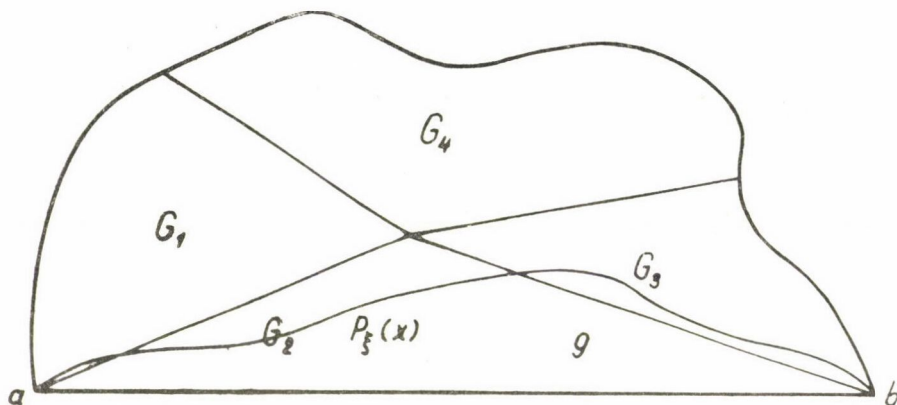


Схема каскада ветвящегося процесса  
рис N 1.



Область  $g$ , ограниченная осью абсцисс и графиком функции плотности распределения случайной величины  $\xi$   $P_\xi(x)$ , помещается внутрь односвязной замкнутой области  $G$ , разбитой на конечное число областей  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (см. рис. № 2). Обычно в качестве областей  $G_i$  берутся прямоугольники, основаниями которых являются интервалы области изменения  $(a, b)$  случайной величины  $\xi$ , в высотах — отрезки перпендикуляра, равные максимальным значениям плотности распределения  $P_\xi(x)$  на этих интер-



*Схема расчета с разбиением области  $G$   
рис № 2.*

валах. В случае, когда  $P_\xi(x)$  является функцией с малым изменением (распределение близко к равномерному), целесообразно область  $G$  не разбивать.

В этом случае  $G$  является прямоугольником с основанием, равным области изменения  $[a, b]$  случайной величины  $\xi$  (область изменения предполагается конечной) и высотой  $h$ , равной максимальному значению  $P_\xi(x)$

в области изменения  $\xi$ . С вероятностью  $p_i = \frac{\text{mes } G_i}{\text{mes } G}$  обращаемся в области

$G_i$  и равномерно распределяем в этой области двумерную точку  $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ . Если  $\xi_2^{(i)} \leq P_\xi(\xi_1^{(i)})$ , то  $\xi_1^{(i)}$  принимается в качестве случайной величины с плотностью распределения  $P_\xi(x)$ . При  $\xi_2^{(i)} > P_\xi(\xi_1^{(i)})$  пара  $(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$  отбрасывается, вновь «разыгрывается» область  $G_i$ , и вся процедура начинается сначала. Известно, (2), что математическое ожидание числа розыгрышей  $T$  двумерной точки  $(\xi_1, \xi_2)$  для получения одного искомого значения случайной величины  $\xi$ , равна  $\text{mes } G$ .

$$(A) \quad M\tau = \text{mes } G = \sum_{i=1}^n \text{mes } G_i.$$

Нашей задачей является максимальное сокращение времени реализации случайной величины  $\xi$  в БСМ.

Если обозначить это время буквой  $\chi$ , то можно написать приближенное равенство

$$(A') \quad \bar{\chi} = \bar{\eta} \mathbf{M} \tau,$$

где  $\bar{\chi}$  — среднее время реализации  $\xi$ ,  $\bar{\eta}$  — среднее время одного розыгрыша двумерной точки  $(\xi_1, \xi_2)$ . Учитывая (A), получаем

$$\bar{\chi} = \bar{\eta} \text{mes } G = \bar{\eta} S_G.$$

Поэтому задача о минимизации величины  $\bar{\chi}$  сводится к минимизации произведения  $\bar{\eta} S_G$ . Уменьшение  $S_G$  может быть достигнуто в результате дробления области изменения случайной величины  $\xi$ , т. е. увеличения числа составляющих областей  $G_i(n)$ .

Обозначим символом  $S_G^{(n)}$  площадь  $S_G$  для числа точек разбиения, равного  $n$ . Если имеется  $n$  точек разбиения области изменения  $[a, b]$  случайной величины  $\xi$ , и если к ним добавляется  $(n+1)$ -ая произвольная точка разбиения, то всегда  $S_G^{(n)} \geq S_G^{(n+1)}$ ; Заметим что  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} S_G^{(n)} = 1$ . Что касается  $\bar{\eta}$ ,

то эта величина растет с увеличением  $n$ . В случае симметричной функции распределения  $P_\xi(x)$  можно написать следующее приближенное равенство

$$\bar{\eta} \approx (2n + 50) \cdot 0,0005^* \text{ сек.}$$

Здесь  $\bar{\eta}$  — число элементарных тактов машинного времени, необходимого для одного розыгрыша (в среднем) двумерной точки  $(\xi_1, \xi_2)$ . Отсюда получаем  $\bar{\chi} \approx (2n + 50) S_G \cdot 0,0005 \text{ сек.}$

Из сказанного выше ясно, что увеличение дробления интервала  $[a, b]$  может не только не снизить времени  $\bar{\chi}$ , но наоборот, значительно это время увеличить (при больших  $n$ ). Возникает задача оптимального дробления области изменения  $[a, b]$ , т. е. выбор наилучшего  $n$ .

На наш взгляд, решение этого вопроса может быть получено лишь в результате конкретного анализа плотности распределения; для различных  $P_\xi(x)$  число  $n$  и интервалы дробления, разумеется, будут различаться. Дробление можно считать оптимальным, если величина  $\bar{\chi} \approx (2n + 50)$

$$\sum_{i=1}^n [(x_{i+1} - x_i) \max p_\xi(x)] \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ достигнет минимума.}$$

При дроблении области определения  $\xi$  для некоторых законов распределения  $P_\xi(x)$  оптимальное дробление может иметь место при различных  $n$ . В этом случае, естественно, следует отдать предпочтение наименьшему  $n$ , поскольку при этом требуется меньше ячеек оперативной памяти БСМ.

При моделировании случайной величины  $\xi$  с плотностью распределения  $P_\xi(x)$  нередко хорошие результаты дает замена переменных  $\gamma = Q(\xi)$ . Новая случайная величина  $\gamma$  имеет функцию распределения  $F[Q^{-1}(x)]$ , где  $F$  — функция распределения  $\xi$ . Если плотность распределения  $\gamma$  близка к равномерной, имеет смысл моделировать случайную величину  $\gamma$ , а затем преобразованием  $\xi = Q^{-1}(\gamma)$  переходить к значению случайной величины  $\xi$ .

В этом случае среднее время  $\bar{\chi} = \bar{\omega} + \Delta$ , где  $\bar{\omega}$  — среднее время моделирования случайной величины  $\gamma$ , а  $\Delta$  — время реализации функции  $Q^{-1}$ .

\* Скорость БСМ при этом считается равной 2000 элементарных операции в секунду.



Так в случае равномерного распределения  $\nu$ ,  $Q = F$  и  $\bar{\chi} = \bar{\omega} + \Delta = (4 + \Delta F^{-1}) 0,0005$  сек. Разумеется, и здесь следует стремиться к максимальному уменьшению  $\bar{\chi}$ , вследствие чего ставится задача минимизации суммы  $\bar{\omega} + \Delta$ .

III. Методы расчета эмпирических функций распределения параметров стохастических процессов на БСМ являются весьма интересным и актуальным вопросом вычислительной математики. При решении задач такого рода методом Монте-Карло нередко приходится сталкиваться с затруднениями. В частности, определенные трудности представляет ограниченность оперативной памяти БСМ. Действительно, из сказанного в п. I ясно, что ветвящийся марковский процесс (особенно в случае больших  $t$ ) может состоять из огромного числа частиц. Все их необходимо хранить и «помнить» в оперативной памяти машины. Если учесть то, что характеристика каждой частицы занимает несколько рабочих ячеек (тип частицы, ее масса, процесс, в котором частица участвует), а объем оперативной памяти машины не превышает 2048 ячеек, становится ясно, что одновременное «запоминание» всех частиц от начала процесса и до настоящего момента является весьма затруднительным, нередко вообще невозможным. Существует несколько приемов расчета образующихся в результате стохастического процесса «ливня» частиц, которые позволяют снизить количество используемых рабочих ячеек. Приводим краткое описание этих методов.

Метод расчета «ливня» по поколениям может быть использован только в тех случаях, когда общее количество частиц, образующихся в результате процесса, невелико и не превосходит 50—100. Заметим, что к одному и тому же поколению относятся частицы всех типов, образовавшихся из первичных в результате одинакового количества последовательно произошедших процессов. Алгоритм метода расчета по поколениям легко программируется и является, пожалуй, наиболее простым.

Основной его принцип состоит в следующем. В оперативной памяти БСМ выбираются два непересекающихся массива  $A$  и  $B$  объемом по 500—600 ячеек. В начале работы алгоритма все начальные частицы в произвольном порядке находятся в массиве  $A$  (иными словами, если характеристика частицы занимает 4 ячейки, то первые  $4 N^{(0)}$  ячеек массива  $A$  заняты под начальные частицы). В дальнейшем выбираем первую частицу из массива  $A$  и подвергаем ее «обработке» — определяем ее тип, интервал времени до совершения процесса, «разыгрываем» вид процесса и сам процесс  $P_{ji}$ . Образовавшиеся в результате процесса  $r_{ji}$  новых частиц засылаем (со всеми характеристиками) в массив  $B$ , если в силу условий задачи эти частицы нуждаются в дальнейшем «слежении».

Разумеется, если при этом необходимо записать результаты в ответы (для эмпирических распределений), мы производим эту операцию. Аналогичная процедура производится со всеми начальными частицами массива  $A$  (т. е. обработке подвергаются все частицы нулевого поколения).

После того, как все  $N^{(0)}$  частицы просмотрены и «обработаны», проверяем, не пуст ли массив  $B$  (он может быть пустым, если в результате условий задачи ни одна из вновь образованных частиц в массив  $B$  не засылается). В случае, когда массив оказывается пустым, переходим к двойному счету, т. е. к проверочному повторению вычислений с целью проверки правильности работы БСМ. Если массив не пуст, его содержимое передается в массив  $A$ , и вся процедура просмотра и обработки частиц (теперь уже первого поколения) начинается сначала.

На рис. № 3 представлена логическая схема расчета «ливня» частиц по поколениям.

Оператор № 1 — (ОП — I) осуществляет засылку начальных частиц (со всеми их характеристиками) в массив  $A$ .

ОП — 2 осуществляет выбор всех параметров первой начальной частицы из массива  $A$ .

ОП — 3, ОП — 4 и ОП — 5 устанавливают тип частицы, разыгрывают вид процесса  $P_{ji}$  а также время  $\Delta t_{jk}$  до совершения процесса.

ОП — 6 осуществляет моделирование процесса  $P_{ji}$  и определяет массы всех вновь образованных частиц.

ОП — 7 проверяет все вновь образованные частицы и в случае необходимости засылает необходимые данные в ответы.

ОП — 8 исследует, нуждается ли частица в дальнейшем «слежении». В этом случае частица снабжается особым значком «маркером».

ОП — 9 засылает все характеристики «маркированных» частиц в массив  $B$  (с временем  $t_0 + \Delta t_{jk}$  в качестве параметра).

ОП — 10 переадресует ОП — 2, подготавливая его к выбору следующей начальной частицы из массива  $A$ , ОП — 10 переадресует также оператор засылки ОП — 9, подготавливая его к засылке новых частиц на свободное место в массиве  $B$ .

ОП — 11 проверяет, все ли частицы, находящиеся в массиве  $A$ , были нами просмотрены. В противном случае управление передается ОП — 2.

ОП — 12 проверяет, есть ли частицы в массиве  $B$ . Если массив пуст, управление передается на оператор двойного счета ОП — 13, а затем на ОП — 14, реализующий многократное повторение случайного процесса.

В случае, когда массив  $B$  не является пустым, управление передается ОП — 15, реализующему передачу материала из массива  $B$  в массив  $A$ . ОП — 16 восстанавливает операторы № 2 и № 9,

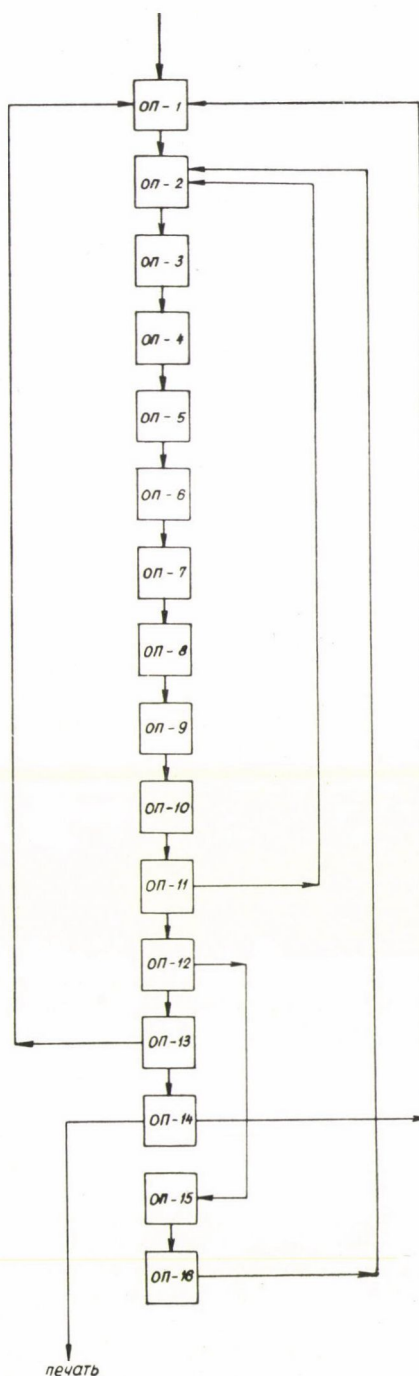


рис № 3



подготавливая их к началу выборки и просмотра частиц нового поколения. После этого управление передается ОП — 2.

IV. В случае большого числа поколений количество составляющих процесс частиц резко возрастает, и описанный выше способ не может быть применен из-за недостаточного объема оперативной памяти БСМ.

Если число поколений очень велико (практически свыше 5) хорошие результаты может дать способ слежения по случайно выбранной траектории. К достоинствам этого метода принадлежит возможность его использования при малом объеме оперативной памяти БСМ. Дадим краткую характеристику этому способу, для простоты изложения приняв число начальных частиц в момент  $t_0$  равным единице.

Рассмотрим ветвящееся дерево исследуемого вероятностного процесса. Искомые параметры функций распределения являются математическими ожиданиями функционалов по всем случайным траекториям и могут быть записаны в виде

$$U = \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} \overline{Z_{(t_0, t_1)}^{(\alpha_1)} \dots Z_{(t_{n-1}, t_n)}^{(\alpha_n)} U_0(t_n)}, \text{ где } (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

означает случайную траекторию ветвящегося процесса (например, траекторию  $ABCDEF$  на рис. № 4),  $Z_{(t_{i-1}, t_i)}^{(\alpha_i)}$  — определенный условиями задачи некий функционал от «ветки» траектории,  $U_0$  — функция, определенная самим ветвящимся процессом. Разумеется,  $Z_{(t_0, t_1)}^{(\alpha_1)} \dots Z_{(t_{n-1}, t_n)}^{(\alpha_n)} U_0(t_n)$  является случайной величиной. Введем новую случайную величину  $\overline{Z_{(t_0, t_1)}^{(\alpha_1)} \dots Z_{(t_{n-1}, t_n)}^{(\alpha_n)} U_0(t_n)}$ , где  $\tau_f^{(\beta_f)}$  — вероятность того, что в  $f$ -ой точке

случайной траектории  $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$  мы пойдем по «ветке»  $\beta_f$ . Иными словами, если в  $f$ -ой точке случайной траектории имели место процесс  $\Pi_{ji}$  с образованием  $r_{ji}$  новых частиц, то  $\tau_f^{(\beta_f)}$  означает вероятность в дальнейшем следить только за частицей с номером  $\beta_f$ , где  $\beta_f$  может принимать любое значение от 1 до  $r_{ji}$ .

Короче говоря, мы разыгрываем также значение  $\alpha_f$ . Доказательство того, что математическое ожидание новой случайной величины равно  $U$ , совершенно тривиально. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} M \left\{ \frac{Z_1^{(\beta_1)}(t_0, t_1) \dots Z_n^{(\beta_n)}(t_{n-1}, t_n) U_0(t_n)}{\tau_1^{(\beta_1)} \dots \tau_n^{(\beta_n)}} \middle| \vec{\beta} = \vec{\alpha} \right\} = \\ = \sum_{(\alpha)} \frac{Z_1^{(\beta)}(t_0, t_1) \dots Z_n^{(\beta_n)}(t_{n-1}, t_n)}{\tau_1^{(\beta_1)} \dots \tau_n^{(\beta_n)}} U_0(t_n) (\tau_1^{(\beta_1)} \dots \tau_n^{(\beta_n)}) = U. \end{aligned}$$

$\vec{\alpha}$  — обозначает вектор траектории  $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ . Вместо ветвящегося процесса мы получаем простой марковский процесс.

Практически это означает, что «разыграв»  $f$ -ый по счету (после начала) вид процесса  $\Pi_{ji}$  и смоделировав его на БСМ, мы после этого разыгрываем еще и ту частицу из вновь образованных, за которой мы в дальнейшем будем следить. Эту частицу мы будем брать с весом  $(m_1 \dots m_f)$ , где  $m_g (g = 1, 2, \dots, f)$  равно числу частиц, образовавшихся в  $g$ -ом по счету после начала процесса. В дальнейшем, «прослеживая» только эту выбранную частицу, разы-

грываем для нее интервал времени  $\Delta t$ , процесс  $P_{ji}$  и т. д., пока вероятностный процесс не прервется.

Описанный способ однако имеет тот недостаток, что при его применении значительно возрастает дисперсия. В соответствии с этим возрастает и время счета на БСМ.

Допустим, например, что в соответствии с условиями задачи все интервалы времени  $\Delta t$  постоянны, и мы хотим оценить параметры эмпирического распределения, скажем, 10-го поколения. Допустим, кроме того, что при всех процессах образуется две новых частицы. В таком случае, разыграв одну случайную траекторию и взяв последнюю частицу 10-го поколения с весом  $2^{10}$ , мы должны повторить наш розыгрыш не меньше, чем  $2^{10}$  раз, чтобы получить такую же статистику, как при моделировании всего дерева один раз. Но в первом случае мы должны реализовать  $10 \cdot 2^{10} \approx 10^4$  процессов  $P_{ji}$ , тогда как во втором — только 2047, т. е. в пять раз меньше. Отсюда видно, что применение этого метода может привести к значительному увеличению времени счета задачи, что может быть допущено лишь в случае отсутствия достаточного объема оперативной памяти БСМ.

V. Весьма эффективным способом моделирования стохастического ветвящегося дерева на БСМ является так называемый лексикографический метод обхода, разработанный А. С. Фроловым. К достоинствам этого способа относится использование крайне небольшого объема оперативной памяти. Метод позволяет рассчитывать все ветвящееся дерево в целом, храня в памяти лишь данные о траектории этого дерева.

Основной принцип этого способа заключается в следующем. Условимся, рассчитав при реализации процесса  $P_{ji}$  массы вновь образованных частиц, в дальнейшем «следить» лишь за одной частицей, но не случайно, а вполне детерминированно. Пусть, например, это будет первая частица из  $r_{ji}$  вновь образованных в процессе  $P_{ji}$  частиц. Прослеживание производится по определенной траектории, пока стохастический процесс не прервется. При этом, все «прослеженные» частицы, от первой до последней, фиксируются и запоминаются в оперативной памяти БСМ.

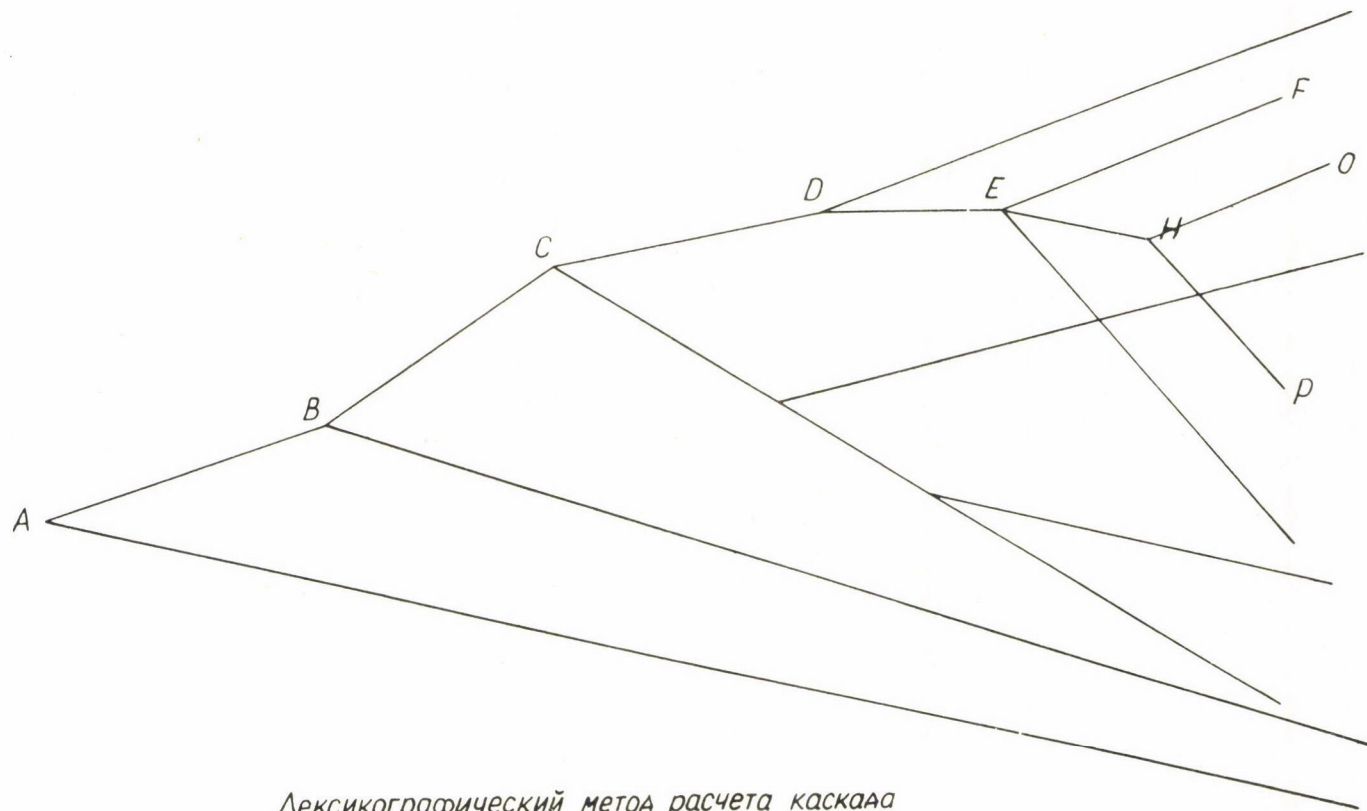
Пусть, например, нами была прослежена траектория ( $ABCDEF$ ). (см. рис. № 4).

«Спускаемся» на одно поколение вниз и, определяя массу и вид второй частицы, образованной в  $E$ , следим за ней до конца ветви  $EHO$  и ветви  $ENP$ . (Масса второй частицы моделируется в соответствии с плотностью распределения масс с учетом параметра — массы первой частицы, нам уже известной).

После того, как все частицы произошедшие от второй частицы в  $E$ , просчитаны, рассчитываем третью частицу в  $E$ , аналогичным образом следим за ней до окончания стохастического процесса. После того, как все частицы, образованные в  $E$ , просчитаны, спускаемся еще на одно поколение вниз и подобным же образом рассматриваем совокупность частиц, полученных из второй частицы, образованной  $BD$  и т. д. Это позволяет нам все время фиксировать в памяти БСМ всего одну траекторию (вернее, данные о всех частицах, образованных в точках этой траектории), не запоминая всего дерева. Это значительно сокращает объем требуемой оперативной памяти.

Подробные результаты применения этого метода к решению одной вероятностной задачи читатель может найти в [2].





Лексикографический метод расчета каскада  
рис N 4.

VI. Описанный выше стохастический процесс охватывает большой круг вероятностных задач, решаемых методами случайных испытаний. К этому же виду следует отнести все физические задачи, связанные с прохождением частиц сквозь слои, с вопросами расчета реакторов и т. д.

Действительно, если понятие массы частицы заменить ее энергией, интервал времени  $\Delta t$  — расстоянием  $\Delta x$ , которое частица пролетает до взаимодействия (расстояние это можно рассматривать в виде одномерного, двумерного или трехмерного векторов), а конечный момент  $t_{\text{кон}}$  — фиксированной глубиной каскада  $x_{\text{кон}}$  — получаем типичный ветвящийся каскадный процесс такого вида. Решением этих задач будут служить эмпирические функции распределения энергетического спектра на определенных глубинах каскада [2].

В связи с решением этих задач следует остановиться на одном заслуживающем внимания вопросе. Даже наиболее рациональный метод расчета каскада-лексико-графический — не применим к решению ряда задач ветвящихся процессов. Дело в том, что эти задачи обычно являются громоздкими и трудоемкими, и составленные программы для БСМ занимают подавляющую часть оперативной памяти машины, оставляя для расчета «дерева» небольшое количество ячеек (часто не более 200—300). Между тем ряд процессов порождают траектории, состоящие из сотен частиц, число которых часто не укладывается в объем оперативной памяти. В ряде задач траектории состоят из большого числа частиц, большинство которых, однако, не прослеживаются дальше сразу же после их рождения. Фактически эти частицы не принимают участия в формировании дерева, но занимают место в оперативной памяти БСМ.

Возникает задача оптимального расчета ветвящегося дерева, т. е. создание такого алгоритма, который позволил бы, на основании данных об имеющемся процессе, осуществить расчет ветвящегося дерева, используя для этого минимальный объем оперативной памяти БСМ. Задача такого рода до сих пор полностью не решена.

(Поступила: 15 января 1960 г.)

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Точнер, К. Д.: „The application of automatic computers to sampling experiments.” *Journal of the Royal Statistical Society, Ser B* **16** (1954) 1, 39—61.
- [2] Голенко, Д. И.: „Расчет характеристик некоторых стохастических процессов методом Монте-Карло.” *Сборник Вычислительная математика*, № 5, 1959 г. 93—108.
- [3] Голенко, Д. И.: „Образование посевдослучайных чисел с произвольным законом распределения.” *Сборник Вычислительная математика*, № 5, 1959 г. 83—92.



## ON CERTAIN PROBLEMS OF EVALUATION OF STOCHASTIC PROCESSES BY MONTE CARLO METHODS

by

D. I. GOLENKO

### Summary

Some problems of mathematical modelling on an electronic high speed computer are considered in connection with a certain type of branching Markov processes. The parameters of cascade processes are evaluable by applying Monte Carlo methods. The main difficulty arises of the fact that the number of the experimental data is very large as compared to the capacity of the operative memory of the electronic machine. Some methods are suggested for eliminating this difficulty. Random numbers corresponding to a given probability distribution are generated by NEUMANN's method or by application of the inverse cumulative distribution function.

# CANTORSCH E ENTWICKLUNGEN DER REELLEN ZAHLEN UND DAS HAUSDORFFSCHE MASS

VON

TIBOR ŠALÁT<sup>1</sup>

In dieser Arbeit werden vom Standpunkt des Hausdorffschen Masses einige Mengen reeller Zahlen untersucht, welche durch gewisse Cantorsche Entwicklungen charakterisiert sind.

## Einleitung

Alle in dieser Arbeit diskutierten Fragen hängen mit der Frage der Verteilung der Ziffern in den Cantorschen Entwicklungen reeller Zahlen zusammen.

Es ist bekannt (siehe [1] s. 113), dass wenn  $\{q_n\}_1^\infty$  eine Folge natürlicher Zahlen grösser als 1 ist, dann kann jede reelle Zahl  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  eindeutig in der Form

$$(1) \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k}$$

ausgedrückt werden, wo  $\varepsilon_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) eine der Zahlen  $0, 1, 2, \dots, q_k - 1$  ist und für unendlich viele  $k$   $\varepsilon_k(x) \leq q_k - 2$  besteht. Die Reihe (1) nennen wir die Cantorsche Entwicklung der Zahl  $x$  in bezug auf das System, welches durch die Folge  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$  bestimmt ist.

Die Cantorschen Entwicklungen stellen eine natürliche Verallgemeinerung der  $g$ -adischen Entwicklungen reeller Zahlen dar.  $g$ -adische Entwicklungen sind nämlich solche Spezialfälle der Cantorschen Entwicklungen, wo in der Folge  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$

$$q_n = g \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A. RÉNYI studiert in [2] (siehe auch [3]) die Frage der Verteilung der Ziffern in den Cantorschen Entwicklungen reeller Zahlen und beweist mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgenden Satz, welcher als eine Erweiterung des bekannten Borelschen Satzes über die Verteilung der Ziffern in  $g$ -adischen Entwicklungen reeller Zahlen betrachtet werden kann.

Wir führen den RÉNYIschen Satz an

<sup>1</sup> Bratislava.



**Satz (Rényi).** Es sei  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  und

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_k}$$

sei eine Cantorsche Entwicklung der Zahl  $x$  in bezug auf das System, welches durch die Folge  $\{q_k\}_1^{\infty}$ ,  $q_n \geq 2$  bestimmt ist. Es sei  $r$  eine ganze Zahl,  $r \geq 0$  und bezeichnen wir mit  $N_n(r, x)$  die Anzahl der Zahlen  $r$  in der (endlichen) Folge  $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_n(x)$ . Setzen wir noch voraus, dass

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty.$$

*Behauptung:* Für fast alle  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  (im Sinne des Lebesgueschen Masses) gilt

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{N_n(r, x)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k}} = 1 \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = 1 \quad (r, s = 0, 1, 2, \dots).$$

Nach diesem Satz kommen also in den Entwicklungen fast aller Zahlen  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  alle nichtnegative ganze Ziffern annähernd gesagt »gleich oft« vor.

Erwägen wir weiter, dass aus  $q_n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{q_n} \rightarrow 0$  folgt und so  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} \rightarrow 0$ , also bekommen wir für fast alle  $x \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{N_n(r, x)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k}}}{\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k}}} = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

Die Zahl  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n}$  nennen wir die asymptotische Dichte der Zahl  $r$  in der Folge  $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ . Nach dem vorhergehenden ist die asymptotische Dichte jeder ganzen nichtnegativen Zahl (jeder Ziffer) in der Folge  $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  für fast alle  $x$  gleich 0 (dies ist die Abweichung von den  $g$ -adischen Entwicklungen der reellen Zahlen). Nach dem Satze von RÉNYI jedoch konvergieren die relativen Dichten aller Zahlpaaren  $r, s$  (d. h. die Zahlen  $\frac{N_n(r, x)}{n}, \frac{N_n(s, x)}{n}$ )

»gleich schnell« zu Null (und dies gilt für fast alle  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ) da für ihren Quotient

$$\frac{\frac{N_n(r, x)}{n}}{\frac{N_n(s, x)}{n}} = \frac{N_n(1, x)}{N_n(s, x)} \rightarrow 1$$

besteht. Wenn wir speziell  $q_n = n + 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) setzen, erhalten wir das bei Cantorschen Entwicklungen oft angewendete System. Für dieses System sind — wie ersichtlich — alle Voraussetzungen des Satzes von RÉNYI erfüllt. Jedes  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  kann eindeutig in der Form

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{k!}$$

ausgedrückt werden, wo  $0 \leq \varepsilon_k(x) \leq k - 1$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) und für unendlich viele  $k$   $\varepsilon_k(x) \leq k - 2$  ist. In diesem Falle, da  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sim \log n$  ist, bekommen wir für fast alle  $x \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{\log n} = 1 \quad (r = 0, 1, \dots).$$

In dieser Arbeit werden wir uns in Zusammenhang mit Cantorschen Entwicklungen der Zahlen  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  mit vier Fragen befassen. Beim Studium der letzten drei Fragen beschränken wir uns auf die Cantorschen Entwicklungen der Zahlen  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  in bezug auf das System, das durch die Folge  $\{n + 1\}_{n=1}^{\infty}$  bestimmt ist.

(A) Es sei  $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x_0)}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k}$ . Bezeichnen wir mit  $\langle x_0 \rangle$

die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x_0)}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k},$$

für welche  $\varepsilon_k(x) \leq \varepsilon_k(x_0)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) gilt.

Wir zeigen, dass man die Hausdorffsche Dimension der Menge  $\langle x_0 \rangle$  bestimmen kann, wenn über die Folge  $\{q_n\}_1^{\infty}$  eine gewisse ergänzende Voraussetzung gemacht wird.

(B) Es sei  $k$  eine natürliche Zahl, und  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  eine beliebige endliche Menge von natürlicher Zahlen. Bezeichnen wir mit  $M(R)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{k!}$$

welche die Eigenschaft haben, dass die Folge ihrer Ziffern  $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$  kein Element der Menge  $R$  enthält.



Wir zeigen, dass  $\dim M(R) = 1$ .

Das ist eine Abweichung von den  $g$ -adischen Entwicklungen reeller Zahlen des Intervalles  $\langle 0, 1 \rangle$ , wo eine ähnlich definierte Menge eine Dimension  $< 1$  hat (siehe [4]).

Wir zeigen auch die Erweiterung dieses Ergebnisses für den Fall, wenn  $R$  eine unendliche Menge ist. In diesem Fall geben wir eine untere und eine obere Abschätzung für  $\dim M(R)$ , sowie für eine genug breite Klasse der Mengen  $R$  auch den bestimmten Wert der Dimension.

(C) Es sei  $r$  eine ganze Zahl,  $r \geq 0$ . Bezeichnen wir mit  $M(\zeta, r)$ ,  $0 < \zeta < 1$  die Menge aller  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{k!},$$

für welche die Ungleichung  $N_n(r, x) > \zeta n$  unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat. Diese Menge hat infolge des Satzes von RÉNYI das Lebesguesche Mass 0, da für jedes  $x \in M(\zeta, r)$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} \geq \zeta > 0$$

ist, und deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = 0$$

nicht besteht.

Wir zeigen, dass  $\dim M(\zeta, r) = 1 - \zeta$ .

(D) Mit Hilfe der Ergebnisse von (B) und (C) ist folgende sich natürlich-ergebende Frage, welche von A. RÉNYI gestellt wurde, leicht zu beantworten. Es sei  $\zeta > 0$  und bei festem  $r \geq 0$  bezeichnen wir mit  $M_1(\zeta, r)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für welche die Ungleichung  $N_n(r, x) > (1 + \zeta) \log n$  unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat. Ähnlicherweise sei bei festem  $r \geq 0$  und bei festem  $\zeta'$ ,  $0 < \zeta' < 1$ ,  $M_2(\zeta', r)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für welche die Ungleichheit  $N_n(r, x) < (1 - \zeta') \log n$  unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat.

Wie gross ist die Hausdorffsche Dimension der Mengen  $M_1(\zeta, r)$  und  $M_2(\zeta', r)$ ?

Wir zeigen, dass die Mengen  $M_1(\zeta, r)$ ,  $M_2(\zeta', r)$ , welche nach dem Satz von RÉNYI das Lebesguesche Mass 0 haben (im ersten Falle ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{\log n} \geq 1 + \zeta > 1,$$

im zweiten

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{\log n} \leq 1 - \zeta' < 1,$$

bei jedem zulässigen Wert  $\zeta, \zeta'$  und noch sehr reich sind, da sie die Hausdorffsche Dimension 1 haben.

Dabei bemerken wir, dass die ganze Arbeit die Hausdorffsche Dimension in bezug auf das System  $F$  der Massfunktionen

$$\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad t \in (0, +\infty)$$

behandelt (siehe [5], [6]).

Für  $\eta > 0$  bezeichnen wir mit  $U(\eta, M)$  das System aller  $\eta$ -Bedeckungen der Menge  $M$ . Unter  $\eta$ -Bedeckung  $V$  der Menge  $M$  verstehen wir ein abzählbares System offener Intervalle, welche die Menge  $M$  bedecken und wobei die Länge eines jeden Intervalls dieses Systems  $\leq \eta$  ist.

Für  $0 < \alpha < 1$  setzen wir ( $|i|$  bedeutet die Länge des Intervalls  $i$ )

$$\mu_\eta^{(\alpha)}\{M\} = \inf_{V \in U(\eta, M)} \sum_{i \in V} |i|^\alpha.$$

Offenbar existiert dann

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \mu_\eta^{(\alpha)}\{M\}$$

und die Zahl  $\mu^{(\alpha)}\{M\}$  nennen wir das  $\alpha$ -dimensionale Mass der Menge  $M$ .

Wie bekannt, existiert für jede lineare Menge  $M$  eine Zahl  $\delta \in (0, 1)$  derart, dass für jedes  $\alpha < \delta$ ,  $\alpha \in (0, 1)$   $\mu^{(\alpha)}\{M\} = +\infty$  und für jedes  $\alpha > \delta$ ,  $\alpha \in (0, 1)$   $\mu^{(\alpha)}\{M\} = 0$  ist.

Die Zahl  $\delta$  nennen wir die Hausdorffsche Dimension der Menge  $M$  und bezeichnen sie mit  $\delta = \dim M$ .

Wir werden einige Ergebnisse der Arbeiten [6], [7] häufig benützen. Es geht hauptsächlich um den Hilfssatz 3 aus der Arbeit [6] und um den Satz 2 aus derselben Arbeit (siehe auch den Satz 5 aus der Arbeit [7]).

Wir führen den EGGLESTONSCHEN Satz (Satz 2 aus [6], siehe auch [7]) in der für unsere Erwägungen geeigneten Form an (es handelt sich überall um lineare Mengen):

**Satz (Eggleston).** Es sei  $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ;  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ , wo  $I_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) aus einer endlichen Anzahl  $g_n$  endlicher abgeschlossener Intervalle  $i_n^m$  gleicher Länge  $\lambda_n > 0$  besteht so dass wenn  $i_n^m, i_n^{m'}$  zwei verschiedene Intervalle von  $I_n$  sind, so  $i_n^m, i_n^{m'}$  keine gemeinsamen inneren Punkte haben.<sup>1</sup> Setzen wir weiter voraus, dass jedes der Intervalle  $i_n^m \in I_n$  die gleiche Anzahl der Intervalle  $i_{n+1}^m \in I_{n+1}$  enthält. Es sei  $0 < \delta \leq 1$  und für jedes  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \delta$  sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{g_n \lambda_n^\alpha} < +\infty \quad (\lambda_0 = 1).$$

*Behauptung:*  $\dim M \geq \delta$ .

Für weiteren Gebrauch führen wir die folgende Bezeichnung ein: Die Intervalle

$$\left\langle \frac{k}{q_1}, \frac{k+1}{q_1} \right\rangle \quad (k = 0, 1, \dots, q_1 - 1)$$

<sup>1</sup> Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit  $I_n$  auch die Menge  $\bigcup_{m=1}^{g_n} i_n^m$  sowie auch die Menge  $\{i_n^1, i_n^2, \dots, i_n^{g_n}\}$ ; zu einem Missverständnis kann es nicht kommen.



werden wir Intervalle erster Stufe nennen, die Intervalle

$$\left\langle \frac{k}{q_1 \cdot q_2}, \frac{k+1}{q_1 \cdot q_2} \right\rangle \quad (k = 0, 1, \dots, q_1 \cdot q_2 - 1)$$

werden wir als Intervalle zweiter Stufe bezeichnen, allgemein werden wir die Intervalle

$$\left\langle \frac{k}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n}, \frac{k+1}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n} \right\rangle \quad (k = 0, 1, \dots, q_1 \cdot \dots \cdot q_n - 1)$$

als Intervalle  $n$ -ter Stufe bezeichnen.

Weiter werden wir kurz sagen, dass das Intervall

$$\left\langle \frac{k}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n}, \frac{k+1}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n} \right\rangle$$

zu der Folge  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  gehört, wenn

$$\frac{k}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n} = \frac{\varepsilon}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 \cdot q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n}$$

ist, wo bei  $0 \leq \varepsilon_i \leq q_i - 1$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  besteht.

### § 1. Dimension der Menge $\langle x_0 \rangle$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von VOLKMANN (siehe [5]).

**Satz 1.** *Es sei  $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ ,*

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x_0)}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k}$$

*sei die Cantorsche Entwicklung der Zahl  $x_0$  in bezug auf das System, welches durch die Folge  $\{q_n\}_1^{\infty}$  bestimmt ist.*

*Weiter setzen wir voraus, dass für jedes  $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^\varepsilon} < +\infty \text{ ist.}$$

*Bezeichnen wir mit  $\langle x_0 \rangle$  die Menge aller jener*

$$x \in \langle 0, 1 \rangle, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k},$$

*für welche  $\varepsilon_k(x) \leq \varepsilon_k(x_0)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ist.*

*Behauptung:* 
$$\dim \langle x_0 \rangle = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

**Bemerkung 1.** Für  $q_n = g$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes erfüllt und unser Satz gibt das folgende bekannte Ergebnis von VOLKMANN:

$$\dim \langle x_0 \rangle = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{n \log q}$$

(siehe [5]).

2. Die Voraussetzung, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^{\varepsilon}}$$

für jedes  $\varepsilon > 0$  konvergiert, ist auch dann erfüllt, wenn  $q_n = n + 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Es ist leicht für die Folge  $\{q_n\}_1^{\infty}$  ein solches Beispiel anzugeben, wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Es genügt die Folge  $\{q_n\}_1^{\infty}$  rekurrent durch  $q_1 = 2$ ,  $q_n = (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_{n-1})^2$  zu definieren.

Dann ist für  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\frac{q_n}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^{\varepsilon}} = \frac{q_n}{\sqrt{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n}} \geq \frac{q_n}{q_1 \cdot \dots \cdot q_{n-1} \sqrt{q_n}} = 1.$$

Auch in diesem Fall gilt nach dem Beweis des Satzes folgende Beziehung:

$$\dim \langle x_0 \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

**Beweis.** a) Wir zeigen, dass

$$\dim \langle x_0 \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

Bezeichnen wir mit  $I_n$  die Menge aller jener Intervalle  $n$ -ter Stufe, die zu solchen Folgen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  gehören, dass für jedes  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\varepsilon_i \leq \varepsilon_i(x_0)$  ist. Es ist leicht zu ersehen, dass

$$\langle x_0 \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Die Anzahl der Intervalle der Menge  $I_n$  ist offenbar

$$\prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1).$$



Es bezeichne  $I'_n$  jene Menge, die aus  $I_n$  derart entsteht, dass jedes Intervall der Menge  $I_n$  durch sein Innere ersetzt wird. Dann ist

$$\langle x_0 \rangle - \langle x_0 \rangle' \left( \langle x_0 \rangle' = \bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n \right)$$

eine abzählbare Menge und  $\langle x_0 \rangle' \subset \langle x_0 \rangle$ , so dass (siehe Hilfssatz 3 aus der Arbeit [6])

$$\dim \langle x_0 \rangle = \dim \langle x_0 \rangle'.$$

Dann ist für jedes  $n$   $\langle x_0 \rangle' \subset I'_n$ .

Es sei schon

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} < 1$$

(für

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} = 1.$$

ist die Behauptung klar).

Dann gilt bei  $\eta > 0$  für alle hinreichend grossen  $n$

$$\left( \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} < \alpha < 1 \right)$$

$$\mu_{\eta}^{(a)} \{ \langle x_0 \rangle' \} \leq \frac{\prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^a}$$

Da

$$\alpha > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}$$

ist, existiert ein solches  $\varepsilon > 0$ , dass für unendlich viele  $n$

$$\alpha - \varepsilon > \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}$$

gilt. Daraus folgt, dass für unendlich viele  $n$

$$\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1) - \alpha \log \prod_{k=1}^n q_k < -\varepsilon \sum_{k=1}^n \log q_k,$$

ist, also

$$\mu_\eta^{(\alpha)} \{ \langle x_0 \rangle' \} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^\alpha} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\varepsilon \sum_{k=1}^n \log q_k \right\} = 0.$$

Also ist für alle  $\eta > 0$   $\mu_\eta^{(\alpha)} \{ \langle x_0 \rangle' \} = 0$ ,

$$\mu^{(\alpha)} \{ \langle x_0 \rangle' \} = 0, \dim \langle x_0 \rangle = \dim \langle x_0 \rangle' \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

b) Wir zeigen, dass

$$\dim \langle x_0 \rangle \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

Ersetzen wir jedes der Intervalle des Systems  $I_n$  durch ihre abgeschlossene Hülle. So bekommen wir statt  $I_n$  ein neues System  $I_n''$  und wir bezeichnen  $\langle x_0 \rangle'' = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n''$ . Dann ist  $\langle x_0 \rangle \subset \langle x_0 \rangle''$  und  $\langle x_0 \rangle'' - \langle x_0 \rangle$  ist eine abzählbare Menge, also besteht  $\dim \langle x_0 \rangle = \dim \langle x_0 \rangle''$ .

Auf die Menge  $\langle x_0 \rangle''$  kann man jetzt, wie leicht zu ersehen ist, den Satz von EGGLESTON anwenden.

Es sei

$$(2) \quad 0 < \alpha < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k},$$

(wir setzen schon voraus, dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} > 0$$

ist; im Falle

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} = 0$$

ist der Satz klar).



Dann bekommen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \lambda_n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^a}{\prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}.$$

Nach (2) existiert ein  $\varepsilon > 0$  so, dass für allen  $n > N$

$$\alpha + \varepsilon < \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} \quad \text{besteht, d. h.}$$

es ist

$$\alpha \log \prod_{k=1}^n q_k - \log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1) < -\varepsilon \sum_{k=1}^n \log q_k.$$

Also ist für alle  $n > N$

$$\begin{aligned} q_n \frac{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^a}{\prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)} &= q_n \exp \left\{ \alpha \log \prod_{k=1}^n q_k - \log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1) \right\} < \\ &< q_n \exp \left\{ -\varepsilon \log \prod_{k=1}^n q_k \right\} = \frac{q_n}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung des Satzes und aus dem Satz von EGGLESTON folgt die Behauptung.

**Beispiel. 1.** Es sei

$$2 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots$$

und es sei die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n)^\varepsilon}$  für alle  $\varepsilon > 0$  konvergent. Es sei

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k(x_0) < +\infty.$$

Dann existiert ein  $K > 0$  so, dass

$$\varepsilon_k(x_0) + 1 < K \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Also besteht

$$\frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k} < \frac{n \log K}{\log(n!)} \rightarrow 0$$

und so ist nach dem vorhergehenden Satz

$$\dim \langle x_0 \rangle = 0.$$

2. Es sei  $q_n = n + 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) und

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k(x_0)}{k} > 0.$$

Dann existiert  $\delta > 0$  so, dass für alle hinreichend grossen  $k$  ( $k > k_0$ )

$$\frac{\varepsilon_k(x_0)}{k} > \delta$$

ist. Dann ist

$$(3) \quad \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log(n+1)!} \geq \frac{c_2}{\log(n+1)!} + \frac{(n-k_0) \log \delta}{\log(n+1)!} + \frac{\log(n!)}{\log(n+1)!}$$

wo

$$c_2 = c_1 - \log(k_0!), \quad c_1 = \sum_1^{k_0} \log(\varepsilon_k(x_0) + 1).$$

Der Grenzwert der rechten Seiten von (3) ist offenbar gleich 1, also besteht

$$\dim \langle x_0 \rangle = 1.$$

## § 2. Dimension der Menge $M(R)$

**Satz. 2.** Es sei  $k$  eine natürliche Zahl, und  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  sei eine Menge von natürlichen Zahlen. Wir bezeichnen mit  $M(R)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für welche  $\{\varepsilon_l(x)\}_{l=2}^\infty$  keine Elemente aus  $R \left( x = \sum_{r=2}^\infty \frac{\varepsilon_r(x)}{r!} \right)$  enthält.

*Behauptung:*  $\dim M(R) = 1$ .

**Beweis.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  ist. Es sei  $n \geq r_k$ . Es ist leicht zu ersehen, dass die Anzahl  $g_n$  aller jener Intervalle  $n$ -ter Stufe, die zu den die Ziffern  $r_1, r_2, \dots, r_k$  nicht enthaltenden Folgen

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n+1}$$

gehören (diese Intervalle bilden das System  $I_n$ ) gleich der Zahl

$$(n+1-k)! \prod_{j=1}^k (r_j + 1 - j).$$

ist.

Um dies einzusehen, genügt es zu erwägen, dass die Anzahl dieser Intervalle gleich der Anzahl solcher Folgen

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n+1}$$

ist, die keine Ziffer von  $r_1, r_2, \dots, r_k$  enthalten. Dabei haben wir für jedes  $\varepsilon_i$ ,  $2 \leq i \leq r_1$  (wir setzen voraus, dass  $r_1 \geq 2$  ist) im ganzen  $i$  Möglichkeiten  $(0, 1, \dots, i-1)$ , für  $\varepsilon_{r_1+1}$  haben wir nur  $r_1$  Möglichkeiten (da  $r_1$  nicht in Erwägung kommt), ... ähnlich haben wir für  $\varepsilon_{r_k} r_k - (k-1)$ . Möglichkeiten



(da  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$  nicht in Erwägung kommen), für  $\varepsilon_{r_k+1}$  haben wir nur  $r_k + 1 - k$  Möglichkeiten (da  $r_1, \dots, r_k$  nicht in Erwägung kommen) u.s.w. Auch wenn  $r_1 = 1$  kann man die Gültigkeit von (3) feststellen.

Also ist  $g_n = C_1 (n + 1 - k)!$ ,  $C_1 = \prod_{j=1}^k (r_j + 1 - j)$ .

Wenn wir jedes Intervall des Systems  $I_n$  durch ihre abgeschlossene Hülle ersetzen, bekommen wir statt  $I_n$  ein neues System  $\bar{I}_n$ . Dann ist

$$M' = \bigcap_{n \geq r_k} \bar{I}_n \supset M(R) \text{ und } M' - M(R)$$

ist eine abzählbare Menge. Darum gilt  $\dim M' = \dim M(R)$ .

Es ist sofort zu sehen, dass jedes Intervall des Systems  $\bar{I}_n$  ( $n \geq r_k$ ) dieselbe Anzahl ( $= n + 2 - k$ ) der Intervalle des Systems  $\bar{I}_{n+1}$  enthält. Wir können also auf die Menge  $M'$  den Satz von EGGLESTON anwenden.

Mit den Bezeichnungen dieses Satzes ist  $\lambda_n = \frac{1}{(n+1)!}$ ,  $g_n = C_1 (n + 1 - k)!$ ,  $C_1 > 0$  und für  $0 < \alpha < 1$  bekommen wir

$$\begin{aligned} \sum_{n > r_k} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \lambda_n^\alpha} &= \sum_{n > r_k} (n+1) \frac{[(n+1)!]^\alpha}{C_1 (n+1-k)!} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{n > r_k} (n+1)^{k+1} [(n+1)!]^{a-1} = \\ &= C_2 \sum_{n < r_k} \exp\{(\alpha-1)(n+1) \log(n+1) + O(n)\} < +\infty, \end{aligned}$$

wo  $C_2 = \frac{1}{C_1}$ . Also  $\dim M' = \dim M(R) \geq 1$ ,

$$\dim M(R) = 1.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

**Bemerkung.** Wie wir schon bemerkt haben, bedeutet der vorhergehende Satz eine Abweichung von den Ergebnissen, die beim Studium der  $g$ -adischen Entwicklungen reeller Zahlen erreicht wurden. Es ist nämlich bekannt, dass schon die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , die in ihren  $g$ -adischen Entwicklungen eine bestimmte Ziffer nicht enthalten, die Dimension  $\frac{\log(g-1)}{\log g} < 1$  hat.

Im folgenden zeigen wir, dass ein analoges Resultat auch im Falle von einigen unendlichen  $R$  gilt.

**Satz 3.** Es sei  $R = \{r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots\}$  eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen. Es bedeute  $R(n)$  die Anzahl der Zahlen  $r_i$ , für die  $r_i \leq n$  gilt. Setzen wir

$$D^*(R) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n}, \quad \bar{D}^*(R) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n},$$

(untere und obere asymptotische Dichte der Menge  $R$ ). Weiter setzen wir

$$A(R, n) = \prod_{j=1}^{R(n)} (r_j + 1 - j)$$

und

$$l(R) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(R, n)}{n \log n}, \quad L(R) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(R, n)}{n \log n}.$$

Es bedeute  $M(R)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{k!}$ , welche die Eigenschaft haben, dass die Folge  $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$  keine Punkte aus  $R$  enthält.  
Behauptung:

$$1 - \bar{D}^*(R) + l(R) \leq \dim M(R) \leq 1 - \bar{D}^*(R) + L(R).$$

**Folgerung.** Wenn  $l^*(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(R, n)}{n \log n}$  existiert, dann ist

$$\dim M(R) = 1 - \bar{D}^*(R) + l^*(R).$$

**Beweis des Satzes.** a) Wir zeigen, dass

$$\dim M(R) \leq 1 - \bar{D}^*(R) + L(R).$$

Schreiben wir  $L = L(R)$ ,  $\delta = \bar{D}^*(R)$ . Wenn  $1 - \bar{D}^*(R) + L(R) = 1$  ist, ist die Behauptung des Satzes klar. Es sei also  $1 - \bar{D}^*(R) + L(R) < 1$ . Es sei  $\alpha \in (1 - \delta + L, 1)$ . Wählen wir ein  $\varepsilon > 0$  so, dass

$$\alpha - 2\varepsilon > 1 - \delta + L \quad \text{gelte.}$$

Erwägen wir, dass  $M(R) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ , wo  $I_n$  das System aller jener Intervalle  $n$ -ter Stufe ist, die zu den die Elemente von  $R$  nicht enthalten den Folgen gehören. Wenn wir Einfachheit halber  $k = R(n)$  setzen, dann bekommen wir ähnlich wie beim Beweis des vorhergehenden Satzes

$$g_n = (n + 1 - k)! \prod_{j=1}^{R(n)} (r_j + 1 - j) = (n + 1 - k)! A(R, n),$$

wo  $g_n$  die Anzahl der Intervalle des Systems  $I_n$  bezeichnet.

Weiter enthält jedes Intervall des Systems  $I_n$  dieselbe Anzahl der Intervalle des Systems  $I_{n+1}$  (diese Anzahl ist  $n + 2 - k$ , wenn  $r_{k+1} > n + 1$  ist und  $n + 2 - (k + 1)$ , wenn  $r_{k+1} = n + 1$  ist).

Ersetzen wir jedes Intervall des Systems  $I_n$  durch sein Innere, so bekommen wir ein neues System  $I'_n$ .

Setzen wir  $M' = \bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n$ , dann ist  $M' \subset M(R)$  und  $M(R) - M'$  ist eine abzählbare Menge. Darum gilt

$$\dim M(R) = \dim M'$$

(siehe [6]).



Dabei ist für alle  $n \geq 1$   $M' \subset I'_n$ . Es sei  $\eta > 0$ . Dann gilt für alle hinreichend grossen  $n$

$$\mu_\eta^{(a)}\{M'\} \leq g_n \frac{1}{[(n+1)!]^a} = (n+1-k)! \frac{A(R, n)}{[(n+1)!]^a},$$

da  $\lambda_n = \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0$ . Bemerken wir, dass nach der Voraussetzung des Satzes

für alle hinreichend grossen  $n$

$$\log A(R, n) < (L + \varepsilon) n \log n$$

ist und für unendlich viele  $n$

$$n - k < n(1 - \delta + \varepsilon), \quad k = R(n)$$

besteht. Also ist für unendlich viele  $n$

$$\begin{aligned} \mu_\eta^{(a)}\{M'\} &\leq \exp\{(n-k)\log(n-k) + (L + \varepsilon)n \log n - \alpha n \log n + \\ &+ O(n)\} \leq \exp\{(1 - \delta + 2\varepsilon + L - \alpha)n \log n + O(n)\}. \end{aligned}$$

Da nach der Wahl der Zahl  $\varepsilon$   $1 - \delta + 2\varepsilon + L - \alpha < 0$  ist, bekommen wir daraus  $\mu_\eta^{(a)}\{M'\} = 0$ ,  $\mu^{(a)}\{M'\} = 0$ ,  $\dim M(R) = \dim M' \leq 1 - \delta + L$ .

b) Wir zeigen, dass  $\dim M(R) \geq 1 - \delta + l$ .

Ersetzen wir jedes Intervall des Systems  $I_n$  durch seine abgeschlossene Hülle, so bekommen wir ein neues System  $I_n''$ . Setzen wir  $M'' = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n''$ , dann ist  $M(R) \subset M''$  und  $M'' - M(R)$  ist eine abzählbare Menge, darum gilt

$$\dim M(R) = \dim M''.$$

Für die Menge  $M''$  sind die Voraussetzungen des Satzes von EGGLESTON erfüllt (siehe den Teil a) dieses Beweises. Es sei  $0 < \alpha < 1 - \delta + l$  (wir setzen schon  $1 - \delta + l > 0$  voraus). Es sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, dass  $\alpha + 2\varepsilon < 1 - \delta + l$  ist.

Nach der Voraussetzung des Satzes ist für alle hinreichend grossen  $n$

$$-(n-k) < -n(1 - \delta - \varepsilon), \quad k = R(n) \quad \text{und} \quad \log A(R, n) > (l - \varepsilon) n \log n$$

darum (wenn das vorhergehende für alle  $n \geq N$  gilt) haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \lambda_n^a} &= \sum_1^N + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(n+1)[(n+1)!]^a}{(n+1-k)! A(R, n)} \leq \\ &\leq c_1 + \sum_{N+1}^{\infty} \exp\{\alpha n \log n - (n-k)\log(n-k) - \log A(R, n) + O(n)\} \leq \\ &\leq c_1 + \sum_{N+1}^{\infty} \exp\{(\alpha - 1 + \delta + 2\varepsilon - l)n \log n + O(n)\} < +\infty. \end{aligned}$$

da nach der Wahl der Zahl  $\varepsilon$   $\alpha - 1 + y + 2\varepsilon - l < 0$  ist. Dabei haben wir

$c_1 = \sum_1^N$  gesetzt. Nach dem Satz von EGGLESTON bekommt man jetzt

$$\dim M(R) = \dim M'' \geq 1 - \delta + l.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

**Bemerkung.** Die Zahlen  $l(R)$  und  $L(R)$  hängen in einem besonderen Fall sehr einfach mit den Zahlen  $D^*(R)$  und  $\bar{D}^*(R)$  zusammen. Es gilt nämlich

**Lemma 1.** Es sei  $\bar{D}^*(R) < 1$ .

Dann gilt

$$l(R) = D^*(R), \quad L(R) = \bar{D}^*(R).$$

**Beweis.** a) Wir zeigen, dass  $l(R) = D^*(R)$ . Aus der Definition von  $A(R, n)$  bekommen wir sofort die folgende Abschätzung:

$$A(R, n) \leq (n + 1 - k)^k, \quad k = R(n)$$

und so ist für alle hinreichend grossen  $n$

$$(T) \quad \frac{\log A(R, n)}{n \log n} \leq \frac{k}{n}$$

daraus bekommen wir  $l(R) \leq D^*(R)$ .

Zeigen wir noch, dass  $l(R) \geq D^*(R)$ . Für  $D^*(R) = 0$ , ist das klar. Es sei also  $\delta_1 = D^*(R) > 0$  (dann ist auch  $\bar{D}^*(R) > 0$ ). Es sei  $0 < \varepsilon < \delta_1$ . Dann ist für alle hinreichend grossen  $n$   $\frac{R(n)}{n} > \delta_1 - \varepsilon$ . Setzen wir  $B(R, n) = \prod_{j=1}^{R(n)} r_j$ . Es ist offenbar

$$(4) \quad \frac{A(R, n)}{B(R, n)} = \prod_{j=1}^{R(n)} \left( 1 + \frac{1}{r_j} - \frac{j}{r_j} \right).$$

Da  $\frac{j}{r_j} = \frac{R(r_j)}{r_j}$ , existiert nach der Voraussetzung des Satzes ein  $q$ ,  $0 < q < 1$  so, dass für alle hinreichend grossen  $j$  ( $j > j_0$ )

$$(5) \quad \frac{j}{r_j} = \frac{R(r_j)}{r_j} < q$$

gilt.

Da  $R(n) \rightarrow \infty$ , für  $n \rightarrow \infty$ , kann man ein  $n_1$  so wählen, dass  $R(n) > j_0$  ist (für alle  $n > n_1$ ). Dann ist nach (4), (5)

$$(6) \quad \frac{A(R, n)}{B(R, n)} \geq c_1 (1 - q)^{R(n)}$$

wo

$$c_1 = (1 - q)^{-j_0} \prod_{j=1}^{j_0} \left( 1 + \frac{1}{r_j} - \frac{j}{r_j} \right) > 0.$$

Nach einer einfachen Abschätzung bekommen wir

$$B(R, n) \geq 1.2 \dots R(n) = [R(n)]!$$



also ist nach (4) und (5) für alle hinreichend grossen  $n$

$$\log A(R, n) \geq \log c_1 + R(n) \log(1 - q) + (\delta_1 - \varepsilon) n \log n + O(n).$$

Daraus bekommen wir sofort

$$l(R) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(R, n)}{n \log n} \geq \delta_1 - \varepsilon.$$

Da die letzte Beziehung für jedes  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \delta_1$  gilt, ist  $l(R) \geq D^*(R)$ .

b) Wir zeigen, dass  $L(R) = \bar{D}^*(R)$ . Aus der Ungleichheit (T) erhalten wir

$$L(R) \leq \bar{D}^*(R).$$

Es genügt noch zu zeigen, dass  $L(R) \geq \bar{D}^*(R)$ .

Es sei schon  $\bar{D}^*(R) > 0$  (für  $\bar{D}^*(R) = 0$  ist das klar). Nach dem vorhergehenden Teil des Beweises ist für alle

$$j > j_0, \quad \frac{j}{r_j} < q \quad (0 < q < 1)$$

und so gilt für alle hinreichend grosse  $n$  (6) und

$$(7) \quad B(R, n) \geq [R(n)]!.$$

Es genügt noch zu bemerken, dass für jedes  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \delta$  die Ungleichheit

$$(8) \quad \frac{R(n)}{n} > \delta - \varepsilon$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat.

Also haben wir nach (6), (7), (8) für unendlich viele  $n$

$$\log A(R, n) \geq (\delta - \varepsilon) n \log n + O(n).$$

Daraus folgt

$$L(R) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(R, n)}{n \log n} \geq \delta - \varepsilon.$$

Da die letzte Ungleichheit für jedes hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$  gilt, ist  $L(R) \geq \bar{D}^*(R)$ .

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Eine einfache Folgerung des vorhergehenden Hilfssatzes und des Satzes 3 ist der folgende Satz.

**Satz 4.** *Es sei  $R$  eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen. Es habe  $M(R)$  dieselbe Bedeutung wie im Satz 3.*

*Es sei  $\bar{D}^*(R) < 1$ .*

*Behauptung:*

$$\dim M(R) \geq 1 - \bar{D}^*(R) + D^*(R).$$

**Folgerung.** *Wenn  $D(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n}$  existiert und  $D(R) < 1$  ist (d. h.  $R$  hat die asymptotische Dichte, kleiner als 1), dann ist  $\dim M(R) = 1$ .*

Wenn wir zum Beispiel für die Menge  $R$  die Menge der Glieder einer beliebigen arithmetischen Folge mit der Differenz  $d \geq 1$  nehmen, dann bekommen wir nach dem Satz 4  $\dim M(R) = 1$ .

Die Sätze 3 und 4 geben uns in einem sich ziemlich natürlich ergebenden Sinne »fast immer« ein exaktes Ergebnis (in dem Sinne, dass sie den exakten Wert der Dimension von  $M(R)$  bestimmen). Es ist nämlich aus der Zahlentheorie (siehe [8] s. 190) bekannt, dass für fast alle (im dort definierten Sinne) unendliche Mengen  $R$  natürlicher Zahlen:  $D(R) = \frac{1}{2}$  gilt und für diese Mengen nach dem vorhergehenden Ergebnis  $\dim M(R) = 1$  ist.

**Beispiel.** 1. Es sei  $R = \{k+1, k+2, \dots\}$ ,  $k \geq 0$ . Es ist offenbar, dass  $\overline{D}^*(R) = D^*(R) = 1$ . Weiter ist für jedes  $j$   $r_j = k+j$  und  $R(n) = n-k$  für jedes  $n \geq k+1$ , darum ist

$$A(R, n) = \prod_{j=1}^{n-k} (k+1) = (k+1)^{n-k},$$

also gilt

$$\frac{\log A(R, n)}{n \log n} = \frac{(n-k) \log (k+1)}{n \log n} \rightarrow 0$$

und so folgt  $l(R) = L(R) = 0$ . Nach dem Satz 3 ist

$$\dim M(R) = 0.$$

2. Die unendliche Menge  $R$  von natürlichen Zahlen definieren wir folgendermassen: Zur Menge  $R$  gehören im Intervall

$$\langle (n-1)!, n! \rangle \quad (n = 2, 3, \dots)$$

gerade jene Zahlen, die die Form  $(n-1)! + l$  haben, wo  $l = 0, 1, \dots, l^*(n)$ , wobei

$$l^*(n) = (n-1)! - R((n-1)! - 1) - 1.$$

Daraus bekommen wir sofort

$$R(n! - 1) = R((n-1)! - 1) + l^*(n) + 1 = (n-1)! \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Wenn  $x$  die Zahlen  $(n-1)! + l^*(n)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) durchläuft, dann haben wir für  $x = (n-1)! + l^*(n)$

$$\frac{R(x)}{x} = \frac{(n-1)!}{2(n-1)! - 1 - (n-2)!} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Wenn  $x$  die Zahlen  $n! - 1$  durchläuft, dann ist für  $x = n! - 1$

$$\frac{R(x)}{x} = \frac{(n-1)!}{n! - 1} \rightarrow 0,$$

also  $D^*(R) = 0$ .

Ist weiterhin,  $x \in \langle (n-1)!, n! \rangle$  eine ganze Zahl, dann ist

$$x = (n-1)! + s, s = s(x), 0 \leq s \leq (n-1)(n-1)!.$$



Wenn  $s > l^*(n)$  ist, dann besteht

$$\frac{R(x)}{x} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! + s} < \frac{(n-1)!}{(n-1)! + l^*(n)} < \frac{1}{2} - \varepsilon$$

für alle hinreichend grossen  $n$

Wenn aber  $0 \leq s \leq l^*(n)$  ist, so gilt

$$\frac{R(x)}{x} = \frac{R((n-1)! - 1) + s + 1}{(n-1)! + s} = \frac{(n-2)! + s + 1}{(n-1)! + s}.$$

Bemerken wir, dass für alle hinreichend grossen  $n$   $(n-2)! + 1 < (n-1)!$  besteht und die Funktion

$$f(t) = \frac{a+t}{b+t} \quad (0 < a < b) \text{ für } 0 \leq t \leq l^*(n)$$

positive Ableitung  $f'(t) = \frac{b-a}{(b+t)^2} > 0$  hat. So ist  $f(t) \leq f(l^*(n))$ , also

$$\frac{R(x)}{x} \leq \frac{(n-2)! + l^*(n) + 1}{(n-1)! + l^*(n)} = \frac{(n-1)! - 1}{2(n-1)! + o((n-1)!)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Also bekommen wir so  $D^*(R) = \frac{1}{2}$ . Nach dem Satz 4 ist also  $\dim M(R) \geq \frac{1}{2}$ .

3. Zur unendlichen Menge  $R$  von natürlichen Zahlen sollen im Intervall  $\langle (n-1)!, n! \rangle$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) alle ganze Zahlen dieses Intervalles gehören, wenn  $n$  eine gerade Zahl ist und keine Zahl dieses Intervalles, wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist.

Dann ist

$$\frac{R((2k)!)}{(2k)!} \geq \frac{(2k)! - (2k-1)!}{(2k)!} \rightarrow 1$$

also  $D^*(R) = 1$ .

Weiter ist es leicht zu ersehen, dass

$$\begin{aligned} A(R, (2k)!) &\geq [(2k-1)! - (2k-2)!]^{(2k)!(1-o(1))} \\ \frac{\log A(R, (2k)!)}{(2k)! \log(2k)!} &\geq \frac{(1-o(1))(2k-1) \log(2k-1) + O(k)}{(2k) \log(2k) + O(k)} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

wenn  $k \rightarrow \infty$ . Also besteht  $L(R) = 1$ .

Weiterhin ist  $A(R, (2k+1)!) > [(2k-1)!]$ , also

$$\frac{\log A(R, (2k+1)!)}{(2k+1)! \log(2k+1)!} \leq \frac{(2k)! \log(2k-1)!}{(2k+1)! \log(2k+1)!} \rightarrow 0$$

darum  $l(R) = 0$ .

In diesem Fall geben uns unsere Ergebnisse nur die trivialen Abschätzungen.

§ 3. Dimension der Menge  $M(\zeta, r)$ 

Es sei  $r$  eine ganze Zahl,  $r \geq 0$ ; es sei  $0 < \zeta < 1$ . Bezeichnen wir mit  $M(\zeta, r)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für die die Ungleichheit

$$N_n(r, x) > \zeta n$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat. Dabei bedeutet  $N_n(r, x)$  die Anzahl der Zahlen  $r$  in der (endlichen) Folge

$$\varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x), \dots, \varepsilon_{n+1}(x) \left( x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{k!} \right).$$

Die Menge  $M(\zeta, r)$  hat das Lebesguesche Mass 0, wie schon gezeigt wurde.

Der folgende Satz bestimmt die Hausdorffsche Dimension der Menge  $M(\zeta, r)$ .

**Satz 5.** *Es sei  $r$  eine ganze Zahl,  $r \geq 0$  und  $0 < \zeta < 1$ . Mit  $M(\zeta, r)$  bezeichnet man die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für welche die Ungleichheit*

$$N_n(r, x) > \zeta n$$

*unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat.*

*Behauptung:*  $\dim M(\zeta, r) = 1 - \zeta$ .

**Beweis.** a) Wir zeigen, dass  $\dim M(\zeta, r) \leq 1 - \zeta$ . Mit  $n_0 = n_0(\zeta, r)$  bezeichnen wir die kleinste natürliche Zahl  $\geq 1$  mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert wenigstens ein Intervall der  $n_0$ -ten Stufe, welches zu einer solchen Folge  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n_0+1}$  gehört, dass die Anzahl der Zahlen  $r$  in dieser Folge grösser als  $\zeta n_0$  ist. Das System aller dieser Intervalle der  $n_0$ -ten Stufe bezeichnen wir mit  $\mathcal{U}_{n_0}$ . Ähnlich definieren wir für die natürliche Zahl  $k$  das System  $\mathcal{U}_{n_0+k}$ . Dies ist das System aller jener Intervalle der  $n_0 + k$ -ten Stufe, die zu solchen Folgen  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n_0+k+1}$  gehören, dass die Anzahl der Zahlen  $r$  in dieser Folge grösser als  $\zeta(n_0 + k)$  ist.

Für jedes  $n' \geq n_0$  ist

$$M(\zeta, r) \subset \bigcup_{n=n'}^{\infty} \mathcal{U}_n$$

Mit  $q_{n_0+k}$  bezeichnen wir die Anzahl der Intervalle des Systems  $\mathcal{U}_{n_0+k}$ . Dann ist  $q_{n_0+k}$  offenbar gleich der Anzahl aller jener Folgen

$$(9) \quad \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n_0+k+1}$$

( $0 \leq \varepsilon_i \leq i - 1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n_0 + k + 1$ ), welche an mehr als  $[\zeta(n_0 + k)]$  Stellen die Zahlen  $r$  enthalten. Diese Folgen können wir in Klassen  $P_j$  verteilen. Es gehören in die Klasse  $P_j$  alle jene Folgen in welchen die Zahlen  $r$  auf genau  $j$  Stellen auftreten ( $[\zeta(n_0 + k)] + 1 \leq j \leq n_0 + k$ ).

Dann ist  $q_{n_0+k}$  gleich der Summe der Anzahlen der Elemente der einzelnen Klassen.



Wenn  $N(M)$  die Anzahl der Elemente der endlichen Menge  $M$  bedente dann ist

$$N(P_{n_0+k}) \leq 1,$$

$$N(P_{n_0+k-1}) \leq 2 + 3 + \dots + (n_0 + k + 1),$$

$$N(P_{n_0+k-2}) \leq \sum_{\substack{s=2 \\ l>s}}^{n_0+k} sl$$

bis schliesslich  $N(P_{[\zeta(n_0+k)]+1})$  nach oben durch eine solche Summe beschränkt wird, deren jeder Summand ein Produkt von wachsenden Faktoren ist (ihre, Anzahl ist  $n_0 + k - 1 - [\zeta(n_0 + k)]$ ), der kleinste Summand ist

$$2 \cdot 3 \cdot \dots (n_0 + k - [\zeta(n_0 + k)])$$

der grösste Summand ist

$$(10) \quad ([\zeta(n_0 + k)] + 3) \dots (n_0 + k + 1).$$

Dies ist derart ersichtlich:

Wenn wir uns die Ziffern  $r$  auf den  $[\zeta(n_0 + k)] + 1$  Stellen festgelegt denken, dann haben wir in der Folge  $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_0+k+1}$  noch  $n_0 + k - 1 - [\zeta(n_0 + k)]$  Stellen frei, dabei haben wir auf jeder Stelle  $\varepsilon_s \leq s$  Möglichkeiten.

Offenbar ist

$$(11) \quad g_{n_0+k} \leq (n_0 + k - [\zeta(n_0 + k)]) ([\zeta(n_0 + k)] + 3) \dots (n_0 + k + 1) \left( \left[ \frac{n_0 + k}{2} \right] \right)$$

da die Anzahl aller Klassen  $\leq n_0 + k - [\zeta(n_0 + k)]$  ist und weiterhin die Anzahl der Elemente jeder Klasse nach oben beschränkt ist durch die Summe, deren jeder Summand nie grösser als (10) ist und endlich die Anzahl der Sum-

manden in dieser Summe nach oben durch  $\left( \left[ \frac{n_0 + k}{2} \right] \right)$  beschränkt ist.

Setzen wir jetzt kurz  $n_0 + k = l$ .

Dann ist nach (11)

$$\begin{aligned} q_l &\leq (l - [\zeta l]) ([\zeta l] + 3) \dots l(l + 1) \left( \left[ \frac{l}{2} \right] \right) = \\ &= (l + 1) (l - [\zeta l]) \frac{l!}{([\zeta l] + 2)!} \frac{l!}{\left( l - \left[ \frac{l}{2} \right] \right)! \left[ \frac{l}{2} \right]!}. \end{aligned}$$

Bemerken wir, dass  $l - [\zeta l] \leq 2l - \zeta l$  und weiter  $\left( l - \left[ \frac{l}{2} \right] \right)! \geq \left[ \frac{l}{2} \right]!$  ist,

also besteht

$$q_l \leq (l+1)(2l-\zeta l) \frac{(l!)^2}{[\zeta l]!} \frac{1}{\left(\left[\frac{l}{2}\right]!\right)^2}.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist

$$q_l \leq \exp\{2l \log l - \zeta \log(\zeta l) - 2 \frac{l}{2} \log \frac{l}{2} + O(l)\},$$

also

$$(12) \quad q_l \leq \exp\{(1-\zeta)l \log l + O(l)\}.$$

Es gilt für jedes  $k' \geq 0$

$$M(\zeta, r) \subset \bigcup_{k=k'}^{\infty} U_{n_0+k}.$$

Ersetzen wir jedes Intervall des Systems  $U_{n_0+k}$  ( $k=0, 1, \dots$ ) mit seinem Inneren, so bekommen wir ein neues System  $U'_{n_0+k}$  ( $k=0, 1, \dots$ ). Offenbar sind alle Elemente der Menge  $M(\zeta, r)$  mit Ausnahme höchstens einer abzählbaren Menge in der Menge  $\bigcap_{k=k'}^{\infty} U'_{n_0+k}$  enthalten und dies gilt für jedes  $k' \geq 0$ .

Es sei jetzt  $\alpha > 1 - \zeta$  und  $\eta > 0$ .

Wählen wir  $k_1 \geq 0$  so, dass für jedes  $k \geq k_1$   $\frac{1}{(n_0+k+1)!} < \eta$  ist.

Untersuchen wir jetzt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{n_0+k-1} \frac{1}{[(n_0+k)!]^{\alpha}}$$

Nach (12) und nach der Stirlingschen Formel ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{n_0+k-1}}{[(n_0+k)!]^{\alpha}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{(1-\zeta)(n_0+k) \log(n_0+k) - \alpha(n_0+k) \log(n_0+k) + O(k)\}.$$

Setzen wir  $\delta = \alpha - (1 - \zeta)$ , dann besteht

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{n_0+k-1}}{[(n_0+k)!]^{\alpha}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-\delta(n_0+k) \log(n_0+k) + O(k)\} < +\infty.$$

Deshalb existiert ein  $k_2 > k_1$  so dass ( $\varepsilon > 0$ )

$$\sum_{k=k_2}^{\infty} \frac{q_{n_0+k-1}}{[(n_0+k)!]^{\alpha}} < \varepsilon$$

ist.



Mit  $M'(\zeta, r)$  bezeichnen wir denjenigen Teil der Menge  $M(\zeta, r)$ , der in der Menge  $\bigcup_{k=k'}^{\infty} U'_{n_0+k}$  für jedes  $k' \geq 0$  enthalten ist. Dann ist  $M'(\zeta, r) \subset M(\zeta, r)$  und  $M(\zeta, r) - M'(\zeta, r)$  ist eine abzählbare Menge, also gilt  $\dim M(\zeta, r) = \dim M'(\zeta, r)$ . Daraus bekommen wir sofort

$$\mu_{\eta}^{(a)}\{M'(\zeta, r)\} \leq \sum_{k=k_2}^{\infty} \frac{q_{n_0+k-1}}{[(n_0+k)!]^a} < \varepsilon.$$

Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, ist

$$\begin{aligned} \mu_{\eta}^{(a)}\{M'(\zeta, r)\} &= 0, \quad \mu^{(a)}\{M'(\zeta, r)\} = 0, \\ \dim M(\zeta, r) &= \dim M'(\zeta, r) \leq 1 - \zeta. \end{aligned}$$

b) Wir zeigen, dass  $\dim M(\zeta, r) \geq 1 - \zeta$ . Es sei  $n_1$  die kleinste natürliche Zahl grösser als 1 mit folgender Eigenschaft:

Es existiert wenigstens ein Intervall der  $n_1 - 1$ -ten Stufe, das zu einer solchen Folge  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n_1}$  gehört, die genau  $[\zeta n_1] + 1$  Ziffern  $r$  enthält.

Es sei  $s \geq n_1$ .

Mit  $V_n(s, \zeta, r)$  bezeichnen wir das System aller jener Intervalle der  $ns - 1$ -ten Stufe, die zu solchen Folgen

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{ns}$$

gehören, dass für jedes  $i = 1, 2, \dots, n$  ist die Anzahl der Zahlen  $r$  in der Folge  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{is}$  gleich der Zahl  $[is \zeta] + 1 (> is \zeta)$  ist. Es ist offenbar

$$V_{n+1}(s, \zeta, r) \subset V_n(s, \zeta, r),$$

Setzen wir

$$V(s, \zeta, r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n(s, \zeta, r).$$

Es ist leicht zu ersehen, dass  $V(s, \zeta, r) \subset M(\zeta, r)$ , also  $\dim M(\zeta, r) \geq \dim V(s, \zeta, r)$  besteht.

Es genügt also zu zeigen, dass für ein geeignetes  $s$   $\dim V(s, \zeta, r) \geq 1 - \zeta$  ist.

$V_n(s, \zeta, r)$  besteht aus  $q_{n,s,\xi}$  Intervallen der  $ns - 1$ -ten Stufe. Wenn  $i \in V_n(s, \zeta, r)$  und  $j \subset i$ ,  $j \in V_{n+1}(s, \zeta, r)$  und wenn  $i$  zur Folge  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{ns}$  gehört, dann gehört  $j$  zur Folge

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{ns}, f_1, f_2, \dots, f_s$$

und dabei ist die Anzahl der Zahlen  $r$  in der Folge  $f_1, f_2, \dots, f_s$  gleich der Zahl

$$[(n+1)s\zeta] - [ns\zeta] = s\zeta_{n,s}.$$

Es ist sofort zu sehen, dass jedes Intervall des Systems  $V_n(s, \zeta, r)$  dieselbe Anzahl  $\left(= \frac{q_{n+1,s,\zeta}}{q_{n,s,\zeta}}\right)$  der Intervalle des Systems  $V_{n+1}(s, \zeta, r)$  enthält. Diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Folgen

$$(13) \quad f_1, f_2, \dots, f_s \quad (0 \leq f_i \leq ns + i - 1)$$

welche genau  $s\zeta_{n,s}$  Ziffern  $r$  enthalten.

Dabei ist offenbar

$$s\zeta - 1 < s\zeta_{n,s} < s\zeta + 1$$

und für alle hinreichend grossen  $s$  ( $s \geq s_1 \geq n_1$ ) ist

$$(14) \quad \zeta + \frac{1}{s} \geq \zeta_{n,s} \geq \zeta - \frac{1}{s} > 0.$$

Es sei weiter  $s \geq s_1$ . Für jede Ziffer  $f_i \neq r$  haben wir in (13) wenigstens  $ns + i - 1$  Möglichkeiten.

Bei einer Festlegung der Ziffern  $r$  gilt für die Anzahl  $P$  der Folgen (13)

$$P \geq ns(ns + 1) \dots (ns + s - s\zeta_{n,s} - 1).$$

Also bekommen wir für die Anzahl  $\frac{q_{n+1,s,\zeta}}{q_{n,s,\zeta}}$  aller Folgen (13)

$$\frac{q_{n+1,s,\zeta}}{q_{n,s,\zeta}} \geq n^{s-s\zeta_{n,s}} \cdot s^{s-s\zeta_{n,s}}.$$

Nach (14) ist also

$$\frac{q_{n+1,s,\zeta}}{q_{n,s,\zeta}} \geq n^{s(1-\zeta)-1} \cdot s^{s(1-\zeta)-1}.$$

Da jetzt

$$q_{n+1,s,\zeta} = \left( \prod_{i=1}^n \frac{q_{i+1,s,\zeta}}{q_{i,s,\zeta}} \right) q_{1,s,\zeta},$$

bekommen wir derart

$$q_{n+1,s,\zeta} \geq s^{ns(1-\zeta)-n} \cdot (n!)^{s(1-\zeta)-1}.$$

Ersetzen wir jedes Intervall des Systems  $V_n(s, \zeta, r)$  durch seine abgeschlossene Hülle, so bekommen wir ein neues System  $V'_n(s, \zeta, r)$ .

Auf die Menge  $V'(s, \zeta, r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V'_n(s, \zeta, r)$  kann man jetzt den Satz von EGGLESTON anwenden. Für  $0 < \alpha < 1 - \zeta$  und für hinreichend grosse  $s$  bekommen wir jetzt mit Bezeichnung des Satzes von EGGLESTON

$$g_{n+1} = q_{n+1,s,\zeta}, \quad \lambda_n = \frac{1}{(ns)!},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{1}{g_{n+1} \lambda_{n+1}^{\alpha}} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (ns+1) \dots (ns+s) \frac{[(n+1)s]!^{\alpha}}{s^{ns(1-\zeta)-n} \cdot (n!)^{s(1-\zeta)-1}} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{s-1} + \sum_{n=s}^{\infty} \exp \{ (\alpha s - s(1-\zeta) + 1) n \log(n+1) + O(n) \} < +\infty, \end{aligned}$$

da  $\alpha - (1 - \zeta) = -\delta$ ,  $\delta > 0$  und für ein hinreichend grosses  $s$ ,  $s\delta > -1$  ist.



Also konvergiert die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{1}{g_{n+1} \cdot \lambda_{n+1}^a}$$

für ein so gewähltes  $s$  und nach dem Satz von EGGLESTON gilt

$$\dim V'(s, \zeta, r) = \dim V(s, \zeta, r) \geq 1 - \zeta.$$

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Es sei  $r$  eine nichtnegative ganze Zahl und  $0 < \eta \leq 1$ .

Mit  $M_1^*(\eta, r) = M_1^*$  bezeichnen wir die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \eta$ .

Mit  $M_2^*(\eta, r) = M_2^*$  bezeichnen wir die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für die  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \eta$ .

Mit  $M_3^*(\eta, r) = M_3^*$  bezeichnen wir die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für die  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \eta$ .

Mit  $M_4^*(\eta, r) = M_4^*$  bezeichnen wir die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für die die Folge  $\left\{ \frac{N_n(r, x)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  den Häufungswert  $\eta$  hat.

Es gilt offenbar

$$M_1^*(\eta, r) \subset M_j^*(\eta, r) \quad (j = 2, 3, 4); \quad M_l^* \subset M_4^* \quad (l = 1, 2, 3).$$

**Satz 6.** Für  $0 < \zeta < 1$  setzen wir

$$S(\zeta, r) = \bigcup_{\eta \geq \zeta} M_4^*(\eta, r).$$

Es sei  $Q(\zeta, r)$  eine Menge mit

$$(15) \quad M_1^*(\zeta, r) \subset Q(\zeta, r) \subset S(\zeta, r),$$

Dann gilt:  $\dim Q(\zeta, r) = 1 - \zeta$ .

**Beweis.** a) Für jedes  $\zeta'$ ,  $0 < \zeta' < \zeta$  ist

$$Q(\zeta, r) \subset S(\zeta, r) \subset M(\zeta', r).$$

Tatsächlich hat für jedes  $x \in S(\zeta, r)$ , die Ungleichheit  $\frac{N_n(r, x)}{n} > \zeta'$  unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$ .

Also ist

$$\dim S(\zeta, r) \leq 1 - \zeta'$$

für jedes  $\zeta'$ ,  $0 < \zeta' < \zeta$  und so ist

$$\dim Q(\zeta, r) \leq \dim S(\zeta, r) \leq 1 - \zeta.$$

b) Im Beweis des Satzes 5 (siehe den Teil b) dieses Beweises) wurde gezeigt, dass  $\dim V(s, \zeta, r) \geq 1 - \zeta$  (für ein geeignetes  $s$ ), dabei kann man sofort ersehen, dass  $V(s, \zeta, r) \subset M_1^*(\zeta, r)$ , also nach (15)

$$1 - \zeta \leq \dim V(s, \zeta, r) \leq \dim M_1^*(\zeta, r) \leq \dim R(\zeta, r) \leq \dim S(\zeta, r).$$

Dies zusammen mit a) gibt die Behauptung des Satzes.

**Folgerung.** Für  $0 < \zeta < 1$  ist

$$\dim M_j^*(\zeta, r) = 1 - \zeta \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Das bekommen wir aus den Beziehungen

$$M_1^*(\zeta, r) \subset M_j^*(\zeta, r) \subset S(\zeta, r) \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

und aus dem vorhergehenden Satz.

#### § 4. Dimensionen der Mengen

$$M_1(\zeta, r), M_2(\zeta', r).$$

Der folgende Satz gibt eine Antwort auf die Fragen, welche in (D) gesetzt wurden.

**Satz 7.** a) Es sei  $\xi > 0$  und es bedeute  $P(\xi, r)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für die die Ungleichheit

$$N_n(r, x) > \xi \log n$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat.

Behauptung:

$$\dim P(\xi, r) = 1.$$

b) Es sei  $0 < \tau$ . Es bedeute  $P'(\tau, r)$  die Menge aller jener  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , für welche die Ungleichheit

$$(16) \quad N_n(r, x) < \tau \log n$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen  $n$  hat.

Behauptung:

$$\dim P'(\tau, r) = 1.$$

**Beweis.** a) Es sei  $0 < \eta < 1$ . Dann ist  $M(\eta, r) \subset P(\xi, r)$ . Tatsächlich, wenn  $x \in M(\eta, r)$ , dann ist für unendlich viele  $n$   $N_n(r, x) > \eta n$  und da für alle hinreichend grosse  $n$   $\eta n > \xi \log n$  ist, folgt daraus, dass für unendlich viele  $n$

$$N_n(r, x) > \xi \log n$$

ist.

Also ist  $\dim P(\xi, r) \geq \dim M(\eta, r) = 1 - \eta$ ,

$$\dim P(\xi, r) \geq \lim_{\eta \rightarrow 0+} (1 - \eta) = 1, \quad \dim P(\xi, r) = 1.$$

b) Es ist leicht zu ersehen, dass  $M(\{r\}) \subset P'(\tau, r)$  ist. Tatsächlich, wenn  $x \in M(\{r\})$ , dann ist für jedes  $n$

$$N_n(r, x) = 0$$

und die Ungleichheit (16) gilt für jedes  $n > 1$ .

Also besteht

$$\dim P'(\tau, r) \geq \dim M(\{r\}) = 1, \quad \dim P'(\tau, r) = 1.$$

**Folgerung.**  $\dim M_1(\zeta, r) = \dim M_2(\zeta', r) = 1.$

Es genügt, wenn  $\xi = 1 + \zeta, \tau = 1 - \zeta'$  gesetzt wird.

(Eingegangen: 10. März, 1960.)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] PERRON, O.: *Irrationalzahlen*. Berlin—Leipzig, 1921.
- [2] RÉNYI, A.: „A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításában.” *Matematikai Lapok* **7** (1956), 77—100.
- [3] ERDŐS, P. — RÉNYI, A.: “Some further statistical properties of the digits in Cantor’s series.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 21—29.
- [4] VOLKMANN, B.: “Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind, III.” *Mathematische Zeitschrift* **59** (1953) 258—270.
- [5] VOLKMANN, B.: “Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind, I.” *Mathematische Zeitschrift* **58** (1953) 284—287.
- [6] ŠALÁT, T.: „O мере Хаусдорфа линейных множеств.” *Čechosl. matem. Žurnal*. **11** (1961) 24—56.
- [7] EGGLESTON, H. G.: “Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory.” *Proc. Lond. Math. Soc.* **54** Ser. 2, 1—2, 42—93.
- [8] OSTMANN, H. H.: *Additive Zahlentheorie, I*. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.

### РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В РЯДЫ КАНТОРА И МЕРА ХАУСДОРФА

T. ŠALÁT

#### Резюме

Работа занимается определением размерности Хаусдорфа некоторых числовых множеств, которые могут характеризоваться некоторыми ограничениями относительно цифр, фигурирующих в ряду Кантора их элементов. Основные результаты:

А) Рассмотрим разложение числа  $x \in (0, 1)$ , в ряд Кантора по последовательности  $q_1, q_2, \dots (q_n \geq 2)$ , т. е. разложение  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1, q_2 \dots q_k}$ , где  $\varepsilon_k(x)$  может иметь значение  $0, 1, \dots, q_k - 1$ . Предположим, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 \dots q_n)^\varepsilon}$  сходится при любом  $\varepsilon > 0$ . Размерность Хаусдорфа множества образованного числами  $x$  в разложении которых ни одна из цифр не



больше соответствующей цифры разложения Кантора некоторого фиксированного числа  $x_0$ , равна

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{k=1}^n (1 + \varepsilon_k(x_0))}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

В) В случае разложения Кантора по последовательности  $q_k = k + 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) («факториальная система чисел») числа, среди цифр которых не фигурирует ни одного элемента фиксированного множества  $R$ , образуют множество размерности 1, если  $R$  конечно. В общем случае, если  $R$  бесконечно дается оценка размерности Хаусдорфа множества, о котором идет речь.

С) Если в случае  $q_k = k + 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) обозначить через  $N_n(r, x)$  частота цифры  $r$  среди первых  $n$  цифр разложения числа  $x \in (0, 1)$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} \geq \zeta$  выполняется на множестве размерности  $1 - \zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ).

Д) Применяя результаты В, и С, решая проблему, поставленную А, и В, А. РЕ́НУ́И, доказывается, что для каждой  $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{\log n} > 1 + \varepsilon \quad \text{соотв.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(r, x)}{\log n} < 1 - \varepsilon$$

выполняется на множестве размерности 1. (По теореме А. РЕ́НУ́И мера Лебега этих множеств равна 0.)



# ABSCHÄTZUNG DER FORTPFLANZUNG DER UNGENAUIGKEIT DER DATEN IN DIE LÖSUNG BEI LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN UND MATRIZENGLEICHUNGEN

von

WERNER DÜCK

Bei den in der Praxis auftretenden linearen Gleichungssystemen sind die Daten der Aufgabe meist mit Ungenauigkeiten behaftet. Die Frage nach der Abschätzung der Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten in die Lösung des Systems ist sehr wichtig aber bis zum heutigen Tage noch nicht befriedigend beantwortet worden. Die folgende Arbeit soll ein kleiner Beitrag zu diesem Fragenkreis sein. Es werden einige Abschätzungsformeln zusammengestellt und lineare Gleichungssysteme und Matrizenungleichungen behandelt. Für Gleichungssysteme mit stark überwiegender Hauptdiagonale lassen sich die Abschätzungsformeln sehr leicht anwenden. Für allgemeine Gleichungssysteme wird die Abschätzung mit Hilfe des Defekts durchgeführt, wozu außerdem noch eine Abschätzung für die Inverse benötigt wird, die in verschiedener Weise erfolgen kann. Parallel zu den Betrachtungen über lineare Gleichungssysteme laufen die Untersuchungen über Matrizenungleichungen. Die ermittelten Abschätzungsformeln werden auf Beispiele angewandt. Auf die Ergebnisse der Literatur wird am Ende der Arbeit kurz eingegangen.

Mein verehrter Lehrer, Herr Professor Dr.-Ing. habil E. WEINEL, Jena, hat in seinen Vorlesungen wiederholt auf diesen Problemkreis hingewiesen. Für die vielen wertvollen Anregungen möchte ich Herrn Professor WEINEL an dieser Stelle herzlichst danken.

## § 1. Abschätzung der Fehlerfortpflanzung bei linearen Gleichungssystemen mit überwiegender Hauptdiagonale

1.1. *Problemstellung.* In der Praxis wird man immer wieder vor die Aufgabe gestellt, ein lineares Gleichungssystem der Form

$$(1) \quad (\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - (\mathbf{c} + \delta \mathbf{c}) = 0$$

zu lösen, bei dem die Matrix  $\mathbf{C}$  und der Spaltenvektor  $\mathbf{c}$  als zahlenmäßig gegeben anzusehen sind, während für die Elemente  $\delta c_{ij}$  bzw.  $\delta c_i$  der Fehlermatrix  $\delta \mathbf{C}$  bzw. des Fehlervektors  $\delta \mathbf{c}$  nur Schranken für ihre Beträge bekannt sind. Bezeichnen wir diese Schranken mit  $\Delta c_{ij}$  bzw.  $\Delta c_i$ , so gilt

$$(2) \quad |\delta c_{ij}| \leq \Delta c_{ij}, \quad |\delta c_i| \leq \Delta c_i.$$

Numerisch kann man nur das System

$$(3) \quad \mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{c} = 0$$



lösen, dessen Matrix  $\mathbf{C}$  als nicht singulär vorausgesetzt wird. Mit  $\mathbf{x}$  wird die exakte Lösung dieser Gleichung bezeichnet. Es soll die Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten in die Lösung abgeschätzt werden, d. h. es ist der Einfluß der Fehlerglieder  $\delta \mathbf{C}$  und  $\delta \mathbf{c}$ , also  $\delta \mathbf{x}$  abzuschätzen.

Wir wollen voraussetzen, daß die Störung  $\delta \mathbf{C}$  des Systems (1) so klein ist, daß wenn die Matrix  $\mathbf{C}$  stark überwiegende Hauptdiagonalelemente besitzt, dieses auch von der Matrix  $\mathbf{C} + \delta \mathbf{C}$  behauptet werden kann. Dann erscheint es angebracht, das System (1) auf iterierfähige Form

$$(4) \quad \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + (\mathbf{a} + \delta \mathbf{a})$$

zu bringen, wobei numerisch wieder nur das System

$$(5) \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

gelöst werden kann. Wir haben die Gewinnung der Gleichung (4) jetzt näher zu verfolgen, um Abschätzungen für die Fehlerglieder  $\delta \mathbf{A}$ ,  $\delta \mathbf{a}$  des iterierfähigen Systems zu erhalten.

1.2. *Abschätzung der Fehlerglieder des iterierfähigen Systems.* Zur Überführung des Systems (1) in iterierfähige Form zerlegen wir die Matrix  $\mathbf{C}$  entsprechend der Gleichung

$$(6) \quad \mathbf{C} = \mathbf{D} - \mathbf{B}$$

in zwei Matrixen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$ . Dabei ist  $\mathbf{D}$  eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente mit denen der Matrix  $\mathbf{C}$  übereinstimmen. Die Matrix  $\mathbf{B}$  enthält in der Hauptdiagonale Nullen, während sonst die Elemente von  $\mathbf{B}$  entgegengesetzt gleich den entsprechenden Elementen von  $\mathbf{C}$  sind. Mit (6) können wir dann für das System (1) schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) &= (\mathbf{B} + \delta \mathbf{C}) (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + (\mathbf{c} + \delta \mathbf{c}), \\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} &= (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{C}) (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{c} + \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(7) \quad \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}, \quad \delta \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{C},$$

$$(8) \quad \mathbf{a} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{c}, \quad \delta \mathbf{a} = \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{c},$$

so stoßen wir auf das System (4).

Unter der Norm<sup>2</sup> einer  $n$ -reihigen, quadratischen Matrix  $\mathbf{C}$  mit den Elementen  $c_{ij}$  wollen wir in dieser Arbeit die maximalen Zeilensumme der Beträge der Elemente verstehen:

$$\|\mathbf{C}\| = \max_i \sum_{k=1}^n |c_{ik}|.$$

Die Norm eines Spaltenvektors  $\mathbf{x}$  mit den Komponenten  $x^i$  ist durch

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x^i|$$

definiert.

<sup>2</sup> Auf andere Normdefinitionen soll hier nicht eingegangen werden.

Für die Elemente der Fehlerglieder  $\delta \mathbf{C}$ ,  $\delta \mathbf{c}$  sind Schranken entsprechend (2) bekannt. Für die Normen der Fehlerglieder gilt somit die Abschätzung

$$\|\delta \mathbf{C}\| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |\Delta c_{ik}|, \quad \|\delta \mathbf{c}\| \leq \max_i |\Delta c_i|.$$

Dann können wir auch die Normen der Fehlerglieder  $\delta \mathbf{A}$ ,  $\delta \mathbf{a}$  des Systems (4) wegen der für zwei Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  gültigen Beziehung

$$(9) \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

nach (7), (8) leicht abschätzen

$$\|\delta \mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{D}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\|,$$

$$\|\delta \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{D}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{c}\|.$$

Damit haben wir Abschätzungen für die Normen der Fehlerglieder des iterierfähigen Systems erhalten, so daß wir für die weiteren Betrachtungen von den Gleichungen (4) und (5) ausgehen können.

1.3. *Abschätzung von  $\delta \mathbf{x}$ .* Für  $\delta \mathbf{x}$  läßt sich leicht eine Abschätzung angeben. Ziehen wir Gleichung (5) von (4) ab, so finden wir

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{a},$$

$$\delta \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A} - \delta \mathbf{A})^{-1} (\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \delta \mathbf{a})^3,$$

$$(10) \quad \|\delta \mathbf{x}\| \leq \|(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \delta \mathbf{A})^{-1}\| \{ \|\mathbf{x}\| \cdot \|\delta \mathbf{A}\| + \|\delta \mathbf{a}\| \}.$$

Zur Abschätzung der Norm von  $(\mathbf{E} - \mathbf{A} - \delta \mathbf{A})^{-1}$  erinnern wir uns daran, daß bekanntlich  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  analog zur geometrischen Reihe gewöhnlicher Zahlen in eine Matrizenreihe, die sog. Neumannsche Reihe, entwickelt werden kann

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots,$$

die für  $\|\mathbf{A}\| < 1$  konvergiert. Daher gilt unter Berücksichtigung von (9)

$$(11) \quad \|(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbf{A}^i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbf{A}\|^i = \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

Wir setzen voraus, daß das vorgelegte Gleichungssystem überwiegende Hauptdiagonalelemente besitzt, also  $\|\mathbf{A}\| < 1$  ist. Wir setzen weiterhin voraus, daß die Störung  $\delta \mathbf{A}$  so klein ist, daß auch noch

$$(12) \quad \|\mathbf{A}\| + \|\delta \mathbf{A}\| < 1$$

gilt. Dann erhalten wir aus (10) unter Berücksichtigung von (11) die gesuchte Abschätzungsformel\*

$$(13) \quad \boxed{\|\delta \mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\delta \mathbf{A}\| + \|\delta \mathbf{a}\|}{1 - \|\mathbf{A}\| - \|\delta \mathbf{A}\|}}.$$

\* Mit  $\mathbf{E}$  wird die Einheitsmatrix bezeichnet.

In diese Abschätzung geht außer den Normen von  $\mathbf{A}$ ,  $\delta \mathbf{A}$ ,  $\delta \mathbf{a}$ , für die wir obere Schranken angeben können, noch die Norm der Lösung  $\mathbf{x}$  des Systems (5) ein, die wir jetzt geeignet abschätzen wollen.

1.4. *Abschätzung der Norm von  $\mathbf{x}$ .* Die Norm der Lösung  $\mathbf{x}$  können wir abschätzen, ohne daß wir eine Näherungslösung des Systems (5) kennen. Das gestattet uns, die Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten bereits vor der Lösung des numerisch zu behandelnden Systems (5) zu beurteilen. Aus (5) finden wir nämlich

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{a},$$

und mit (11) ergibt sich unter der gemachten Voraussetzung  $\|\mathbf{A}\| < 1$

$$(14) \quad \|\mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{a}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

Ist jedoch eine Näherungslösung  $\bar{\mathbf{x}}$  des Systems (5) bekannt, so können wir das zur Abschätzung der Norm von  $\mathbf{x}$  ausnutzen.  $\bar{\mathbf{x}}$  steht mit dem Defekt  $\mathbf{r}$  in der Beziehung

$$(15) \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a} - \mathbf{r}.$$

Ziehen wir (15) von Gleichung (5) ab, so finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{r}, \\ \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{r}, \\ \|\mathbf{x}\| &\leq \|\bar{\mathbf{x}}\| + \|(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{r}\|. \end{aligned}$$

Wegen (11) erhalten wir schließlich unter der Voraussetzung  $\|\mathbf{A}\| < 1$

$$(16) \quad \|\mathbf{x}\| \leq \|\bar{\mathbf{x}}\| + \frac{\|\mathbf{r}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

1.5. *Beispiel.* Die bisherigen Betrachtungen sollen auf ein Beispiel angewandt werden. Wir wählen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 200 & 40 & 20 \\ 45 & 150 & 15 \\ 10 & 10 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 340 \\ 390 \\ 330 \end{bmatrix}$$

und nehmen an, daß die Daten des linearen Gleichungssystems mit der Ungenauigkeit

$$|\delta c_{ij}| \leq 1 = \Delta c_{ij}, \quad |\delta c_i| \leq 1 = \Delta c_i$$

behaftet sind. Dann gilt

$$\|\delta \mathbf{C}\| \leq 3, \quad \|\delta \mathbf{c}\| \leq 1.$$



Es ist

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{17}{10} \\ \frac{13}{5} \\ \frac{33}{10} \end{bmatrix}$$

und

$$\|\mathbf{D}^{-1}\| = \frac{1}{100}, \quad \|\mathbf{A}\| = \frac{2}{5}, \quad \|\mathbf{a}\| = \frac{33}{10}.$$

Weiter ergibt sich

$$\|\delta \mathbf{A}\| \leq \frac{3}{100}, \quad \|\delta \mathbf{a}\| \leq \frac{1}{100}.$$

Bei der Berechnung der Matrix  $\mathbf{A}$  tritt im Beispiel kein zusätzlicher Rechnungsfehler durch Divisionen auf, so daß wir auch bei der Abschätzung der Normen der Fehlerglieder  $\delta \mathbf{A}$  und  $\delta \mathbf{a}$  einen zusätzlichen Ungenauigkeitsfaktor nicht zu berücksichtigen brauchen.

Für die Abschätzung der Norm des Lösungsvektors  $\mathbf{x}$  nach (14) finden wir

$$(17) \quad \|\mathbf{x}\| \leq \frac{3,3}{1 - 0,4} = 5,5.$$

Verwenden wir für die Abschätzung nach (16) als Näherungsvektor  $\bar{\mathbf{x}}$  mit dem zugehörigen Defekt  $\mathbf{r}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0,99 \\ 2,02 \\ 3,01 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ -0,018 \\ -0,011 \end{bmatrix},$$

so ist

$$\|\bar{\mathbf{x}}\| = 3,01, \quad \|\mathbf{r}\| = 0,018,$$

und wir finden für (16)

$$(18) \quad \|\mathbf{x}\| \leq 3,01 + \frac{0,018}{1 - 0,4} = 3,04.$$

Für die exakte Lösung würde gelten

$$(19) \quad \|\mathbf{x}\| = 3.$$

Die Abschätzung (13) ergibt bei Verwendung der Normen (17) bis (19) für  $\mathbf{x}$ :

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq \frac{5,5 \cdot 0,03 + 0,01}{1 - 0,4 - 0,03} < 0,31 \quad \text{mit (17),}$$

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq 0,178 \quad \text{mit (18),}$$

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq 0,176 \quad \text{mit (19).}$$

Alle drei Abschätzungen für  $\delta \mathbf{x}$  lassen erwarten daß der Einfluß der Ungenauigkeit der Daten der Aufgabe nicht zu vernachlässigen ist. Daher ist es auch nicht sinnvoll, die Lösung  $\mathbf{x}$  mit größerer Genauigkeit zu berechnen.

## § 2. Abschätzung der Fehlerfortpflanzung bei allgemeinen linearen Gleichungssystemen mit Hilfe des Defekts

2.1. *Problemstellung.* Während sich die Abschätzungen in § 1 auf lineare Gleichungssysteme mit stark überwiegender Hauptdiagonale beziehen, ist die in diesem Abschnitt anzugebende Abschätzung allgemein für lineare Gleichungssysteme gültig, wenn nur die Koeffizientenmatrix nicht fast singulär ist und die Störung ihrer Elemente nicht zu groß ist. Nach den Ausführungen in § 1 kann der Einfluß der Ungenauigkeit der Daten der Aufgabe selbst dann abgeschätzt werden, wenn keine Näherungslösung des Systems bekannt ist. Jetzt werden wir grundsätzlich voraussetzen müssen, daß wir eine solche Näherungslösung kennen.

Die Gleichung (1) schreiben wir in dem Folgenden in der Form

$$(20) \quad (\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{c} + \delta \mathbf{c}) = 0.$$

Mit  $\tilde{\mathbf{x}}$  bezeichnen wir eine Näherungslösung der Gleichung (3) und mit  $\mathbf{r}$  den zugehörigen Defekt

$$(21) \quad \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c} = -\mathbf{r}.$$

Gesucht wird eine Abschätzung der Norm von  $\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}$ .

2.2. *Fehlerabschätzung.* Aus den Gleichungen (20), (21) finden wir

$$(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{c} + \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) (\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) = \delta \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{c} + \mathbf{r},$$

$$(22) \quad \|\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C})^{-1}\| \{ \|\delta \mathbf{C}\| \cdot \|\bar{\mathbf{x}}\| + \|\delta \mathbf{c}\| + \|\mathbf{r}\| \}.$$

Es muß jetzt noch die Norm von  $(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C})$ , abgeschätzt werden. Es gilt

$$\mathbf{C} - \delta \mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1} \delta \mathbf{C}),$$

$$\|(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C})^{-1}\| \leq \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|(\mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1} \delta \mathbf{C})^{-1}\|.$$

Setzen wir

$$(23) \quad \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\| < 1$$

voraus, was erfüllt ist, wenn die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems nicht mit zu großen Störungen behaftet sind, und die Matrix  $\mathbf{C}$  nicht fast singulär ist, so erhalten wir bei Beachtung der Formel (11) von § 1

$$\|(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C})^{-1}\| \leq \|\mathbf{C}^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\mathbf{C}^{-1} \delta \mathbf{C}\|} \leq \frac{\|\mathbf{C}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\|}.$$

(22) führt dann zu der gesuchten Abschätzung

$$(24) \quad \boxed{\|\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{C}^{-1}\| \frac{\|\delta \mathbf{C}\| \cdot \|\bar{\mathbf{x}}\| + \|\delta \mathbf{c}\| + \|\mathbf{r}\|}{1 - \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\|}}.$$

In der Abschätzung (24) treten neben der Norm der Näherungslösung  $\bar{x}$  und des Defektenvektors  $r$  die Normen der Fehlerglieder  $\delta C$  und  $\delta c$  auf, die wir im Sinne von 1.2. als bekannt ansehen können. In (24) geht aber weiterhin die Norm der Matrix  $C^{-1}$  ein, was uns vor eine neue Aufgabe stellt, nämlich Abschätzungen für die Norm der Inversen der Matrix  $C$  anzugeben. Mit dieser Aufgabe werden wir uns in § 4 näher befassen.

Die Abschätzung (24) beantwortet zugleich die Frage, wie bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems der Einfluß der Abrundungsfehler und ihre Fortpflanzung abgeschätzt werden kann. Dazu ist die Norm der Differenz der exakten Lösung  $\hat{x}=x$  der Gleichung (3) und der Näherungslösung  $\bar{x}$  von (21) abzuschätzen. Eine solche Abschätzungsformel erhalten wir aber aus (24), wenn wir dort  $\|\delta C\| = \|\delta c\| = 0$  setzen.

### § 3. Abschätzungen bei Matrizenungleichungen

3.1. *Problemstellung.* Die Bestimmung der Inversen einer Matrix ist eine Aufgabe von großer praktischer Wichtigkeit. Sind die Koeffizienten der zu invertierenden Matrix mit Ungenauigkeiten behaftet, so wird sich diese Ungenauigkeit in die inverse Matrix fortpflanzen. Wieder besteht die Frage, wie sich diese Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten der Aufgabe abschätzen läßt.

Um die Inverse einer Matrix zu bestimmen, haben wir die Matrizenungleichung

$$(25) \quad (C - \delta C)(X + \delta X) = E$$

zu lösen. Die Matrix  $C$  ist als zahlenmäßig gegeben anzusehen, während für die Elemente  $\delta c_{ij}$  der Fehlermatrix  $\delta C$  nur Schranken für ihre Beträge im Sinne von § 1 bekannt sind. Numerisch können wir nur die Matrizenungleichung

$$(26) \quad CX = E$$

lösen, wobei mit  $X$  die exakte Lösung dieser Gleichung bezeichnet wird. Die für lineare Gleichungssysteme angegebenen Abschätzungen in § 1 und § 2 lassen sich sofort übertragen.

3.2. *Übertragung der Abschätzungen von § 1.* Die Matrix  $C$ , welche stark überwiegende Hauptdiagonalelemente besitzen möge, wird wieder entsprechend (6) in die Matrizen  $D$  und  $B$  zerlegt, und es werden die Gleichungen (25), (26) auf iterierfähige Form übergeführt

$$(27) \quad X + \delta X = (A + \delta A)(X + \delta X) + D^{-1},$$

$$(28) \quad X = AX + D^{-1}.$$

Die Matrizen  $A$  und  $\delta A$  bestimmen sich dabei aus  $D$ ,  $B$  und  $\delta C$  wie in (7) angegeben. Für die Matrix  $\delta X$  finden wir dann unter der Voraussetzung (12) die zu (13) analoge Abschätzung

$$(29) \quad \|\delta X\| \leq \frac{\|X\| \cdot \|\delta A\|}{1 - \|A\| - \|\delta A\|}.$$



In (29) tritt wieder die Norm der Lösung  $\mathbf{X}$  von Gleichung (28) auf, die wir analog zu (14) in der Form

$$(30) \quad \|\mathbf{X}\| \leq \frac{\|\mathbf{D}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}$$

abschätzen können.

Bezeichnen wir mit  $\bar{\mathbf{X}}$  eine Näherungslösung von (28) und mit  $\mathbf{R}$  die zugehörige Defektenmatrix

$$(31) \quad \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{R},$$

so finden wir die (16) entsprechende Abschätzung

$$(32) \quad \|\mathbf{X}\| \leq \|\bar{\mathbf{X}}\| + \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

3.3. *Übertragung der Abschätzung von § 2.* Die jetzt anzugebende Abschätzung wird wieder von der Voraussetzung frei sein, daß die zu invertierende Matrix stark überwiegende Hauptdiagonalelemente besitzt, dafür aber voraussetzen, daß die Matrix  $\mathbf{C}$  nicht fast singulär ist und die Störung ihrer Elemente nicht zu groß ist. An Stelle von (20), (21) betrachten wir die Matrizen-  
gleichungen

$$(33) \quad (\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{E},$$

$$(34) \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{E} - \mathbf{R}.$$

Analog zu (24) finden wir unter der Voraussetzung (23) die Abschätzung

$$(35) \quad \boxed{\|\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\| \leq \|\mathbf{C}^{-1}\| \frac{\|\delta \mathbf{C}\| \cdot \|\bar{\mathbf{X}}\| + \|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\|}}.$$

3.4. *Angabe einer weiteren Abschätzung.* Bei Matrizen-  
gleichungen läßt sich noch eine weitere Abschätzung für die Norm von  $\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}$  angeben. Ausgehend von den Gleichungen (33), (34) finden wir

$$(36) \quad (\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) (\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}) = \delta \mathbf{C}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{R}.$$

Berücksichtigen wir Gleichung (33), so können wir dafür schreiben

$$\mathbf{E} - (\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) \bar{\mathbf{X}} = \delta \mathbf{C}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{R},$$

$$(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) = (\mathbf{E} - \delta \mathbf{C}\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{R}) \bar{\mathbf{X}}^{-1}.$$

Setzen wir voraus, daß

$$(37) \quad \|\mathbf{R}\| + \|\bar{\mathbf{X}}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\| < 1$$

ist, was wir als erfüllt ansehen können, wenn die Matrix  $\mathbf{C}$  nicht fast singulär ist, die Störung  $\delta \mathbf{C}$  genügend klein ist und  $\bar{\mathbf{X}}$  eine ausreichend gute Näherungs-

matrix für die Lösung  $\mathbf{X}$  von Gleichung (26) ist, so können wir nach der bekannten Formel (11) schreiben

$$\|(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C})^{-1}\| \leq \frac{\|\bar{\mathbf{X}}\|}{1 - \|\delta \mathbf{C} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{R}\|} \leq \frac{\|\bar{\mathbf{X}}\|}{1 - \|\delta \mathbf{C}\| \cdot \|\bar{\mathbf{X}}\| - \|\mathbf{R}\|}.$$

Gleichung (36) liefert uns dann die Abschätzung

$$(38) \quad \|\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\| \leq \|\bar{\mathbf{X}}\| \frac{\|\mathbf{R}\| + \|\bar{\mathbf{X}}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\|}{1 - \|\mathbf{R}\| - \|\bar{\mathbf{X}}\| \cdot \|\delta \mathbf{C}\|}.$$

Zur Anwendung von (38) ist nur die Kenntnis einer brauchbaren Näherungsmatrix  $\bar{\mathbf{X}}$  für  $\mathbf{C}^{-1}$  und der zugehörigen Defektenmatrix  $\mathbf{R}$  bei als gegeben anzusehendem  $\|\delta \mathbf{C}\|$  notwendig.

3.5. *Vergleich der Fehlerabschätzungen.* Die Voraussetzung (23) für die Anwendbarkeit der Abschätzung (35) wird bei praktischen Aufgaben in nicht besonders ungünstig gelagerten Fälle wohl meist erfüllt sein. Dafür muß zur Anwendung von (35) eine Abschätzung für die Norm von  $\mathbf{C}^{-1}$  bekannt sein. Häufiger sind die Fälle, in denen die Voraussetzungen für die Anwendung der Abschätzungen (29) und (38) nicht oder nur mit numerisch unbrauchbaren Zahlenwerten erfüllt sind. Die Abschätzung (29), (30) nimmt insofern eine Sonderstellung gegenüber den anderen Abschätzungen ein, weil durch sie der Einfluß der Ungenauigkeiten der Daten der Aufgabe abgeschätzt werden kann, ohne daß eine Näherungslösung für die Inverse benötigt wird. Die Abschätzung (38) hat gegenüber (35) den Vorteil, daß nicht die Kenntnis der Norm der Inversen notwendig ist. Sie hat gegenüber Formel (29) den Vorteil, daß die Matrix  $\mathbf{C}$  nicht überwiegende Hauptdiagonalelemente besitzen muß.

3.6. *Beispiel.* Die Fehlerabschätzungen sollen auf ein Beispiel angewandt werden. Wir legen den Berechnungen die in 1.5. angegebene Matrix  $\mathbf{C}$  zugrunde, die mit den dort angenommenen Ungenauigkeiten behaftet sein möge. Für (30) finden wir sofort mit den in § 1 angeführten Zahlenwerten

$$\|\mathbf{X}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{100}{2 \cdot 60}} = \frac{1}{60} < 0,0167.$$

Mit diesem Wert für  $\|\mathbf{X}\|$  ergibt (29)

$$(39) \quad \|\delta \mathbf{X}\| \leq \frac{\frac{1}{60} \cdot \frac{3}{100}}{1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{100}} = \frac{1}{1140} < 0,00088.$$

Zur Anwendung von (32) benötigen wir eine Näherungsmatrix  $\bar{\mathbf{X}}$  für die Inverse  $\mathbf{C}^{-1}$ ; wir wählen

$$(40) \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{200} & -\frac{1}{1000} & -\frac{1}{1000} \\ -\frac{1}{500} & \frac{7}{1000} & -\frac{1}{1000} \\ -\frac{1}{1000} & -\frac{1}{1000} & \frac{11}{1000} \end{bmatrix}.$$

Es ist dann

$$\|\bar{\mathbf{X}}\| = \frac{13}{1000},$$

und für die zugehörige Defektenmatrix  $\mathbf{R}$  finden wir

$$\|\mathbf{R}\| = \frac{19}{10000},$$

so daß die Anwendung von (32) ergibt

$$\|\mathbf{X}\| \leq \frac{13}{1000} + \frac{\frac{19}{10000}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{97}{6000} < 0,0162.$$

(29) liefert somit

$$(41) \quad \|\delta \mathbf{X}\| \leq \frac{\frac{97}{6000} \cdot \frac{3}{100}}{1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{100}} = \frac{97}{114000} < 0,00085.$$

Formel (38) führt mit der Näherungsmatrix (40) und

$$\|\mathbf{R}\| = \frac{19}{100}^4$$

zu der Abschätzung

$$(42) \quad \|\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\| \leq \frac{\frac{13}{1000} \cdot \left( \frac{19}{100} + \frac{13}{1000} \cdot 3 \right)}{1 - \frac{19}{100} - \frac{13}{1000} \cdot 3} = \frac{2977}{771000} < 0,0039.$$

<sup>4</sup> Man beachte, daß die durch (34) definierte Defektenmatrix  $\mathbf{R}$  sich von der in (32) verwendeten Matrix  $\mathbf{R}$  unterscheidet, welche durch (31) erklärt wird. Man erhält die Matrix  $\mathbf{R}$  aus (31) aus der durch (34) definierten Defektenmatrix, indem man diese linksseitig mit  $\mathbf{D}^{-1}$  multipliziert.



Wenden wir zum Vergleich Abschätzung (35) für die Näherungsmatrix (40) mit dem exakten Wert für die Norm von  $\mathbf{C}^{-1}$

$$(43) \quad \|\mathbf{C}^{-1}\| = \frac{617}{55500} < 0,0112$$

an, so finden wir

$$(44) \quad \|\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\| \leq 0,0112 \cdot \frac{3 \cdot \frac{13}{1000} + \frac{19}{100}}{1 - 0,0112 \cdot 3} < 0,0027.$$

Im Beispiel haben die Abschätzungen (39), (41) zu numerisch gleichwertigen Resultaten geführt. Die Kleinheit der erhaltenen Zahlwerte darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Abschätzungen (39), (41) sehr ungünstig sind; denn die Zahlwerte der Elemente der Matrix  $\mathbf{C}^{-1}$  sind, wie (43) zeigt, ebenfalls sehr klein. Entsprechende Resultate liefern die Abschätzungen (42) und (44), die auch den starken Einfluß der Ungenauigkeit der Daten zeigen.

#### § 4. Abschätzungen für die Norm der Inversen

4.1. *Einleitende Bemerkungen.* In den Abschätzungen (24) und (35) von § 2 und § 3 tritt die Norm der Inversen der Matrix  $\mathbf{C}$  auf. Da die Inverse nicht bekannt ist, müssen Abschätzungen für ihre Norm gesucht werden. Besitzt die Matrix  $\mathbf{C}$  stark überwiegende Hauptdiagonalelemente, so wird die Abschätzung sehr einfach zu führen sein. Weitere Abschätzungen werden unter der Voraussetzung angegeben, daß eine Näherungsmatrix für die Inverse bekannt ist. Schließlich wird ein Vorgehen erläutert, das unmittelbar die Entnahme der Größenordnung der Norm der Inversen aus einem Eliminationsverfahren gestattet.

4.2. *Eine Abschätzung für Matrizen mit überwiegender Hauptdiagonale.* Besitzt die Matrix  $\mathbf{C}$  stark überwiegende Hauptdiagonalelemente, so zerlegen wir sie entsprechend (6) in die Matrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  und erhalten

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}(\mathbf{E} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}).$$

Dafür können wir wegen (7)

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}(\mathbf{E} - \mathbf{A})$$

schreiben. Es ergibt sich somit

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\mathbf{D}^{-1}\| \cdot \|(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\|,$$

und setzen wir voraus, daß  $\|\mathbf{A}\| < 1$  ist, was der Annahme einer stark überwiegenden Hauptdiagonale entspricht, so finden wir bei Berücksichtigung der bekannten Formel (11):

$$(45) \quad \boxed{\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathbf{D}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}}.$$

4.3. *Abschätzungen mit Hilfe des Iterationsverfahrens von Schulz.* Die folgenden Abschätzungen setzen die Kenntnis einer Näherungsmatrix für die Inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  voraus. Haben wir nach Aufgabenstellung die Inversion einer Matrix durchzuführen, so wird uns auch meist eine Näherungsmatrix für die Inverse bekannt sein. Anders ist es jedoch, wenn wir die Lösung eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen haben. Hier bedeutet diese Voraussetzung eine Erschwerung des Problems, da wir dann faktisch nicht die Lösung eines Gleichungssystems sondern eine Matrizeninversion durchzuführen haben. Das müssen wir aber in Kauf nehmen, da bei linearen Gleichungssystemen die Abschätzung (24) faktisch die einzige Abschätzungsformel ist, mit deren Anwendbarkeit wir im allgemeinen immer rechnen können.

Für die Bestimmung der Inversen einer Matrix, d. h. für die Lösung der Matrixgleichung

$$(46) \quad \mathbf{CX} = \mathbf{E},$$

hat SCHULZ [1] ein Iterationsverfahren angegeben

$$(47) \quad \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n(2\mathbf{E} - \mathbf{CX}_n),$$

für das der Verfasser [2] Fehlerabschätzungen bewiesen hat. Ist eine Näherungsmatrix  $\bar{\mathbf{X}}$  für  $\mathbf{C}^{-1}$  bekannt, so können wir sie als Ausgangsmatrix für das Iterationsverfahren von SCHULZ wählen:  $\mathbf{X}_0 = \bar{\mathbf{X}}$ . Nach (47) berechnen wir die Matrix  $\mathbf{X}_1$ . In [2] sind Abschätzungen für die Norm von  $\mathbf{X} - \mathbf{X}_1$  angegeben:

$$(48) \quad \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\| \leq \frac{q}{1-q} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\|,$$

$$(49) \quad \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\| \leq \frac{q^2}{1-q} \|\mathbf{X}_0\|.$$

Dabei gilt

$$(50) \quad q = \|\mathbf{E} - \mathbf{CX}_0\|,$$

und es wird der Zahlwert von  $q$  unmittelbar durch das Verfahren geliefert. Die Abschätzungen (48) und (49) sind unter der Voraussetzung  $q < 1$  gültig. Zum Vergleich der Abschätzungen (48), (49) sei auf [2] verwiesen.

Wegen (46) ist  $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}$ , und wir erhalten für (48), (49):

$$(51) \quad \boxed{\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\mathbf{X}_1\| + \frac{q}{1-q} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\|}$$

$$(52) \quad \boxed{\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\mathbf{X}_1\| + \frac{q^2}{1-q} \|\mathbf{X}_0\|}.$$

Zu einer noch einfacheren Abschätzung kommen wir, wenn wir die Norm von  $\mathbf{X}_1$  in (52) abschätzen. Wegen (47) ist

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0(\mathbf{E} - \mathbf{CX}_0).$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung von (50)

$$\|\mathbf{X}_1\| \leq \|\mathbf{X}_0\| + \|\mathbf{X}_0\| \cdot \|\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{X}_0\| = \|\mathbf{X}_0\| (1 + q).$$

Tragen wir dieses Ergebnis in (52) ein, so finden wir

$$(53) \quad \boxed{\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathbf{X}_0\|}{1 - q}}.$$

Zur Anwendung der Abschätzung (53) ist es damit gar nicht mehr notwendig, daß ein Schritt des Iterationsverfahrens durchgeführt wird. Die zur Abschätzung nach (53) bei Kenntnis einer Näherungsmatrix  $\mathbf{X}_0$  wesentlich zu leistende Rechenarbeit besteht in der Ermittlung von  $q$ , wozu faktisch eine Matrizenmultiplikation auszuführen ist. Bei der Abschätzung nach (51) und (52) haben wir die erste Iterierte  $\mathbf{X}_1$  zu berechnen, wozu wesentlich zwei Matrizenmultiplikationen erforderlich sind.

Die Abschätzung (53) ist zweifellos numerisch am einfachsten, dafür aber auch schlechter als (52) und (51). Formel (51) führt zu den numerisch besten Resultaten. Welche der Abschätzungen (51) bis (53) in der Praxis Verwendung finden wird, hängt wesentlich von der Größenordnung von  $q$  ab.

Zur Abschätzung (53) können wir auch leicht auf einem anderen Wege gelangen. Nach (38) läßt sich ja die Norm der Differenz zwischen der Lösung  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}$  der Gleichung (46) und der Näherungslösung  $\bar{\mathbf{X}}$  dieser Gleichung abschätzen, indem in (38)  $\|\delta \mathbf{C}\| = 0$  gesetzt wird. Wir finden dann

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\bar{\mathbf{X}}\| + \frac{\|\mathbf{R}\| \cdot \|\bar{\mathbf{X}}\|}{1 - \|\mathbf{R}\|} = \frac{\|\bar{\mathbf{X}}\|}{1 - \|\mathbf{R}\|}.$$

Beachten wir, daß oben  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0$  gesetzt wurde und daß wegen (50) und der Definitionsgleichung (34) für die Defektenmatrix  $q = \|\mathbf{R}\|$  ist, so erkennen wir, daß die erhaltene Abschätzung mit (53) identisch ist. In derselben Weise kann ausgehend von (35) Abschätzung (53) erhalten werden.

4.4. *Beispiel.* Wir wollen die erhaltenen Fehlerabschätzungen auf die Mustermatrix  $\mathbf{C}$  von § 1 anwenden. Die Abschätzung nach (45) ist trivial. Zur Anwendung der Fehlerformeln von 4.3. benötigen wir eine Ausgangsmatrix für das Iterationsverfahren. Als Ausgangsmatrix  $\mathbf{X}_0$  wählen wir die Matrix (40) von § 3. Dann ist

$$\|\mathbf{X}_0\| = \frac{13}{1000}, \quad q = \|\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{X}_0\| = \frac{19}{100},$$

und durch Berechnung von  $\mathbf{X}_1$  nach (47) lassen sich leicht die Werte

$$\|\mathbf{X}_1\| = \frac{11}{1000}, \quad \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\| = \frac{11}{10000}$$

bestätigen.



Die Ergebnisse der Fehlerabschätzungen (45) und (51) bis (53) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt und mit dem exakten Wert von  $\|\mathbf{C}^{-1}\|$  verglichen worden. In der Tabelle stehen außerdem neben diesen Werten die Resultate der Abschätzungen von  $\|\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\|$  nach (24) für das Beispiel von § 1 und von  $\|\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\|$  nach (35) mit den jeweiligen Schranken für die Norm von  $\mathbf{C}^{-1}$ . Zum Vergleich sind in der Tabelle schließlich noch die bereits früher in § 1 und § 3 ermittelten Abschätzungen von  $\|\delta \mathbf{x}\|$  und  $\|\delta \mathbf{X}\|$  sowie die Abschätzung von  $\|\tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\|$  nach (38) angeführt worden.

	Abschätzung von $\ \mathbf{C}^{-1}\ $	Abschätzung von $\ \tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\ $ bzw. $\ \delta \mathbf{x}\ $	Abschätzung von $\ \tilde{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}\ $ bzw. $\ \delta \mathbf{X}\ $
exakt	0,0112	0,117	0,0027
nach (45)	0,0167	0,177	0,0041
nach (51)	0,0113	0,118	0,0027
nach (52)	0,0116	0,121	0,0028
nach (53)	0,0161	0,170	0,0039
nach (38)		—	0,0039
nach (13), (14) bzw. (29), (30)		0,31	0,00088
nach (13), (16) bzw. (29), (32)		0,178	0,00085
nach (13) bzw. (29); $\ \mathbf{x}\ $ , $\ \mathbf{X}\ $ exakt		0,176	0,00059

4.5. *Vorgehen bei Verwendung eines Eliminationsverfahrens.* So bestehend auch die Abschätzungen in 4.3. sind, so bedeutet doch die Voraussetzung, daß eine Näherungsmatrix für die Inverse bekannt sein muß, oft eine wesentliche Erschwerung der Aufgabe. Dieser Nachteil haftet der Abschätzung (45) nicht an, dafür setzt sie aber eine stark überwiegende Hauptdiagonale voraus. In den Fällen, in denen die Hauptdiagonale nicht stark überwiegt, werden wir jedoch häufig das Gleichungssystem nach einem Eliminationsverfahren lösen oder die Matrizeninversion mit Hilfe eines Eliminationsverfahrens durchführen. Besonders günstig gestalten sich die Verhältnisse beim GAUSS—JORDANSchen Verfahren, bei dem die Ausgangsmatrix auf Diagonalform transformiert wird. In diesem Falle kann die Größenordnung der Norm von  $\mathbf{C}^{-1}$  mit praktisch meist ausreichender Genauigkeit unmittelbar aus dem Verfahren entnommen werden. Zur Erläuterung dieses Vorgehens soll das Verfahren von GAUSS—JORDAN kurz skizziert werden. Das Verfahren konstruiert eine Matrix  $\mathbf{C}^{(n)}$ <sup>5</sup> nach der Vorschrift

$$(54) \quad \mathbf{C}^{(n)} = \mathbf{Q}^{(n)} \mathbf{Q}^{(n-1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}^{(1)} \mathbf{C}.$$

Dabei sind die Matrizen  $\mathbf{Q}^{(j)}$  durch die Quotienten  $q_i^{(j)}$  des Verfahrens bestimmt, welche bekanntlich so gewählt werden, daß die Matrix  $\mathbf{C}$  auf Diagonalform

<sup>5</sup> Mit  $n$  wird die Ordnung der Matrix  $\mathbf{C}$  bezeichnet.

transformiert wird, also  $\mathbf{C}^{(n)}$  eine Diagonalmatrix ist. Die Matrizen  $\mathbf{Q}^{(i)}$  besitzen folgende Gestalt:

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ q_2^{(1)} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_n^{(1)} & & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & q_1^{(2)} & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & q_3^{(2)} & \ddots & \\ 0 & q_n^{(2)} & & 1 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{Q}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & & & q_1^{(n)} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & q_{n-1}^{(n)} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Aus (54) finden wir nun sofort

$$(55) \quad \|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\mathbf{Q}^{(n)}\| \cdot \|\mathbf{Q}^{(n-1)}\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{Q}^{(1)}\| \cdot \|(\mathbf{C}^{(n)})^{-1}\|.$$

$\mathbf{C}^{(n)}$  ist die durch das Verfahren gelieferte Diagonalmatrix, die Norm ihrer Inversen also leicht zu berechnen. Auch die Norm der Quotientenmatrizen  $\mathbf{Q}^{(i)}$  kann unmittelbar aus dem Verfahren entnommen werden. Schreiben wir

$$\bar{q}_j = \max_i |q_i^{(j)}|,$$

so können wir für (55), wenn wir unter der Norm einer Matrix wie verabredet die Zeilensummennorm verstehen, wegen der angegebenen Gestalt der  $\mathbf{Q}^{(i)}$  die Darstellung

$$(56) \quad \|\mathbf{C}^{-1}\| \leq (1 + \bar{q}_n)(1 + \bar{q}_{n-1}) \cdot \dots \cdot (1 + \bar{q}_1) \cdot \|(\mathbf{C}^{(n)})^{-1}\|$$

geben. Das Verfahren liefert also unmittelbar eine Abschätzung für die Norm der Inversen  $\mathbf{C}^{-1}$ , allerdings ohne Berücksichtigung der bei der Durchführung des Verfahrens auftretenden Rundungsfehler und ihrer Fortpflanzung, was zunächst paradox erscheinen mag. Aber häufig wird für Überschlagsrechnungen die durch (56) gelieferte Abschätzung ausreichen. Auch können die Rechnungen mit einigen Schutzstellen durchgeführt werden, um eine größere Sicherheit gegen das Häufen der Rundungsfehler zu haben.

Wenden wir auf die in § 1 angegebene Matrix  $\mathbf{C}$  das Verfahren von GAUSS—JORDAN an und führen wir die Rechnungen vollkommen mit rationalen Zahlen durch, so daß keine Rundungsfehler auftreten, so erhalten wir für die Abschätzung nach (56)

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| < 0,0188.$$

Das geschilderte Vorgehen läßt sich auch beim Verfahren von GAUSS anwenden, bei dem die Matrix  $\mathbf{C}$  auf Dreiecksform transformiert wird. Die Matrizen  $\mathbf{Q}^{(1)}, \dots, \mathbf{Q}^{(n-1)}$  sind hier untere Dreiecksmatrizen. Unmittelbar gelangen wir so zu einer Abschätzung für  $\|\mathbf{C}^{-1}\|$ , die zu (56) analog ist. Erschwerend ist hier nur, daß die Norm der Inversen der durch das Verfahren gelieferten Dreiecksmatrix  $\mathbf{C}^{(n-1)}$  bestimmt werden muß.

## § 5. Vergleich mit den Ergebnissen der Literatur

Dem in dieser Arbeit behandelten Problemkreis ist in der numerischen Mathematik stets große Aufmerksamkeit geschenkt worden. Die Ermittlung nicht zu mühsamer und nicht zu grober Abschätzungen für diesen Fragenkomplex wird auch weiterhin im Interesse der Anwendung liegen. So werden z. B. in [3] Angaben gemacht, wie ein Anhaltspunkt für die bei der Lösung



eines linearen Gleichungssystems auftretenden Abrundungsfehler und ihre Fortpflanzung aus den Defekten erhalten werden kann. Das kann für viele praktische Fälle oft ausreichen, auch wenn es sich dabei nicht um eine exakte Fehlerabschätzung handelt. Eine exakte Fehlerabschätzung hat WITTMAYER [4] bereits 1936 angegeben. Die Abschätzung wurde von COLLATZ [5] modifiziert und verbessert. Es ist wichtig, die Ergebnisse der Überlegungen von COLLATZ kurz zu skizzieren. In der bis jetzt benutzten Bezeichnungsweise schätzt COLLATZ die Differenz der Lösungen der Gleichungen (20), (21) ab und beweist die Formel

$$(57) \quad |\tilde{x} - \bar{x}| \leq \frac{|\bar{\mathbf{C}}| \cdot |\bar{x}| + |\delta \mathbf{c}| + |\mathbf{r}|}{|\mathbf{C}| - |\bar{\mathbf{C}}|},$$

die gültig ist, sobald der Nenner positiv ist. Dabei wird für einen Vektor  $z$  mit den Komponenten  $z^i$  der Betrag  $|z|$  durch die Gleichung

$$|z| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z^i|^2}$$

definiert. Das entspricht aber gerade der Quadratsummennorm<sup>6</sup> für den Vektor  $z$ . In (57) tritt weiterhin der obere Betrag  $|\bar{\mathbf{C}}|$  und der untere Betrag  $|\mathbf{C}|$  einer Matrix  $\mathbf{C}$  auf, wobei für eine beliebige Matrix  $\mathbf{C}$  und einen beliebigen Vektor  $z$  die Ungleichung

$$|\mathbf{C}| \cdot |z| \leq |\mathbf{C}z| \leq |\bar{\mathbf{C}}| \cdot |z|$$

besteht. Der obere Betrag der Matrix  $\mathbf{C}$  kann durch die im Sinne der Quadratsummennorm gebildete Norm der Matrix  $\mathbf{C}$  nach oben abgeschätzt werden. Das Hauptproblem bei der Formel (57) ist also die Bestimmung des unteren Betrags der Matrix  $\mathbf{C}$ . Mit dieser Frage befaßt sich die Arbeit von BARTSCH [7], in welcher der Sonderfall einer positiv definiten hermiteschen Matrix untersucht wird; in diesem Falle ist  $|\mathbf{C}|$  die kleinste und  $|\bar{\mathbf{C}}|$  die größte charakteristische Zahl der Matrix  $\mathbf{C}$ . Die Arbeit von BARTSCH erscheint in unserem Zusammenhang als eine Ergänzung zu den angeführten Überlegungen. Ein unterer Betrag einer Matrix  $\mathbf{C}$  kann aber auch leicht mit Hilfe der Norm der inversen Matrix angegeben werden. Es ist ja

$$\|z\| = \|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}z\| \leq \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{C}z\|$$

und damit

$$(58) \quad \frac{\|z\|}{\|\mathbf{C}^{-1}\|} \leq \|\mathbf{C}z\|.$$

Verstehen wir (58) im Sinne der Quadratsummennorm, so haben wir für die Abschätzung (57) von COLLATZ in  $1/\|\mathbf{C}^{-1}\|$  einen unteren Betrag für die Matrix  $\mathbf{C}$  gefunden. Setzen wir diesen Wert für  $|\mathbf{C}|$  in (57) ein, so erhalten wir sofort die Abschätzung (24), welche nur auf Quadratsummennorm zu beziehen ist. Damit ist ein Übergang von (57) zu (24) hergestellt.

In diesem Zusammenhang sei auch auf eine Arbeit des Verfassers [8] verwiesen, in der bereits über einige der erörterten Probleme kurz berichtet wurde.

(Eingegangen: 15. März, 1960.)

<sup>6</sup> Zur Erklärung dieser Begriffe vergleiche man etwa [6].



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SCHULZ, G.: »Iterative Berechnung der reziproken Matrix.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **13** (1933) 57—59.
- [2] DÜCK, W.: »Fehlerabschätzungen für das Iterationsverfahren von Schulz zur Bestimmung der Inversen einer Matrix.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **40** (1960) 192—194.
- [3] COLLATZ, L.: *Numerische und graphische Methoden. Handbuch der Physik, Bd. II.* Springer-Verlag, 1955, S. 388.
- [4] WITTMAYER, H.: »Einfluß der Änderung einer Matrix auf die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems, sowie auf die charakteristischen Zahlen und die Eigenvektoren.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **16** (1936) 287—300.
- [5] COLLATZ, L.: »Zur Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **34** (1954) 71—72.
- [6] COLLATZ, L.: »Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **4** (1953) 327—357.
- [7] BARTSCH, H.: »Abschätzungen für die kleinste charakteristische Zahl einer positiv-definiten hermiteschen Matrix.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **34** (1954) 72—74.
- [8] DÜCK, W.: »Zur Abschätzung der Fortpflanzung der Datenfehler bei linearen Gleichungssystemen nach der Formel von Wittmeyer—Collatz.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **41** (1961).

ОЦЕНКА НЕУСТРАНИМОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ  
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

W. DÜCK

## Резюме

Пусть дана система линейных уравнений вида

$$x = Ax + a$$

Обозначим через  $\delta A$  погрешность матрицы  $A$ , а через  $\delta a$  погрешность вектора  $a$ . Если

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| < 1, \text{ более того } \|A\| + \|\delta A\| < 1,$$

то для неустраимой погрешности  $\delta x$  решения  $x$  имеет место оценка

$$\|\delta x\| = \max_i |\delta x_i| \leq \frac{\|x\| \|\delta A\| + \|\delta a\|}{1 - \|A\| - \|\delta A\|}.$$

Если  $x$  не известно, то его можно оценить с помощью неравенства

$$\|x\| \leq \frac{\|a\|}{1 - \|A\|}$$

а если известно приближенное решение  $\bar{x}$ , то с помощью неравенства

$$\|x\| \leq \|\bar{x}\| + \frac{\|r\|}{1 - \|A\|},$$

где

$$r = A\bar{x} + a - \bar{x}.$$

Пусть далее дана линейная система уравнений вида

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

погрешность матрицы  $\mathbf{C}$  есть  $\delta \mathbf{C}$ , а вектора  $\mathbf{a}$   $\delta \mathbf{a}$ . Пусть  $\tilde{\mathbf{x}}$  есть решение уравнения

$$(\mathbf{C} - \delta \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{c} + \delta \mathbf{c})$$

$\mathbf{r}$  обозначает разность

$$\mathbf{c} - \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}$$

где  $\bar{\mathbf{x}}$  известное приближенное решение уравнения  $\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{c}$ . Для оценки неустранимой погрешности решения получается уравнение

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{C}^{-1}\| \frac{\|\delta \mathbf{C}\| \|\bar{\mathbf{x}}\| + \|\delta \mathbf{c}\| + \|\mathbf{r}\|}{1 - \|\mathbf{C}^{-1}\| \|\delta \mathbf{C}\|},$$

если

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| \|\delta \mathbf{C}\| < 1.$$

Если известно приближенное значение  $\mathbf{X}_0$  матрицы, обратной матрице  $\mathbf{C}$ , то преобразуя итерационный метод SCHULZ-a [1] и оценку погрешности автора [2], при обозначениях

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 (2\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{X}_0)$$

и

$$q = \|\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{X}_0\|,$$

получаем

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\mathbf{X}_1\| + \frac{q}{1-q} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\|,$$

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \|\mathbf{X}_1\| + \frac{q^2}{1-q} \|\mathbf{X}_0\|$$

и

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathbf{X}_0\|}{1-q},$$

так что приведенное выше неравенство для оценки  $\|\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\|$  можно практически использовать.

Аналогичные оценки получаются в § 3 для матричного уравнения

$$\mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{E}.$$

§ 4 занимается оценкой нормы обратной матрицы.

§ 5 сравнивает полученные результаты с полученными ранее.

## AN EXTENSION OF KOLMOGOROV'S FUNDAMENTAL THEOREM TO CONDITIONAL PROBABILITY SPACES

by

JÓZSEF PERGEL

KOLMOGOROV's existence theorem regarding stochastic processes [1] (also called KOLMOGOROV's fundamental theorem), could not be extended yet to conditional probability spaces (See [2] and [3]) because a conditional probability space defined on a Cartesian product can not be projected onto one of the factors of this product in the usual way. In this paper we define the so called "conditional projection" of a conditional probability space, and with its aid we formulate and prove a theorem corresponding to KOLMOGOROV's theorem and generalising it.

To make the idea clear we sketch first the following special case: if there is given on the plane a conditional probability space, for which the rectangles with sides parallel to the axes of the coordinate-system are conditions, we can define its conditional projection to the axis  $X$  in the following way: let  $(a, b)$  be an interval on the axis  $Y$ . If  $(c, d)$  is an interval on the axis  $X$  then the rectangle  $(c, d) \times (a, b)$  determines, as a condition a probability distribution. Let us project this distribution onto the axis  $X$ , and call it the probability distribution belonging to the interval  $(c, d)$  as to a condition. We can easily prove, that we get so a conditional probability distribution, for which the intervals are conditions. We call this conditional probability space the conditional projection with respect to the interval  $(a, b)$  as a condition of the conditional probability space on the plane.

Let us notice, that if the conditional probability space on the plane is the direct product of two conditional probability spaces [2], then its conditional projection to the axis  $X$  concerning every condition on the axis  $Y$  is the conditional probability space originally given on the axis  $X$ , and conversely. This shows, that conditional projection is a generalization of the ordinary projection.

We want to treat infinite dimensional products of conditional probability spaces if the factors are not independent. The case of independence is treated in [2]. First we have to define the projection of a conditional probability space on a product space onto one of the factors of this space. Evidently we may suppose that the space is the product of two sets.

Let  $(X_1, S_1)$  and  $(X_2, S_2)$  be two measurable spaces, that is  $S_1$  and  $S_2$  be  $\sigma$ -rings, so that  $\cup S_1 = X_1$  and  $\cup S_2 = X_2$ . Let  $(X, S) = (X_1 \times X_2, S_1 \times S_2)$ . If there is given a conditional probability space on  $X$  with the  $\sigma$ -ring  $S$ , and with the set  $T$  of conditions, and the sets of  $T$  are of the form  $A \times B$ ,  $A \in S_1$ ,  $B \in S_2$  then we may define conditions on  $X_1$  as the class of all sets  $A \subset X_1$ , for which there is an appropriate set  $B \subset X_2$ , so that  $A \times B \in T$ . Let us denote



this class by  $T_1$ , and define  $T_2$  in a similar way. Let us suppose, that for every  $A \in T_1$  and  $B \in T_2$ ,  $A \times B \in T$ . Evidently  $T_1 \subset S_1$  and  $T_2 \subset S_2$ .

Denote the conditional probability space on  $X$  by  $[X, S, T, \mathbf{P}(A|B)]$ . We can define the conditional projection of this conditional probability space as follows: For  $B_1 \in T_1$  and  $B_2 \in T_2$  let us project the probability space defined by  $B_1 \times B_2$  and  $[X, S, T, \mathbf{P}(A|B)]$  on  $X$  onto  $X_1$ . For fixed  $B_2$  we get so a class of probability spaces, which together with  $S_1$  and  $T_1$  form a conditional probability space. We call this conditional probability space "the conditional projection of the conditional probability space  $[X, S, T, \mathbf{P}(A|B)]$  onto  $X_1$  with respect to  $B_2$ ".

Let  $X_A$  be a product of locally compact topological spaces  $X_\lambda$  ( $\lambda \in A$ ) ( $X_A = \times_{\lambda \in A} X_\lambda$ ). Let us denote by  $S_\lambda$  the  $\sigma$ -ring of the Borel-sets on  $X_\lambda$ . Let us be given for every  $\lambda \in A$  a subset of  $S_\lambda$ , say  $T_\lambda$ , the "set of conditions".

Let us suppose that on  $X_A = \times_{\lambda \in A} X_\lambda$  there is given a conditional probability space, where the corresponding  $\sigma$ -ring is  $\times_{\lambda \in A} S_\lambda$ , and the conditions are the sets of the form  $\times_{\lambda \in A} B_\lambda$ ,  $B_\lambda \in T_\lambda$ . Let us consider the finite dimensional conditional projections of this conditional probability space. For every finite  $A_1 \subset A$  there exists such a conditional projection on  $\times_{\lambda \in A_1} X_\lambda = X_{A_1}$ , which then gives for every  $\times_{\lambda \in A-A_1} B_\lambda$ ,  $B_\lambda \in T_\lambda$  a conditional probability space on  $X_{A_1}$ . Let us denote it by  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A-A_1)$ , or briefly by  $F_{A_1, B_\lambda}$ .

**Lemma.** *The conditional distributions  $F_{A_1, B_\lambda}$  have the following property :*

(\*) *If  $A_2 \subset A_1$ , and there is given a class of sets,  $\{B_\lambda, \lambda \in A-A_2, B_\lambda \in T_\lambda\}$ , then the conditional distribution  $F(A_2, B_\lambda, \lambda \in A-A_2)$  is a conditional projection of  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A-A_1)$  with respect to the condition  $\times_{\lambda \in A_1-A_2} B_\lambda$ .*

**Proof.** Let us complete the class  $\{B_\lambda, \lambda \in A-A_2, B_\lambda \in T_\lambda\}$  to a class  $\{B_\lambda, \lambda \in A, B_\lambda \in T_\lambda\}$ . Let us consider the probability distribution, determined on  $X_A$  by the condition  $\times_{\lambda \in A} B_\lambda$ . The projections of this distribution on  $X_{A_2}$  and on  $X_{A_1}$  are probability distributions, and the first is the projection of the second. If we vary  $B_\lambda$  for  $\lambda \in A_i$   $i = 1, 2$ , we get a conditional probability distribution on  $X_{A_i}$ . By the definition of the conditional projection we can easily see, that the lemma is true.

**Theorem.** *Let be given the conditional probability distributions  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A-A_1)$  having the property (\*). Then there exists on  $X_A$  an unambiguously determined conditional probability distribution  $F$ , finite dimensional conditional projections of which are the given  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A-A_1)$  conditional distributions.*

**Proof.** Let us fix for every  $\lambda \in A$  the sets  $B_\lambda \in T_\lambda$ . For every finite  $A_1 \subset A$  the conditional probability distribution  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A-A_1)$ , and the condition  $\times_{\lambda \in A_1} B_\lambda$  determines on  $X_{A_1}$  a probability distribution. These probability

distributions satisfy (for fixed  $B_\lambda (\lambda \in A)$ ) the suppositions, figuring in KOLMOGOROV's theorem, so we get a probability distribution, belonging to  $\times_{\lambda \in A} B_\lambda$ . We must now show, that 1) these probability distributions form a conditional probability distribution, and 2) the conditional projections of this conditional probability distribution are the conditional probability distributions,  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A-A_1)$ . To show 1), let us denote the set function of the

probability distribution, corresponding to the set  $\times_{\lambda \in A} B_\lambda = B$  by  $\mathbf{P}(\cdot | B)$ . Then we must show, that if  $A \in S$ ,  $B, C, B \cap C \in T$ , then  $\mathbf{P}(A | B \cap C) \mathbf{P}(B | C) = \mathbf{P}(A \cap B | C)$ . If  $\mathbf{P}(B | C) = 0$ , this is trivially true.

Let us suppose, that  $\mathbf{P}(B | C) > 0$ . Then  $\frac{\mathbf{P}(A \cup B | C)}{\mathbf{P}(B | C)}$  is a probability function with respect to  $A$  on  $X$ . Let us denote by  $\mathbf{P}_{A_1}(\cdot | B)$  the set function of the probability distribution, corresponding to the conditional probability distribution  $F(A_1, B_\lambda, \lambda \in A - A_1)$ , and the condition  $\times_{\lambda \in A_1} B_\lambda$ . Let us denote by  $B_{A_1}, C_{A_1}$  etc. the projections of the sets  $B, C$  etc. on  $X_{A_1}$ . Then as  $B, C, B \cap C \in T$ , we have  $(B \cap C)_{A_1} = B_{A_1} \cap C_{A_1}$  and  $B_{A_1}, C_{A_1}, B_{A_1} \cap C_{A_1} \in T_{A_1}$ . By the definition of conditional probability space, if  $\mathbf{P}_{A_1}(B_{A_1} | C) > 0$ ,  $\mathbf{P}_{A_1}(A | B \cap C) = \frac{\mathbf{P}_{A_1}(A \cap B_{A_1} | C)}{\mathbf{P}_{A_1}(B_{A_1} | C)}$ . But  $\mathbf{P}_{A_1}(A | B \cap C)$  is the set function of projection of the probability space, determined on  $X$  by the set function  $\mathbf{P}(A | B \cap C)$  and  $\frac{\mathbf{P}_{A_1}(A \cap B_{A_1} | C)}{\mathbf{P}_{A_1}(B_{A_1} | C)}$  is the same for  $\frac{\mathbf{P}(A \cap B | C)}{\mathbf{P}(B | C)}$ . So every projection of the probability space determined by the set function  $\mathbf{P}(A | B \cap C)$  is equal to the projection to the same space of the probability space, determined by the set function  $\frac{\mathbf{P}(A \cap B | C)}{\mathbf{P}(B | C)}$ . So the two functions must be equal.

The statement 2) follows immediately from the construction.

(Received August 13, 1959.; in revised form March 16, 1960.)

#### REFERENCES

- [1] KOLMOGOROFF, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933.
- [2] RÉNYI, A.: „A valószínűség-számítás új axiómatikus felépítése.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 369—426.
- [3] RÉNYI, A.: „On a new axiomatic theory of probability”, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*

#### РАСШИРЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ КОЛМОГОРОВА НА УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

J. PERGEL

#### Резюме

Автор определяет условную проекцию условного вероятностного пространства, заданного на декартовом произведении множеств и доказывает теорему, соответствующую фундаментальной теореме Колмогорова, касающейся существования вероятностных процессов.





# SUR UN PROCÉDÉ D'APPROXIMATION AVEC DES CONDITIONS AUX LIMITES

par

MELANIE SALLAY

Soit  $\mathcal{C}$  la classe des fonctions  $g(x)$  continues dans l'intervalle  $[0, 1]$  et satisfaisant aux conditions

$$(1) \quad a_i g(0) + b_i g(1) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Désignons par  $\mathcal{C}_2$  la classe des fonctions admettant une seconde dérivée continue et appartenant à la classe  $\mathcal{C}$ . De plus soit  $H$  une transformation linéaire définie sur  $g \in \mathcal{C}$  qui transforme la classe  $\mathcal{C}$  dans l'espace de Banach  $B$  de telle manière, que

$$\|Hg\|_B \leq \alpha \|g\| \quad (g \in \mathcal{C})$$

$$\|Hg\|_B \leq \beta \|g''\| \quad (g \in \mathcal{C}_2).$$

Dans son travail [1] M. G. FREUD a démontré que pour tous les  $v \geq 1$   $v$  entier)

$$\|Hg\|_B \leq (\alpha + 8\beta v^2) \omega_2(g; v^{-1})$$

où

$$\omega_2(g, \delta) = \max_{h \leq \delta} |g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)|.$$

Dans notre ouvrage nous examinerons le problème précédant au cas où les fonctions  $g(x)$  sont dérivables aux extrémités de l'intervalle  $[0, 1]$  et  $g(x)$  satisfait au lieu de (1) aux conditions ci-dessous:

$$(2) \quad a_i g(0) + b_i g(1) + c_i g'(0) + d_i g'(1) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Précisément nous démontrerons le théorème suivant:

**Théorème.** Soit  $\mathcal{C}^*$  la classe des fonctions pour lesquelles

a)  $g(x)$  est continue dans l'intervalle  $[0, 1]$  et dérivable aux extrémités de l'intervalle,

b)  $g(x)$  satisfait aux conditions (2).

La transformation linéaire  $H$  applique  $\mathcal{C}^*$  dans l'espace de Banach  $B$  de telle manière, que

$$\|Hg\|_B \leq \alpha \|g\| \quad (g \in \mathcal{C}^*)$$

(3)

$$\|Hg\|_B \leq \beta \|g''\| \quad (g \in \mathcal{C}_2).$$

Alors pour tous les  $\nu \geq 1$  ( $\nu$  entier)

$$(4) \quad \|Hg\|_B \leq (5\alpha + 32\beta\nu^2)\omega_2(g_1\nu^{-1}) + (2\alpha + 20\beta\nu^2)\frac{1}{\nu}\max_{i=0,1}|\delta^{(i)}|,$$

où

$$\delta^{(0)} = 2\nu \left[ g\left(\frac{1}{2\nu}\right) - g(0) \right] - g'(0)$$

$$\delta^{(1)} = 2\nu \left[ g(1) - g\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) \right] - g'(1).$$

**Remarques.** 1) Si dans (2)  $c_i \equiv d_i \equiv 0$ , les conditions concernant la dérivée de la fonction  $g(x)$  n'existent pas, ainsi  $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$ . Dans ce cas notre théorème est une généralisation du théorème de M. G. FREUD.

2) Si nous choisissons pour  $H$  une série de transformations linéaires  $\{H_\nu\}$ , notre théorème est plus intéressant au cas où dans les conditions (3)  $\alpha$  est borné et  $\beta$  est au plus d'ordre  $O(\nu^{-2})$ .

Soit par exemple  $H = \{E - A_n f\}$ , — où  $\{A_n\}$  est une série de transformations linéaires transformant la classe  $\mathcal{O}^*$  à la classe des polynômes de la forme  $\sum_{k=0}^n C_k \cos 2k\pi$  et  $E$  est la transformation identique, — et qui satisfait aux conditions:

$$\|E - A_n f\| \leq \alpha \|f\| \quad \text{pour } f \in \mathcal{O}^*$$

$$\|E - A_n f\| \leq \beta n^{-2} \|f''\| \quad \text{pour } f \in \mathcal{O}_2^*.$$

Si nous supposons, que  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$  d'après notre théorème nous pouvons facilement constater que  $\|Hf\| = O(n^{-\alpha})$ . De plus, si  $f(x)$  est dérivable et  $f'(x) \in \text{Lip } \alpha$  il en résulte que  $\|Hf\| = O(n^{-(1+\alpha)})$ .

**Démonstration du théorème.** Divisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $4\nu$  parties égales et déterminons les fonctions

$$g_\nu(x) \text{ et } p_\nu(x)$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} & 1) \text{ Soit } g_\nu(x) \text{ l'arc de la parabole qui passe par les points } \left[ \frac{k}{2\nu}; g\left(\frac{k}{2\nu}\right) \right]; \\ & \left[ \frac{k+1}{2\nu}; g\left(\frac{k+1}{2\nu}\right) \right] \quad k = 1, \dots, 2\nu, \text{ et dont les tangentes sont les droites passant} \\ & \text{par les points } \left[ \frac{k}{2\nu}; g\left(\frac{k}{2\nu}\right) \right]; \left[ \frac{2k+1}{4\nu}; g\left(\frac{2k+1}{4\nu}\right) \right] \text{ resp. } \left[ \frac{2k+1}{4\nu}; g\left(\frac{2k+1}{4\nu}\right) \right]; \\ & \left[ \frac{k+1}{2\nu}; g\left(\frac{k+1}{2\nu}\right) \right]. \end{aligned}$$

2) De plus soit

$$p_v(x) = \begin{cases} p_v^{(0)}(x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2v} \\ g_v(x) & \frac{1}{2v} < x < 1 - \frac{1}{2v} \\ p_v^{(1)}(x) & 1 - \frac{1}{2v} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

où  $p_v^{(0)}(x)$  et  $p_v^{(1)}(x)$  sont les arcs de la parabole du troisième ordre pour lesquels

$$p_v^{(0)}(0) = g(0) \qquad p_v^{(0)'}(0) = g'(0)$$

$$p_v^{(0)}\left(\frac{1}{2v}\right) = g\left(\frac{1}{2v}\right) \qquad p_v^{(0)'}\left(\frac{1}{2v}\right) = g'_v\left(\frac{1}{2v}\right)$$

resp.

$$p_v^{(1)}(1) = g(1) \qquad p_v^{(1)'}(1) = g'(1)$$

$$p_v^{(1)}\left(1 - \frac{1}{2v}\right) = g\left(1 - \frac{1}{2v}\right) \qquad p_v^{(1)'}\left(1 - \frac{1}{2v}\right) = g'_v\left(1 - \frac{1}{2v}\right).$$

Nous démontrerons tout d'abord que

$$(4) \qquad |g_v(x) - p_v(x)| \leq 4 \omega_2(g(x); v^{-1}) + \frac{2}{v} \max_{i=0,1} |\delta^{(i)}|.$$

Soient

$$\Delta_2^{(0)} = g(0) - 2g\left(\frac{1}{4v}\right) + g\left(\frac{1}{2v}\right)$$

$$\Delta_2^{(1)} = g(1) - 2g\left(1 - \frac{1}{4v}\right) + g\left(1 - \frac{1}{2v}\right).$$

Les calculs faites, nous pouvons déterminer les fonctions  $g_v(x)$  et  $p_v(x)$  sous la forme

$$(5) \quad g_v(x) = \begin{cases} 4v^2 x^2 \Delta_2^{(0)} + 4v \left[ g\left(\frac{1}{4v}\right) - g(0) \right] x + g(0); & 0 \leq x \leq \frac{1}{2v} \\ 4v^2 \left(x - \frac{k}{2v}\right)^2 \Delta_2^{(k)} + 4v \left(x - \frac{k}{2v}\right) \left[ g\left(\frac{2k+1}{4v}\right) - g\left(\frac{k}{2v}\right) \right] + \\ \qquad + g\left(\frac{k}{2v}\right); & \frac{k}{2v} \leq x \leq \frac{k+1}{2v} \\ [4v^2(x-1)^2 + 4v(x-1)] \Delta_2^{(1)} + 4v \left[ g\left(\frac{4v-1}{4v}\right) - g\left(\frac{2v-1}{2v}\right) \right] (x-1) + \\ \qquad + g(1); & 1 - \frac{1}{2v} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



$$(6) \quad p_v^{(0)}(x) = \Delta_2^{(0)}(8\nu^3 x^3 - 4\nu^2 x^2) + \delta^{(0)}(-4\nu^2 x^3 + 4\nu x^2) + \\ + g'(0)x + g(0)$$

$$(7) \quad p_v^{(1)}(x) = \Delta_2^{(1)}[-8\nu^3(x-1)^3 - 4\nu^2(x-1)] + \delta^{(1)}[-4\nu^2(x-1)^3 - 4\nu(x-1)^2] + \\ + g'(1)(x-1) + g(1).$$

D'après (5) et (6) nous obtenons:

$$|g_v(x) - p_v^{(0)}(x)| \leq |\Delta_2^{(0)}| - 8\nu^3 x^3 + 8\nu^2 x^2 - 2\nu x| + \\ + |\delta^{(0)}| - 4\nu^2 x^3 + 4\nu x^2 + x| \leq 4|\Delta_2^{(0)}| + \frac{2}{\nu}|\delta^{(0)}|, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2\nu}.$$

Par analogie d'après (5) et (7)

$$|g_v(x) - p_v^{(1)}(x)| \leq 4|\Delta_2^{(1)}| + \frac{2}{\nu}|\delta^{(1)}|, \quad 1 - \frac{1}{2\nu} \leq x \leq 1.$$

En considérant que  $\max_{i=0,1} |\Delta_2^{(i)}| \leq \omega_2(g; \nu^{-1})$ , à l'aide des estimations précédentes nous obtenons (4).

D'après (5), (6) et (7) pour  $|p_v''(x)|$  l'estimation suivante est valable:

$$(8) \quad |p_v''(x)| \leq 32\nu^2 \omega_2(g, \nu^{-1}) + 20\nu \max_{i=0,1} |\delta^{(i)}|.$$

L'idée suivante de la démonstration analogiquement à [1] sera:

En considérant que  $p_v(0) = g(0)$ ;  $p_v(1) = g(1)$ ;  $p_v'(0) = g'(0)$  et  $p_v'(1) = g'(1)$ ,  $p_v(x) \in \mathcal{C}^*$ .

Il en résulte que pour tout les  $\varepsilon > 0$  nous pouvons choisir une fonction  $\gamma_v \in \mathcal{C}_2$  pour laquelle

$$|p_v - \gamma_v| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |\gamma_v''| \leq |p_v''| + \varepsilon.$$

D'après (3)

$$\|Hg\|_B \leq \|H(g - g_v)\|_B + \|H(g_v - p_v)\|_B + \|H(p_v - \gamma_v)\|_B + \\ + \|H\gamma_v\|_B \leq \alpha(|g - g_v| + |g_v - p_v| + |p_v - \gamma_v|) + \beta|\gamma_v''|.$$

Étant donné que  $|g_v(x) - g(x)| \leq \omega_2(g_1, \nu^{-1})$  (voir [1]), en appliquant les formules (4) et (8) nous obtenons

$$\|Hg\|_B \leq \alpha[5\omega_2(g, \nu^{-1}) + \frac{2}{\nu} \max_{i=0,1} |\delta^{(i)}|] + \beta\nu^2[32\omega_2(g, \nu^{-1}) + \\ + \frac{20}{\nu} \max_{i=0,1} |\delta^{(i)}|] + (\alpha + 1)\varepsilon,$$

ce qui établit notre théorème pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(Reçu le 4 juin 1960.)

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] FREUD, G.: «Sui procedimenti lineari d'approssimazione». *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei. (Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.)* seri VIII. **26** (1959) 5, 641—643.
- [2] JACKSON, D.: *The theory of approximation*. American Math. Soc. Coll. Publ. XI., 1930.

## ОДНА АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

M. SALLAY

## Резюме

В работе доказывается следующая теорема:

Обозначим через  $\mathcal{C}^*$  класс функций, непрерывных на отрезке  $[0, 1]$ , дифференцируемых на его концах и удовлетворяющих условиям (2). Пусть  $H$  есть определенное на  $\mathcal{C}^*$  линейное преобразование, удовлетворяющее условиям (3) и отображающее класс функций  $\mathcal{C}^*$  на Банахово пространство  $B$ . Тогда имеет место соотношение

$$\|Hg\|_B \leq (5\alpha + 32\beta v^2)\omega_2(g; v^{-1}) + (2\alpha + 20\beta v^2) \frac{1}{v} \max_{i=0,1} |\delta^{(i)}|.$$





## ÜBER POSITIVE ZYGMUNDSCHES APPROXIMATIONSFOLGEN

von

GÉZA FREUD

Es sei  $f(x)$  eine stetige, nach  $2\pi$  periodische Funktion. Als Stetigkeitsmodul zweiter Ordnung von  $f$  definieren wir den Ausdruck

$$(1) \quad \omega_2(f; \delta) = \max_{\substack{|h| \leq \delta \\ x \in [0, 2\pi)}} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|.$$

Nach einem bekannten Satze der Approximationstheorie kann man für jedes  $f$  eine Folge  $\{T_n\}$  trigonometrischer Polynome konstruieren, wobei  $T_n$  höchstens  $n$ -ter Ordnung ist, so dass für jedes  $x$  und  $n$  mit einer von  $x$ ,  $n$  und  $f$  unabhängigen Konstanten  $B$

$$|f(x) - T_n(x)| \leq B \omega_2(n^{-1})$$

besteht. Es ist sogar möglich, die Approximationspolynome in der Form  $T_n(x) = A_n\{f; x\}$  zu wählen, wobei  $A_n$  einen linearen Operator bedeutet, welcher den Raum  $C_{2\pi}$  der stetigen, nach  $2\pi$  periodischen Funktionen in den Raum der trigonometrischen Polynome höchstens  $n$ -ter Ordnung transformiert. Folgen  $\{A_n\}$  von linearen Transformationen dieser Art, welche also für jedes  $f \in C_{2\pi}$

$$(2) \quad |A_n\{f; x\} - f(x)| \leq B \omega_2(n^{-1})$$

befriedigen, nennen wir Zygmundsche Approximationsfolgen. In einer unlängst erschienenen Note<sup>1</sup> zeigte der Verfasser, dass eine Folge  $\{A_n\}$  linearer Transformationen dann und nur dann eine Zygmundsche Approximationsfolge darstellt, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) Für jedes  $f \in C_{2\pi}$  gilt mit einer von  $x$ ,  $n$  und  $f$  unabhängigen Zahl  $C_1$

$$(3) \quad |A_n\{f; x\}| \leq C_1 \max_x |f(x)|,$$

b) Für jedes zweimal stetig differenzierbares nach  $2\pi$  periodische  $g(x)$  ist

$$(4) \quad |A_n(g; x) - g(x)| \leq C_2 n^{-2} \max_x |g''(x)|$$

<sup>1</sup> G. FREUD: „Sui procedimenti lineari d'approssimazione.“ *Rendiconti d'Accademia Nazionale dei Lincei* VIII **26** (1959) 641–643.

wobei die Konstante  $C_2$  weder von  $x$  und  $n$ , noch von der Wahl von  $g(x)$  abhängt.

In vorliegender Arbeit untersuchen wir den Fall, in welchem die Transformationen  $A_n$  positiv sind, d. h.

$$(5) \quad A_n\{f(t); x\} \geq 0 \quad x \in [0, 2\pi) \quad \text{falls} \quad f(t) \geq 0 \quad t \in [0, 2\pi).$$

Nennen wir eine Folge  $\{A_n\}$  eine Jacksonsche Approximationsfolge, falls für jedes  $f$

$$|A_n\{f; x\} - f(x)| \leq B' \omega(f; \delta)$$

mit

$$\omega(f; \delta) = \max_{\substack{|h| \leq \delta \\ x \in [0, 2\pi)}} |f(x+h) - f(x)|$$

besteht, dann ist nach P. P. KOROVKIN<sup>2</sup> folgender Satz gültig:

Eine Folge positiver linearer Transformationen stellt dann und nur dann eine Jacksonsche Approximationsfolge dar, wenn es die konstanten Funktionen für jedes  $n$  identisch darstellt und die Funktion  $g_\xi(t) = \sin^2 \frac{t-\xi}{2}$  in  $\xi$  gleichmässig in der Grössenordnung  $O(n^{-2})$  approximiert. In vorliegender Arbeit wollen wir ein analoges Resultat für positive Zygmundsche Approximationsfolgen angeben:

**Satz I.** Der Operator  $A$  transformiere  $C_{2\pi}$  in  $C_{2\pi}$  und es sei linear, positiv translationsinvariant und symmetrisch, d. h.

$$(6.a) \quad A\{\alpha f + \beta g; x\} = \alpha A\{f; x\} + \beta A\{g; x\}$$

$$(6.b) \quad A\{g; x\} \geq 0 \quad \text{für} \quad g(t) \geq 0$$

$$(6.c) \quad A\{f(t); \xi\} = A\{f(t+\xi); 0\}$$

und

$$(6.d) \quad A\{f(-t); 0\} = A\{f(t); 0\}$$

ferner sei

$$(7) \quad A\{1; 0\} = 1.$$

Dann besteht für jedes  $f \in C_{2\pi}$  und jedes  $\eta > 0$  die Ungleichung

$$(8) \quad |A\{f(t); \xi\} - f(\xi)| \leq \frac{1}{2} \omega_2(\eta) + 20 \eta^{-2} \omega_2(\eta) \cdot A\left\{\sin^2 \frac{t}{2}; 0\right\}.$$

Aus diesem Satze folgt sofort die folgende Variante des Korovkinschen Satzes:

**Satz II.** Es sei  $\{A_n\}$  eine Folge linearer, positiver translationsinvarianter und symmetrischer Operatoren, so dass  $A_n$  den Raum  $C_{2\pi}$  in trigonometrische Polynome höchstens  $n$ -ter Ordnung transformiert; die notwendige und hinreichende

<sup>2</sup> П. П. Коровкин: *Линейные операторы и теория приближений*. Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва, 1959.

chende Bedingung, dass  $\{A_n\}$  eine Zygmundsche Approximationsfolge darstellt, besteht darin, dass

$$(9) \quad A_n\{1; x\} \equiv 1$$

und

$$(10) \quad \left| A_n \left\{ \sin^2 \frac{t}{2}; 0 \right\} \right| < C n^{-2}$$

( $C$  unabhängig von  $n$ ) befriedigt ist.

Dass diese Bedingungen hinreichen, folgt aus (8) und (10), indem man  $A = A_n$  und  $\eta = n^{-1}$  setzt. Die Notwendigkeit der Bedingungen (9) und (10) ist klar.

**Beweis des Satzes I.** Infolge (6.c) und 6.d) ist

$$A\{f(t); \xi\} = A\{f(t + \xi), 0\} = A\{f(-t + \xi); 0\}$$

und somit wegen (7):

$$A\{f(t); \xi\} - f(\xi) = \frac{1}{2} A\{f(\xi + t) - 2f(\xi) + f(\xi - t); 0\}.$$

Aus der Definition von  $\omega_2(\delta)$  und aus der bekannten Ungleichung

$$\omega_2(\vartheta\delta) \leq 4\vartheta^2 \omega_2(\delta) \quad \text{für } \vartheta > 1$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} |f(\xi + t) - 2f(\xi) + f(\xi - t)| &\leq \omega_2(|t|) \leq \begin{cases} \omega_2(\eta) & \text{für } |t| \leq \eta \\ 4t^2 \eta^{-2} \omega_2(\eta) & \text{für } |t| > \eta \end{cases} \\ &\leq \omega_2(\eta) + 4t^2 \eta^{-2} \omega_2(\eta) \leq \omega_2(\eta) + 40 \eta^{-2} \omega_2(\eta) \sin^2 \frac{t}{2} \in C_{2\pi}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt infolge (6.b) und (7)

$$\begin{aligned} |A\{f(t); \xi\} - f(\xi)| &\leq \frac{1}{2} A\{|f(\xi + t) - 2f(\xi) + f(\xi - t)|\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \omega_2(\eta) + 20 \eta^{-2} \omega_2(\eta) A\left\{\sin^2 \frac{t}{2}; 0\right\} \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Nach einem klassischen Satze von F. RIESZ ist

$$A_n\{f; 0\} = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) d\psi_n(t),$$

mit einem  $\psi_n(t)$  von beschränkter Schwankung; da

$$A_n\{f; x\} = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x) d\psi_n(t)$$



für jedes  $f$  ein trigonometrisches Polynom höchstens  $n$ -ter Ordnung ist, ist es  $\psi_n(t)$  ebenfalls, und infolge (6.d) ist

$$(11) \quad \psi'_n(t) = \frac{1}{2} \lambda_{0n} + \sum_{k=1}^n \lambda_{kn} \cos kt \geq 0.$$

Ist

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

die Fourierreihe von  $f$ , dann ergibt sich

$$(12) \quad A_n(f; x) = \frac{1}{2} \lambda_{0n} a_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_{kn} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

also eine Koeffiziententransformation der Fourierschen Reihe. Die Bedingungen (9) und (10) sind gleichwertig mit

$$(13) \quad \lambda_{0n} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{1n} = 1 + O(n^{-2}).$$

Hieraus ergibt sich folgende Umformulierung des Satzes II:

**Satz III.** *Eine Folge positiver Koeffiziententransformationen der Fourierschen Reihe bildet dann und nur dann eine Zygmundsche Approximationsfolge, wenn es eine Jacksonsche Approximationsfolge bildet, und dazu ist notwendig und hinreichend, dass (13) befriedigt ist.*

(Eingegangen: 6. Januar, 1960.)

## О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ТИПА ЗИГМУНДА

G. FREUD

### Резюме

Пусть  $\{A_n\}$  есть определенная на пространстве  $C_{2\pi}$   $2\pi$  — периодических непрерывных функций последовательность линейных операторов, переводящих каждую функцию  $f \in C_{2\pi}$  в тригонометрический многочлен  $\tau_n = A_n f$  не выше  $n$ -ого порядка.

Последовательность  $\{A_n\}$  называется аппроксимационным методом типа Зигмунда, если при всех  $f \in C_{2\pi}$  выполняется (2) ( $\omega_2(\delta)$  определяется формулой (1)).

**Теорема II.** Пусть элементы последовательности  $\{A_n\}$  положительны, инвариантны относительно трансляции и симметричны (см. 6б, с, d), тогда  $\{A_n\}$  в том и только в том случае образуют аппроксимационный метод типа Зигмунда, если выполняется (9) и (10).

Доказательство проводится с помощью теоремы I, согласно которой, если оператор  $A$  удовлетворяет условиям 6а, b, с, d и (7), то для всех  $f \in C_{2\pi}$  имеет место (8).

Операторы  $A_n$ , удовлетворяющие условиям теоремы II, суть суммы вида (12), образованные с помощью ряда Фурье функции  $f(x)$ ,  $\lambda_{kn}$  при всех  $t$  удовлетворяют условию (11). Это представление называется положительным преобразованием коэффициентов ряда Фурье.

Так получается следующая перефразировка теоремы II:

**Теорема III.** *Положительное преобразование коэффициентов ряда Фурье есть аппроксимационная последовательность типа Зигмунда в том и только в том случае, если выполняется (13) и (14).*

Полученные результаты аналогичны результатам П. П. Коровкина [2], относительно аппроксимационных последовательностей Джексона.





# THE GROUND STATE OF THE HYDROGEN MOLECULE ON THE BASIS OF THE RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS WITH THE AID OF THE WANG WAVE FUNCTION II.

Method for evaluation of the two-centre integrals occurring in the calculation of the retarded magnetic orbit-orbit interaction term

by

G. KARDOS and J. LADIK<sup>1</sup>

## § 1.

The method of applying BREIT's relativistic two-electron equation to the case of hydrogen molecule is given in [1], dealing with the determination of the relativistic correction energy term of kinetic energy, arising, among others, in course of computation. Others publications [2], [3] contain the evaluation of the first, non-retarded part of the magnetic orbit-orbit interaction term. The Hamiltonian of the magnetic orbit-orbit interaction term is the following:

$$(1) \quad H_2 = \frac{e^2}{2 m^2 c^2} \left[ \frac{\bar{p}_1 \bar{p}_2}{r_{12}} + \frac{\sum_{i,j=1}^3 x_{i12} x_{j12} p_{i1} p_{j2}}{r_{12}^3} \right].$$

(Here the electron's charge is denoted by  $e$ ,  $m$  is its mass,  $c$  stands for the velocity of light,  $r_{12} = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$  means the distance between the two electrons in atomic units. Further,  $\bar{p}_1 = \frac{\hbar}{i} \text{grad}_1$  resp.  $\bar{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \text{grad}_2$  is the quantum mechanical momentum operator for the first resp. the second electron,  $x_{i12}$  stands for the  $i$ -th component of vector  $\bar{r}_{12}$ , meaning the difference of the radius vectors of the two electrons, and finally,  $p_{i1}$  resp.  $p_{i2}$  is the  $i$ -th component of the momentum operator of the first resp. of the second electron.)

The present paper gives a method to determinate the two-centre integrals occurring in course of computation of the second, retarded part of operator (1).

The evaluation of the energy term arising from the retarded part of Hamilton  $H_2$  may be performed by determining the expectation value of the operator and by substituting in this expression the suitable parameter values. The expectation value in atomic units [4] is given by the integral

$$(2) \quad \bar{H}'' = - \frac{1}{2 c^2} \int \Psi^* \left( \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_{i12} x_{j12} p_{i1} p_{j2}}{r_{12}^3} \right) \Psi dV_1 dV_2,$$

<sup>1</sup> Central Research Institute for Chemistry of the Hungarian Academy of Sciences

in which  $\Psi$  is the approximate wave function of WANG [5]:

$$(3) \quad \Psi = \frac{\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} [e^{-\alpha(r_{a1}+r_{b2})} + e^{-\alpha(r_{a2}+r_{b1})}]}{\sqrt{2(1+S^2)}}.$$

Here  $r_{a1}$  and  $r_{a2}$  resp.  $r_{b1}$  and  $r_{b2}$  are the distances of electrons 1 and 2 from nucleus  $a$  resp.  $b$  (see Fig. 1),  $\alpha$  stands for a variation parameter which has

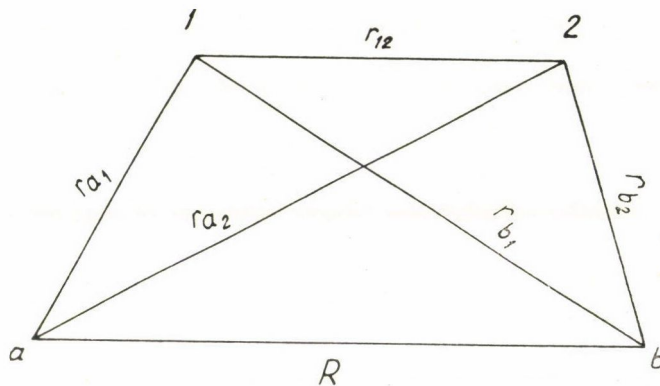


Figure 1.

given, according to WANG's non relativistic calculations, the minimal energy at the value  $\alpha = 1.17$ . Finally,

$$S^2 = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left| \int e^{-\alpha(r_{a1}+r_{b1})} dV_1 \right|^2 = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left| \int e^{-\alpha(r_{a2}+r_{b2})} dV_2 \right|^2 = e^{-2\alpha R} \left( 1 + \alpha R + \frac{\alpha^2 R^2}{3} \right)^2,$$

where  $R$  is the distance between the two nuclei [6].

Substituting into the expression (2) of the expectation value the wave function (3) and the components of the momentum operator expressed also in atomic units, then after having performed the multiplications, we get

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{H}_2'' = & \frac{\alpha^6/2 \pi^2 c^2 \int \left\{ [e^{-\alpha(r_{a1}+r_{b2})} + e^{-\alpha(r_{a2}+r_{b1})}] \frac{1}{r_{12}^3} \left[ x_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \right.}{2(1+S^2)} \\ & + y_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} + z_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + x_{12} y_{12} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial x_2} \right) + \\ & \left. \left. + x_{12} z_{12} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial x_2} \right) + \right. \right.}{2(1+S^2)} \\ & \left. \left. + y_{12} z_{12} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial y_2} \right) \right] [e^{-\alpha(r_{a1}+r_{b2})} + e^{-\alpha(r_{a2}+r_{b1})}] \right\} dV_1 dV_2}{2(1+S^2)}. \end{aligned}$$

Taking into account the symmetry of the wave function with respect to the exchange of the two electrons and considering the axial symmetry of the hydrogen molecule, relations similar to equations (16) of [2, 3] between the integrals arising from (4) can be obtained.

Using these relations and performing the differentiations in rectangular coordinate system, after a simple but little lengthy calculation, one gets for (4) the expression

$$(5) \quad \bar{H}_2'' = \frac{\alpha^8}{2\pi^2 c^2} \frac{2 \left( I_0^I + I_0^{II} + I_1^I + I_1^{II} + I_2^I + I_2^{II} + \frac{1}{2} (I_3^I + I_3^{II}) \right)}{1 + S^2},$$

where

$$(6a) \quad I_0^I = \int f(r_{a1}, r_{b2}) x_{12}^2 x_1 x_2 dV_1 dV_2,$$

$$(6b) \quad I_0^{II} = \int f(r_{a2}, r_{b1}) x_{12}^2 x_1 x_2 dV_1 dV_2,$$

$$(6c) \quad I_1^I = \int f(r_{a1}, r_{b2}) x_{12} y_{12} x_1 y_2 dV_1 dV_2,$$

$$(6d) \quad I_1^{II} = \int f(r_{a2}, r_{b1}) x_{12} y_{12} x_1 y_2 dV_1 dV_2,$$

$$(6e) \quad I_2^I = \int f(r_{a1}, r_{b2}) x_{12} z_{12} \left[ x_1 \left( z_2 - \frac{R}{2} \right) + x_2 \left( z_1 + \frac{R}{2} \right) \right] dV_1 dV_2,$$

$$(6f) \quad I_2^{II} = \int f(r_{a2}, r_{b1}) x_{12} z_{12} \left[ x_1 \left( z_2 + \frac{R}{2} \right) + x_2 \left( z_1 - \frac{R}{2} \right) \right] dV_1 dV_2,$$

$$(6g) \quad I_3^I = \int f(r_{a1}, r_{b1}) z_{12}^2 \left( z_1 + \frac{R}{2} \right) \left( z_2 - \frac{R}{2} \right) dV_1 dV_2,$$

$$(6h) \quad I_3^{II} = \int f(r_{a2}, r_{b1}) z_{12}^2 \left( z_1 - \frac{R}{2} \right) \left( z_2 + \frac{R}{2} \right) dV_1 dV_2;$$

and where

$$(7a) \quad f(r_{a1}, r_{b2}) = \frac{e^{-2a(r_{a1}+r_{b2})}}{r_{12}^3 \cdot r_{a1} \cdot r_{b2}}$$

$$(7b) \quad f(r_{a2}, r_{b1}) = \frac{e^{-a(r_{a1}+r_{a2}+r_{b2}+r_{b1})}}{r_{12}^3 \cdot r_{a2} \cdot r_{b1}}.$$

As we see  $I^I$  is the Coulomb term of the expectation value  $\bar{H}_2''$ , while  $I^{II}$  is the exchange term.

Remark: in case of benzene a rough estimation has been carried out in [7] for the spin-orbit interaction term, for an integral similar to (6) containing  $1/r_{12}^3$ , but the analytical evaluation of such integrals — as far as we know — has not yet been performed.

## § 2.

The two-centre integrals (6a)–(6h) are not expressed in an explicit form. Therefore in this paper we give a method for approximate evaluation of such integrals. As a first step, we deal with integral (6a), the further ones may be calculated in a similar way.



It is easier to handle the integral (6a) if elliptical coordinates are used. As it is well known [8],  $x_i, y_i, z_i$  can be expressed in a suitable elliptical coordinate system, in the following way:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{R}{2} \sqrt{(1 - \nu_i^2)(\mu_i^2 - 1)} \cdot \cos \varphi_i \\ y_i &= \frac{R}{2} \sqrt{(1 - \nu_i^2)(\mu_i^2 - 1)} \cdot \sin \varphi_i \\ z_i &= \frac{R}{2} \mu_i \nu_i, \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\mu_i = \frac{r_{a_i} + r_{b_i}}{R}, \quad \nu_i = \frac{r_{a_i} - r_{b_i}}{R}.$$

The function  $f(r_{a_1}, r_{b_2})$  occuring in the integrand takes now the form

$$(9) \quad f(r_{a_1}, r_{b_2}) = \frac{e^{-aR(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 - \nu_2)}}{r_{12}^3 (\mu_1 + \nu_1)(\mu_2 - \nu_2)} \frac{R^2}{4}.$$

$\frac{1}{r_{12}^3}$  occuring in function (9) can be developped into an infinite series. To this end let us substitute  $1/r_{12}$  by the following series due to F. NEUMANN [9]:

$$(10) \quad \frac{1}{r_{12}} = \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_n^j(\nu_1) P_n^j(\nu_2) \cos j(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Here  $P_n^j(\nu_i)$  means the spherical harmonic of first kind,  $Q_n^j(\mu_i)$  the spherical harmonic of second kind [10a],

$$D_n^j = \varepsilon_j (-1)^j (2n+1) \left[ \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \right]^2, \quad (\varepsilon_0 = 1; \varepsilon_j = 2, j \geq 1);$$

and  $P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)$  resp.  $Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$  stand for the equalities

$$\begin{aligned} P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) &= \begin{cases} P_n^j(\mu_1) & \text{if } \mu_1 \leq \mu_2 \\ P_n^j(\mu_2) & \text{if } \mu_1 \geq \mu_2 \end{cases} \\ Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) &= \begin{cases} Q_n^j(\mu_2) & \text{if } \mu_1 \leq \mu_2 \\ Q_n^j(\mu_1) & \text{if } \mu_1 \geq \mu_2. \end{cases} \end{aligned}$$

We tacitly suppose that the series (10) may be integrated term by term, as this is always done in quantum chemical calculations (see e. g. [10b]).

The series of  $1/r_{12}$  may be also expressed in the following form, making use of the cosine theorem [9]:

$$(11) \quad \frac{1}{r_{12}} = \frac{2}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{-2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2) - 2(\mu_1^2 \nu_1^2 + \mu_2^2 \nu_2^2) - 2\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2 - 2\sqrt{(\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)(1 - \nu_1^2)(1 - \nu_2^2)} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Again by the above used assumption<sup>1</sup> we derivate the series (10) term by term with respect to  $\varphi_1$  resp.  $\varphi_2$  and comparing the resulting expression with the one we get by derivating (11) with respect to  $\varphi_1$  resp.  $\varphi_2$  we arrive to

$$(12) \quad \frac{1}{r_{12}^3} = \frac{8}{R^3} [(\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)(1 - \nu_1^2)]^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_n^j(\nu_1) P_n^j(\nu_2) \times \\ \times j \frac{\sin j(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Putting (9) and (12) into integral (6a), we obtain the following

$$(13) \quad I_{01}^1 = \frac{R^5}{32} \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu_1 - \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)(1 - \nu_2^2)(\mu_2^2 - 1) e^{-aR(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 - \nu_2)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_n^j(\nu_1) P_n^j(\nu_2) j \frac{\sin j(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos \varphi_1 \cdot \cos^3 \varphi_2 d\tau,$$

$$(14) \quad I_{02}^1 = \frac{R^5}{32} \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu_1 - \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)(1 - \nu_1^2)(\mu_1^2 - 1) e^{-aR(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 - \nu_2)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_n^j(\nu_1) P_n^j(\nu_2) j \frac{\sin j(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot \cos^3 \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 d\tau,$$

$$(15) \quad I_{03}^1 = \frac{R^5}{32} \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu_1 - \nu_1)(\mu_2 + \nu_2) \times \\ \times \sqrt{(1 - \nu_1^2)(1 - \nu_2^2)(\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)} \cdot e^{-aR(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 - \nu_2)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j P_n^j \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_n^j \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_n^j(\nu_1) P_n^j(\nu_2) j \frac{\sin j(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_2 d\tau;$$

where

$$I_{01}^1 + I_{02}^1 + I_{03}^1 = I_0^1; d\tau = d\mu_1 d\mu_2 d\nu_1 d\nu_2 d\varphi_1 d\varphi_2.$$

<sup>1</sup> For a proof of this assumption we want to come back at another occasion.

It is easily seen, that the integrands of integrals (13)—(15) are the products of an infinite series and a function which is finite in the whole domain of integration. Again we suppose that the integrals (13)—(15) are integrable term by term and so we evaluate them. We wish to point out that our method does not contain a proof for the convergence of the series (12), it is to be hoped however that the numerical computations compared with the experimental results will justify its practicability.

By performing the integrations with respect to  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  in (13), (14) and (15) we obtain the following results:

$$(16) \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 9\pi j [1 - (-1)^j] \begin{cases} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots + \frac{(-1)^{r-1}}{j-1} \right] & \text{if } j = 2r \\ \frac{\pi}{4} & \text{if } j = 2r + 1, \quad (r \text{ is an integer}) \end{cases}$$

and for (15):

$$(17) \quad \Omega_3 = \frac{\Omega_2}{9} + 8j(-1)^{j-1} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots + \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \right].$$

Let us transform the product

$$P_n^j \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} Q_n^j \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} P_n^j(\nu_1) P_n^j(\nu_2)$$

occurring in (13) and (14) by the aid of the relation [11]:

$$P_n^j(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}} P_n^{(j)}(\mu),$$

$$Q_n^j(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}} Q_n^{(j)}(\mu).$$

Performing the productions in (13) and (14) and introducing the following notations

$$A_1 = \frac{R^5}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j \Omega_1$$

$$A_2 = \frac{R^5}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j \Omega_2,$$

we get

$$I_{01}^I = \sum_{k=0}^{15} I_{01}^{1,k}$$

and

$$I_{02}^I = \sum_{k=0}^{15} I_{01}^{1,k}$$



where

$$\begin{aligned}
 I_{01}^{1,0} &= A_1 H_n^j(1, \alpha R; 3, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,1} &= -A_1 H_n^j(1, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,2} &= -A_1 H_n^j(1, \alpha R; 3, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,3} &= -A_1 H_n^j(1, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(2; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,4} &= A_1 H_n^j(1, \alpha R; 2, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,5} &= -A_1 H_n^j(1, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,6} &= A_1 H_n^j(1, \alpha R; 2, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(3; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,7} &= -A_1 H_n^j(1, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(3; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,8} &= -A_1 H_n^j(0, \alpha R; 3, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,9} &= A_1 H_n^j(0, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,10} &= A_1 H_n^j(0, \alpha R; 3, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(3; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,11} &= A_1 H_n^j(0, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(3; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,12} &= -A_1 H_n^j(0, \alpha R; 2, \alpha R) H_n^j(1; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,13} &= A_1 H_n^j(0, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,14} &= A_1 H_n^j(0, \alpha R; 2, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(3; -\alpha R) \\
 I_{01}^{1,15} &= A_1 H_n^j(0, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(3; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,0} &= A_2 H_n^j(3, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,1} &= -A_2 H_n^j(1, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,2} &= -A_2 H_n^j(3, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(2; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,3} &= A_2 H_n^j(1, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(2; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,4} &= A_2 H_n^j(3, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,5} &= -A_2 H_n^j(1, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(0; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,6} &= -A_2 H_n^j(3, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(2; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,7} &= A_2 H_n^j(1, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(2; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,8} &= -A_2 H_n^j(2, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,9} &= A_2 H_n^j(0, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,10} &= A_2 H_n^j(2, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(3; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,11} &= -A_2 H_n^j(0, \alpha R; 1, \alpha R) G_n^j(3; \alpha R) G_n^j(0; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,12} &= -A_2 H_n^j(2, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,13} &= A_2 H_n^j(0, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(1; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,14} &= A_2 H_n^j(2, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(2; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R) \\
 I_{02}^{1,15} &= -A_2 H_n^j(0, \alpha R; 0, \alpha R) G_n^j(3; \alpha R) G_n^j(1; -\alpha R)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

The quantities  $H_n^j$  and  $G_n^j$  in the above formulae are [12]:

$$(19) \quad H_n^j(m, \alpha; p, \beta) =$$

$$= \int_1^\infty \int Q_n^{(j)} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) P_n^{(j)} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) e^{-(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)} [(\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)^{\frac{p}{2}}] \mu_1^m \mu_2^p d\mu_1 d\mu_2$$

$$(20) \quad G_n^j(m; \alpha) = \int_{-1}^{+1} P_n^{(j)}(v) (1 - v^2)^{\frac{j}{2}} e^{-\alpha v} v^m dv.$$

We shall determine in § 3 the auxiliary functions (19) and (20).

The form of integral  $I_{03}^I$  differs from those of  $I_{01}^I$  and  $I_{02}^I$ . A detailed computation shows that

$$(21) \quad I_{03}^I = \frac{R^5}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j \Omega_3 \int_1^\infty \int_{-1}^1 e^{-\alpha R(\mu_1 + \mu_2 + v_1 - v_2)} \cdot (\mu_1 - v_1)(\mu_2 + v_2) \times$$

$$\times P_n^{(j)} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) Q_n^{(j)} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) P_n^{(j)}(v_1) P_n^{(j)}(v_2) [(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)(\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)^{\frac{j+1}{2}}] d\mu_1 d\mu_2 dv_1 dv_2.$$

Let us now transform the integrand so that the upper indexes of functions  $P$  and  $Q$  should be twice the exponent of the expression in parenthesis. This transformation is necessary to express the integral (21) by using auxiliary functions (19) and (20).

We can perform the transformation on the basis of following relations[10]:

$$(22) \quad P_{n+1}^{j+1}(\mu) = (2n+1)P_n^{(j)}(\mu) + P_{n-1}^{j+1}(\mu).$$

$$(23) \quad Q_{n+1}^{j+1}(\mu) = (2n+1)Q_n^{(j)}(\mu) + Q_{n-1}^{j+1}(\mu)$$

$$(24) \quad (n-j+2)P_{n+1}^{j+1}(\mu) = (2n+1)\mu P_n^{j+1} - (n+j+1)P_n^{j+1}(\mu).$$

For brevity's sake we omit the lengthy calculations and give only its final result:

$$P_n^{(j)}(\mu) \cdot Q_n^{(j)}(\mu) = \frac{P_{n+1}^{j+1}(\mu) \cdot Q_{n+1}^{j+1}(\mu) - (2\gamma - 1)P_{n-1}^{j+1}(\mu) \cdot Q_{n-1}^{j+1}(\mu)}{(2n+1)^2},$$

$$P_n^{(j)}(v) = \frac{P_{n+1}^{j+1}(v) - P_{n-1}^{j+1}(v)}{2n+1},$$

where

$$\gamma = \frac{(4n^2 - 1)\mu^2 - [4n(n+j) + (2n-1)]\mu + (n+j)(n+j+1)}{(n-j+1)(n-j+2)}.$$

Substituting now the above expressions into integral (21) and making use of auxiliary functions (19) and (20) we have for

$$I_{03}^1 = \sum_{i=0}^2 I_{03}^{1,i}$$

where

$$\begin{aligned} I_{03}^{1,0} = & \left\{ \frac{A_3}{(2n+1)^2} H_{n+1}^{j+1}(1, \alpha R; 1, \alpha R) + \right. \\ & + \frac{A_3}{(2n+1)^2} \left[ 1 + \frac{(n+j)(n+j+1)}{(n-j+1)(n-j+2)} \right] \cdot H_{n-1}^{j+1}(1, \alpha R; 1, \alpha R) - \\ & - \frac{2A_3[4n(n+j) + (2n-1)]}{(2n+1)^2(n-j+1)(n-j+2)} H_{n-1}^{j+1} \left( \begin{matrix} 2, \alpha R; 1, \alpha R \\ 1, \alpha R; 2, \alpha R \end{matrix} \right) + \\ & + \frac{2A_3(4n^2-1)}{(2n+1)^2(n-j+1)(n-j+2)} H_{n-1}^{j+1} \left( \begin{matrix} 3, \alpha R; 1, \alpha R \\ 1, \alpha R; 3, \alpha R \end{matrix} \right) \Big\} \times \\ & \times \frac{[G_{n+1}^{j+1}(0; R\alpha) - G_{n-1}^{j+1}(0; \alpha R)] [G_{n+1}^{j+1}(0; -\alpha R) G_{n-1}^{j+1}(0; -\alpha R)]}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

and

$$A_3 = \frac{R^5}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n D_n^j \Omega_3.$$

$I_{03}^{1,1}$  and  $I_{03}^{1,2}$  may be evaluated in a similar manner.

### § 3.

Now we calculate the auxiliary functions  $H_l^M(m, \alpha; n, \beta)$  and  $G_l^M(i; \alpha)$ . As it is known (see [12])

$$G_l^M(i; \alpha) = (-1)^{i+l+M} \left[ \frac{2(l+M)!}{(2l+1)(l-M)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot B_l^{Ml}(\alpha),$$

$$H_l^M(m, \alpha; n, \beta) = (-1)^M \frac{(l+M)!}{(l-M)!} \Phi_{m,n}^{Ml}(\alpha, \beta).$$

The functions  $B_l^{Ml}(\alpha)$  were calculated by RÜDENBERG [13]:

$$B_{i+1}^{Ml} = a_M(l) B_i^{M(l-1)} + a_M(l+1) B_i^{M(l+1)},$$

$$B_0^{Ml} = \frac{1}{\alpha^M} \left[ \frac{(l+M)!}{(l-M)!} \right] B_0^{0l}.$$

Here

$$a_M(l) = a_0(l) \left[ 1 - \frac{M^2}{l^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad a_0(l) = (4 - 1/l^2)^{-\frac{1}{2}},$$

and

$$B_l^{0l} = [2(2l+1)]^{\frac{1}{2}} b_l^l(\alpha),$$

where

$$b_0^l(\alpha) = \left( \frac{\pi}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot I_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)$$



( $I_\nu(\alpha)$  stands for the modified Bessel function), and

$$(2l+1)b_0^l(\alpha) = \alpha [b_0^{l-1}(\alpha) - b_0^{l+1}(\alpha)].$$

Finally,

$$\begin{cases} b_n^0(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (\operatorname{sh} \alpha - n b_{n-1}^0(\alpha)) & \text{if } n \text{ is even} \\ b_n^0(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (\operatorname{ch} \alpha - n b_{n-1}^0(\alpha)) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Owing to [13] we evaluate the function  $\Phi_{nm}^{Ml}(\alpha, \alpha)$  in four steps. At first, we determine the function  $\Phi_{00}^{00}(\alpha, \alpha)$ , then  $\Phi_{nm}^{00}(\alpha, \alpha)$ , later  $\Phi_{nm}^{0l}(\alpha, \alpha)$  and finally  $\Phi_{nm}^{Ml}(\alpha, \alpha)$ . The steps in details are the following:

$$1) \quad \Phi_{00}^{00}(\alpha\alpha) = \Phi(\alpha\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\alpha} [2E(\alpha) - E(2\alpha)]$$

where

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} [C + \ln 2\alpha - e^{2\alpha} Ei(-2\alpha)],$$

( $C$  = the Euler's constant).

$$2) \quad \Phi_{nm}^{00} = \frac{m}{\alpha} \Phi_{(m-1)n}^{00} + \frac{n}{\alpha} \Phi_{m(n-1)}^{00} - \frac{mn}{\alpha^2} \Phi_{(m-1)(n-1)}^{00} + \frac{1}{\alpha^2} R_{mn}(\alpha, \alpha),$$

where

$$R_{mn}(\alpha, \alpha) = G_m(\alpha) e^{-\alpha} + e^{-\alpha} G(\alpha) - G_{m+n}(2\alpha)$$

$$G_0(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{2} [C + \ln 2\alpha - e^{2\alpha} Ei(-2\alpha)]$$

$$G_1(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{2} [C + \ln 2\alpha + e^{2\alpha} Ei(-2\alpha)]$$

$$G_n(\alpha) = G_{n-2}(\alpha) - A_{n-2}(\alpha)$$

$$A_0(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

$$\alpha A_n(\alpha) = n A_{n-1}(\alpha) + e^{-\alpha}.$$

$$3) \quad \Phi_{mn}^{0l}(\alpha, \alpha) = \left( \frac{2l-1}{l} \right)^2 \varphi_{mn}^l;$$

$$\varphi_{mn}^l = \frac{b_{l-2}}{b_{l-1}} \varphi_{mn}^{l-2} + \psi_{mn}^{l-1}, \quad (l \geq 2)$$

and

$$b_0 = 1, \quad b_l = 4 - \frac{1}{l^2} \quad (l \geq 1),$$

where

$$\psi_{mn}^l = \psi_{mn}^{l-2} + b_l \varphi_{(m+1)(n+1)}^l + b_{l-2} \varphi_{(m+1)(n+1)}^{l-2} - b_{l-1} (\varphi_{(m+2)n}^{l-1} + \varphi_{m(n+2)}^{l-1}); \quad (l \geq 2).$$

For  $l = 0, 1$  we use the formula

$$\varphi_{mn}^1 = \varphi_{mn}^0 = \varphi_{(m+1)(n+1)}^0 - A_m(\alpha) \cdot A_n(\alpha) - A_{mn}(\alpha, \alpha),$$

where

$$A_{00}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2\alpha} A_0^2(\alpha),$$

$$A_{mn}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2\alpha} [m A_{(m-1)n} + n A_{m(n-1)} + A_m(\alpha) \cdot A_n(\alpha)],$$

and

$$\begin{aligned} \psi_{mn}^1 = 3 \varphi_{(m+1)(n+1)}^1 + \varphi_{mn}^1 - \varphi_{(m+1)(n+1)}^0 - \varphi_{(m+2)n}^0 - \varphi_{m(n+2)}^0 + A_m(\alpha) \cdot A_{n+1}(\alpha) + \\ + A_{(m+1)}(\alpha) \cdot A_n(\alpha). \end{aligned}$$

4) Finally, using the function  $\Phi_{mn}^{0l}$ , we obtain the function  $\Phi_{mn}^{Ml}$  with the aid of the following recurrence formula:

$$\Phi_{mn}^{(M+1)l}(\alpha, \alpha) = \Phi_{(m+1)(n+1)}^{Ml}(\alpha, \alpha) - \left( \frac{l+M}{2l+1} \right) \Phi_{mn}^{M(l-1)}(\alpha, \alpha) - \left( \frac{l+1-M}{2l+1} \right) \Phi_{mn}^{M(l+1)}(\alpha, \alpha).$$

Since the integrals occurring in our calculations are extremely involved, the numerical computations will be carried out by electronic computer. The numerical results of these calculations will be published elsewhere.

We want to express our grateful thanks to Professor C. A. COULSON and Dr. G. FREUD for their valuable remarks.

(Reçu le 5 juillet 1960.)

#### BIBLIOGRAPHY

- [1] LADIK, J.: "The ground state of the hydrogen molecule on the basis of the relativistic quantum mechanics with the aid of the Wang wave function. I. Breit equation of the hydrogen molecule. Calculation of the relativistic correction terms of the kinetic energy." *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 271–290.
- [2] LADIK, J.—Mrs. CSUKÁS, A.: "Determination of the magnetic interaction in the hydrogen molecule due to the motion of the two electrons." *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1957) 381–397.
- [3] LADIK, J.—CSUKÁS, A.-né: "Két elektron mozgásából származó mágneses kölcsönhatás meghatározása a hidrogén molekulában." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 425–441.
- [4] HELLMANN, H.: *Einführung in die Quantenchemie*. Deutsche, Leipzig—Wien, 1937. 84.
- [5] WANG, S. C.: "The problem of normal hydrogen molecule in the new quantum mechanics." *Physical Reviews* **31** (1928) 579–586.
- [6] HARTMANN, H.: *Theorie der chemischen Bindung auf quantentheoretischer Grundlage*. Springer, Berlin—Göttingen, 1954. 130.
- [7] HAMEKA, H. F.: *Probabilities of forbidden transitions in organic molecules*. Thesis, Leiden University, 1956. 25 pp.

- [8] MAGNUS, W.—OBERHETTINGER, F.: *Formeln und Satze für die speziellen Kugelfunktionen*. Springer, Berlin, 1948. 197.
- [9] NEUMANN, F.: *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und die Kugelfunktionen*. Leipzig, Teubner 1887. 335—341.
- [10a] HOBSON, E. W.: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge University Press, 1955. 89, 107—110.
- [10b] PREUSS, H.: *Integraltafeln zur Quantenchemie*. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1 (1956).
- [11] LENSE, J.: *Kugelfunktionen*. Leipzig, 1950. 30, 68.
- [12] PREUSS, H.: loc. cit. 2 (1956) 9.
- [13] RÜDENBERG, K.: "A study of two-centre integrals useful in calculations on molecular structure, II. The two-centre exchange integrals." *Journal of Chemical Physics* 19 (1951) 1467—1475.

## ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ МОЛЕКУЛЫ ВОДОРОДА НА ОСНОВАНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ С ПОМОЩЬЮ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ WANG-A, II.

G. KARDOS и J. LADIK

### Резюме

Работа содержит метод вычисления математического ожидания члена взаимного воздействия магнитной траектории — траектории, одного из членов коррекционной энергии, получаемых редукцией уравнения двух электронов относительной квантовой механики, уравнения Врейт-а.

В первой части показывается, что это математическое ожидание получается в виде выражения восьми двухцентровых интегралов. Эти интегралы имеют вид, выраженный в эллиптических координатах. Расстояние между двумя электронами выражается с помощью ряда Нейманна [9].

В знаменателе встречающихся интегралов фигурирует куб  $r_{12}$  — расстояния друг от друга. Выражая  $\frac{1}{r_{12}}$ , с одной стороны, с помощью теорема косинуса, с другой стороны, разложением в ряд Нейманна и дифференцируя оба выражения по  $\varphi_i$  (угол азимута одного из электронов), получаем ряд для  $\frac{1}{r_{12}^3}$ . Эти интегралы удалось получить как функции параметров  $\alpha$  и  $R(\alpha$  — вариационный параметр,  $R$  — расстояние между двумя ядрами), с помощью вспомогательных функций [12], которые могут быть вычислены с помощью рекурсивных формул. Способ опирается на метод К. РÜDENBERG-а.

Численное определение фигурирующих в работе интегралов будет произведено позже. Полученные таким образом результаты будут опубликованы в другой работе.



## FIXED POINTS IN GRAPH-COLOURING

by

P. VERMES<sup>1</sup>

I would like to introduce the idea of *fixed points* to the study of colouring plane graphs. This leads to a *conjecture about fixed points* which would imply the proof of the four-colour conjecture. Most of the work has been done by others, and without quoting references I wish to thank P. ERDÖS, R. RADO, G. A. DIRAC and C. A. B. SMITH for various seminar lectures and valuable remarks during discussion.

A graph  $G$  consists of nodes  $a, b, c, \dots$ , and of edges  $ab, ac, \dots$  joining two different nodes. I shall only consider graphs with at most one edge connecting a pair of nodes, and *only finite graphs*.

A *colouring* of a graph is the allocation of some colour to each node in such a way that a pair of nodes  $p, q$  receive different colours if they are joined by an edge. The smallest number of different colours required for the colouring of a given graph  $G$  is called its *chromatic number*. I shall be mainly interested in 4-chromatic and 5-chromatic graphs.

I shall assume that the graph is *connected*; i. e., that every pair of nodes  $p, q$  can be joined by a chain of edges  $pa, ab, bc, \dots, kq$  so that all edges of the chain are edges of the graph.

A graph is called a *plane graph* if it has a *plane realization*; i. e., if it can be drawn on a plane in such a way that no two edges intersect. Two graphs  $G$  and  $G'$  are *isomorphic* if their nodes and edges can be brought into one-one correspondence  $a \rightarrow a', \dots, bc \rightarrow b'c', \dots$ . In a plane graph  $G$  I shall call a *circuit* a set of (not less than three) nodes  $a, b, c, \dots, j, k$  if  $ab, bc, cd, \dots, jk, ka$  are edges of  $G$ . If in a realization  $\Gamma$  of a plane graph  $G$  the nodes of a circuit are all distinct, then such a circuit will be called a *polygon*. Every point of the plane which is not on a node or on an edge of a polygon in  $\Gamma$  is either inside or outside this polygon. Two polygons are either outside each other, or one is inside the other, or they overlap. If there is no edge of  $\Gamma$  inside a polygon  $P$  in  $\Gamma$ , I shall call it an *empty polygon*. Every empty polygon in  $\Gamma$  is outside every other empty polygon in  $\Gamma$ . When  $\Gamma$  is connected there is a circuit in  $\Gamma$ , the *boundary* of  $\Gamma$ , such that if  $\Gamma$  is inside a circle  $C$ , then from every point  $p$  of  $C$  one can draw an edge to a point of the boundary, all inside  $C$ , so that this edge does not meet any other point of  $\Gamma$ . I shall call a plane graph with a polygonal boundary and with no cutpoints a *compact plane graph*. We can project a compact plane graph  $G$  on the surface of a sphere, and it will be *isomorphic*

---

<sup>1</sup> Birkbeck College, University of London.

to a polyhedron. Such a polyhedron is the union of empty polygons each having common edges with some other empty polygons. These basic polygons, the *faces*, together constitute a realization of  $G$  on the sphere. We can choose a point of projection on any face (not on an edge or a node) to obtain a plane graph realization  $\Gamma$  of  $G$ . All such realizations are isomorphic, though they may have different boundaries.

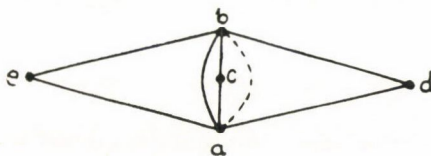


Figure 1.

If all the faces of a polyhedron are filled with diagonals until every face is a triangle, we obtain a *triangular polyhedron*. This can always be done in such a way that no pair of nodes is joined by more than one edge. For the removal of one of the edges  $ab$  leaves a quadrangle  $acbd$ , and putting in the other diagonal  $cd$  makes the graph triangular again.

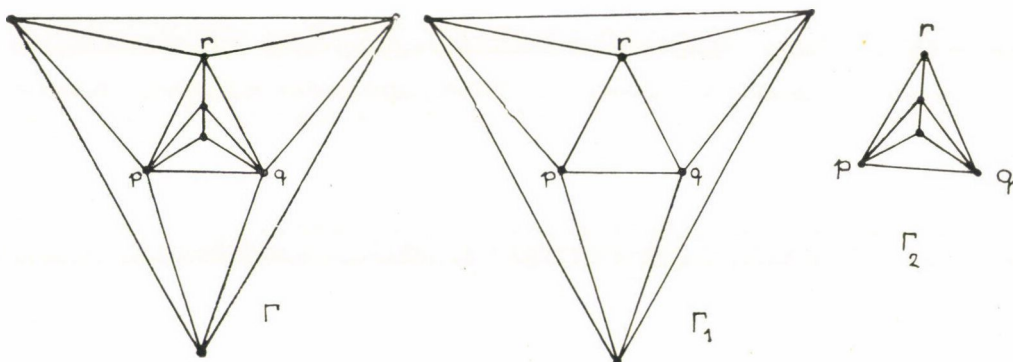


Figure 2.

Every plane realization  $\Gamma$  of a triangular polyhedron consists of empty triangles joined in pairs by common edges and  $\Gamma$  has a *triangular boundary*. No pair of nodes which are not joined by an edge in  $\Gamma$  could be joined by an edge in  $\Gamma$  without crossing some edges of  $\Gamma$ , so we shall call such a graph a *saturated plane graph*. If every triangle of a saturated plane graph, except the boundary triangle, is empty, we shall call it a *simple saturated plane graph*.

One form of the four-colour conjecture states that the *chromatic number of every plane graph is not greater than four*.

To prove this it would be sufficient to prove it for every *simple saturated plane graph*. For if  $\Gamma$  is not simple but a saturated plane graph, and if  $pqr$  is a non-empty triangle, we can separate  $\Gamma$  into  $\Gamma_1$  obtained by removing every node and edge inside  $pqr$ , and into  $\Gamma_2$  which is the removed subgraph with the triangle  $pqr$  added to it as boundary. Any separate 4-colouring of  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  can, by permuting the colours of  $\Gamma_2$  to match the colours of  $pqr$ , give a 4-colour-



ing of  $\Gamma$ . By repeated application of this procedure we can break up  $\Gamma$  into simple saturated parts. If a plane graph is not saturated, the saturation does not decrease its chromatic number.

A graph is called *node-critical* if the removal of any node with the edges ending there reduces the chromatic number. A graph is called *edge-critical* if the removal of any edge reduces the chromatic number. An edge-critical

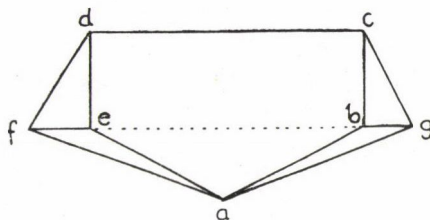


Figure 3.

graph is node-critical, but there are many node-critical graphs which are not edge-critical. For example the plane graph shown here is node-critical 4-chromatic without the edge  $eb$ , and also with the edge  $eb$ , but it is edge-critical without  $eb$  and not edge-critical with  $eb$ .

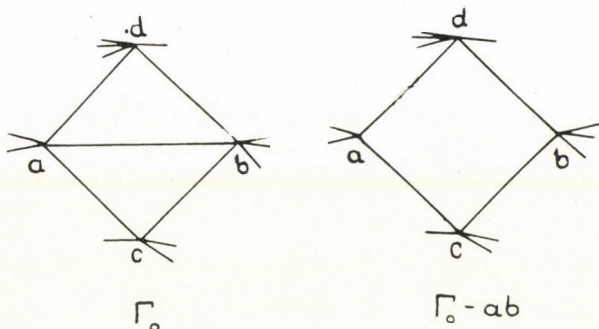


Figure 4.

If the 4-colour conjecture is not true, then there are *5-chromatic simple saturated plane graphs*, and among them at least one,  $\Gamma_0$ , with the *smallest number*  $n_0$  of nodes. Then every (simple saturated or not) plane graph with number of nodes smaller than  $n_0$  is at most 4-chromatic. Hence  $\Gamma_0$  is *node-critical 5-chromatic*.

If  $abc$  is a triangle of  $\Gamma_0$ , and  $abd$  one of the adjoining triangles, then the removal of the edge  $ab$  leaves an empty quadrangle  $acbd$ .<sup>2</sup> Now in  $\Gamma_0$   $a$  and  $b$  could not both have been joined to another node  $p$ , because the triangle  $pab$  would not have been empty. Hence if we *collapse* the quadrangle  $acbd$  in  $\Gamma_0$  —  $ab$  by identifying the nodes  $a$  and  $b$ , the number of the nodes is reduced

<sup>2</sup> Here and later we can assume without loss of generality that removing a node and the edges on it a certain polygon becomes empty. For we can replace one representation of a plane graph by another suitable isomorphic representation.



by 1, and the resulting graph is 4-chromatic. Opening up the quadrangle again the same 4-colouring is valid for  $\Gamma_0 - ab$ , since  $a$  and  $b$  can have the same colour.



Figure 5.

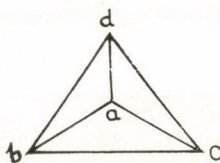


Figure 6.

Hence  $\Gamma_0$  is edge-critical 5-chromatic.

A saturated plane graph is isomorphic to a triangular polyhedron. Hence if  $n$  is the number of nodes,  $e$  is the number of edges and  $f$  is the number of faces, we have:

$n + f = e + 2$ , by Euler's theorem; and

$3f = 2e$ , since every face is a triangle.

Eliminating  $f$  we obtain:  $e = 3n - 6$

If we call the *valency* of a node the number of edges meeting at it, then the last formula shows that:

In a saturated plane graph the valency of every node cannot be  $\geq 6$ , because then  $e$  would be  $\geq 3n$ .

This is therefore true for  $\Gamma_0$ , so that

$\Gamma_0$  has at least one node of valency less than 6.

I shall now show that  $\Gamma_0$  has no node of valency less than 5. Every node of a triangular polyhedron has a valency not less than 3. If  $\Gamma_0$  had a node of valency 3, this would imply that this node would be inside a triangle. But  $\Gamma_0$  is simple (and not isomorphic with a tetrahedron); hence it has no nodes of valency 3.

If  $\Gamma_0$  had a node of valency 4, say  $a$ , joined to  $b, c, d, e$ , then on removing  $a$  and the edges  $ab, ac, ad, ae$ , in  $\Gamma_0 - a$  either the nodes  $b$  and  $d$  or the nodes  $c$  and  $e$  are not joined, neither to each other nor to a node  $p$  outside  $bcde$ . For if  $bd$  is an edge outside the quadrangle, then  $bad$  is a non-empty triangle in  $\Gamma_0$ . If  $b$  and  $d$  are joined to  $p$  outside the quadrangle  $bcde$ ,  $c$  and  $e$  joined to  $p$  would mean that a triangle (e. g.,  $edp$  or  $ebp$ ) is not empty in  $\Gamma_0$  or  $\Gamma_0$  is 3-chromatic (with 6 nodes). Finally if  $c$  and  $e$  are joined to another node  $q$  outside  $bcde$ , either  $cq$  or  $eq$  would cross  $bp$  or  $dp$ .

Assuming that  $c$  and  $e$  are not joined to each other nor to another node outside  $bcde$  in  $\Gamma_0 - a$ , we collapse the empty quadrangle  $bcde$  by identifying  $c$  with  $e$ , and obtain a 4-chromatic graph. The colouring of this graph can also be used to colour the graph  $\Gamma_0 - a$ . In this 4-colouring the nodes of the empty quadrangle  $bcde$  would receive at most 3 distinct colours and this would make  $\Gamma_0$  4-chromatic, because we could give to  $a$  the 4th remaining colour.

Hence  $\Gamma_0$  has no nodes of valency 4.

Having seen that at least one node of  $\Gamma_0$  has a valency less than 6, we have proved that:

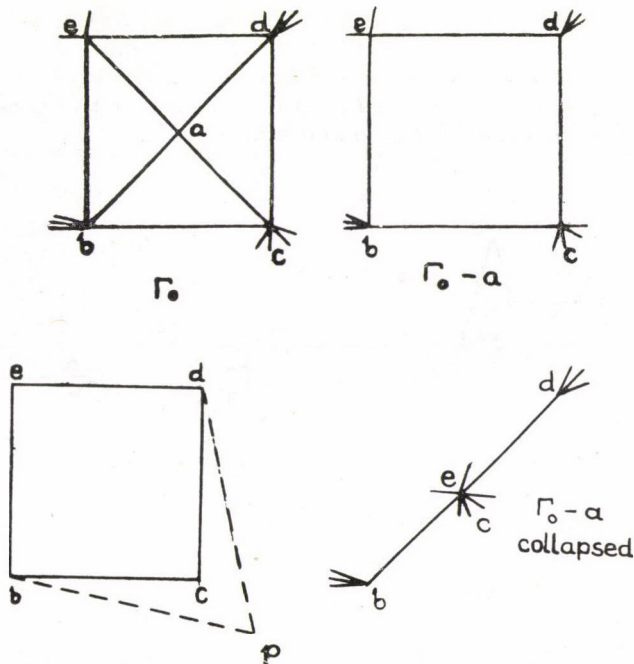


Figure 7.

$\Gamma_0$  has at least one node of valency 5, and no node of smaller valency.

Let  $a$  be a node of valency 5, joined to  $b, c, d, e, f$ . Removing  $a$  and the edges  $ab, ac, ad, ae, af$ , we obtain  $\Gamma_0 - a$  which has an empty pentagon  $bcdef$ .

We can prove that there are two nodes on this pentagon which are not joined either to each other or to the same node outside.

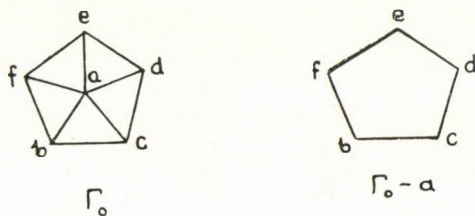


Figure 8.

For if  $bd$  were joined, then in  $\Gamma_0$  the triangle  $adb$  would not be empty. If all nodes were joined to the same node  $p$  outside the pentagon, this again would imply a nonempty triangle in  $\Gamma_0$  or  $\Gamma_0$  to be 4-chromatic (with 7 nodes). Finally if  $b$  and  $d$  were joined to  $p$ ,  $bp$  and  $dp$  would separate  $c$  from  $e$  [and  $c$  from  $f$ ], so that if  $q$  were any other node outside the pentagon,  $qc$  and  $qe$  could not be joined without crossing either  $bp$  or  $dp$ . This concludes the proof.

Let  $c$  and  $e$  be a pair not joined and not joined to the same node outside the pentagon  $bcdef$  in  $\Gamma_0$ . Then collapsing the empty pentagon in  $\Gamma_0 - a$  so



that  $c$  and  $e$  are identified we obtain  $\Gamma_1$  which is saturated 4-chromatic. The 5 nodes  $b, c, d, e, f$  are reduced to 4:  $b, c, d, f$ ;  $bcf$  forming a triangle. In every 4-colouring of  $\Gamma_1$  the colour of  $d$  must be different from the 3 colours of the triangle  $bcf$ . For otherwise a 4-colouring of  $\Gamma_1$  with 3 colours for the triangle  $bcf$  and  $d$  would lead to a 4-colouring of  $\Gamma_0 - a$  and hence of  $\Gamma_0$ .

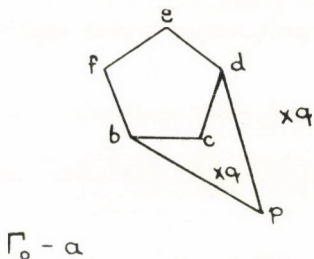


Figure 9.

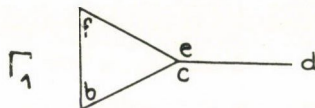


Figure 10.

Here I introduce the definition:

$p$  is a fixed point of the 4-chromatic plane graph  $G$  if there is a triangle  $abc$  in  $G$  such that in every 4-colouring of  $G$  the node  $p$  and the nodes  $a, b, c$  have different colours.

We shall say in short:  $p$  is fixed for the triangle  $abc$ . Clearly in  $\Gamma_1$  the node  $d$  is fixed for the triangle  $bcf$ .

Let  $d$ , a node inside an empty triangle  $abc$ , be joined to  $a, b$  and  $c$ . Then each node is fixed for the triangle formed by the other three nodes. We repeat this construction in one or more of the empty triangles  $abd, bcd, cad$ . The graph  $T$  obtained after a finite number of repetitions will be called a trivial graph. Each node of such a graph is fixed for at least one triangle. For example in our diagram  $g$  is fixed for  $bdf, bcd, cde$  and  $ceh$ . It is easy to see that every plane graph isomorphic to  $T$  is a trivial graph.

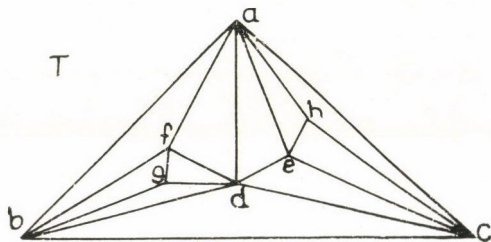


Figure 11.

A trivial graph has at least two nodes of valency 3. For if  $T$  has more than four nodes, then the last nodes constructed inside and outside a triangle like  $abd$  are both 3-valent.

We shall call a node  $p$  of a graph  $G$  a trivial fixed point if there is a trivial subgraph of  $G$  which contains the triangle for which it is fixed. We assert that in  $\Gamma_1$  the node  $d$  is not trivially fixed for  $bcf$ .



To prove this we assume that a trivial subgraph  $T$  of  $\Gamma_1$  contains  $bcf$ . If there is at least one node of  $\Gamma_1$  inside an empty triangle of  $T$  then  $\Gamma_0$  is not simple, leading to a contradiction. Otherwise  $\Gamma_1$  contains a 3-valent node other than  $d$ , and hence  $\Gamma_0$  contains a not more than 4-valent node, leading again to a contradiction. We have thus proved our assertion.

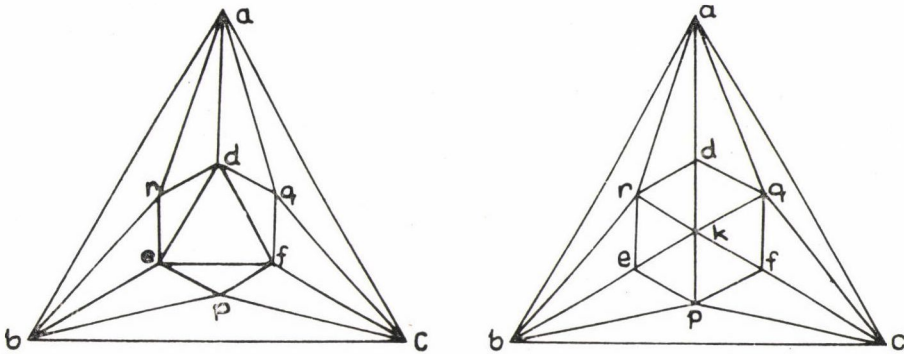


Figure 12.

The proof of the 4-colour conjecture would follow from the truth of the following

**conjecture:** if in a 4-chromatic saturated plane graph  $G$  the node  $p$  is a non-trivial fixed point for a triangle  $abc$ , and if  $pa$  is an edge in  $G$ , then either  $pb$  or  $pc$  is another edge in  $G$ .

For we have seen that in  $\Gamma_1$  the node  $d$  was fixed for the triangle  $bcf$ , and that it was not trivially fixed. Hence our conjecture would imply that in  $\Gamma_0$  the node  $d$  is joined outside the pentagon either to  $b$  or to  $f$ . Each case would produce in  $\Gamma_0$  a non-empty triangle  $abd$  or  $afd$ , contrary to our assumption that  $\Gamma_0$  is simple, and thus proving the 4-colour conjecture.

I think it would be worth while to study properties of graphs with non-trivial fixed points. One needs examples first, but so far I have been able to find only two examples of a simple saturated plane graph with fixed points.

The first diagram shows a graph of 9 nodes. Each of the nodes  $p, q, r$  is fixed for both triangles  $abc$  and  $def$ . For if  $abc$  is coloured by 123 and  $d$  by 4, then in every 4-colouring  $e$  and  $f$  must have 1, since the rectangles  $dabe$  and  $dacf$  cannot have more than three colours. Hence  $d, e, f$  cannot have colour 4. This leaves only two possibilities:  $def$  is coloured either 231 or 312; and in each case  $p, q, r$  must have 4.

The other nodes are fixed points too:

$a$  is fixed for  $pbc$ ,  $b$  is fixed for  $qca$ ,  $c$  is fixed for  $rab$ ,  $d$  is fixed for  $pef$ ,  $e$  is fixed for  $qfd$ ,  $f$  is fixed for  $rde$ .

The second diagram shows a graph of 10 nodes. Each of the nodes  $p, q, r$  is fixed for the triangle  $abc$ . For if  $abc$  is coloured by 123 and  $k$  by 4, then  $p$  must have 1,  $q$  must have 2, and thus  $f$  is joined to four differently coloured nodes. Hence  $k$  cannot have 4, but must have 1, 2 or 3, and in each case  $p, q, r$  must have 4, while  $d, e, f$  can then have one or two of the colours 1, 2, 3. We also see that

$a$  is fixed for  $pbc$ ,  $b$  is fixed for  $qca$ ,  $c$  is fixed for  $rab$ .

In each example and in each case our conjecture holds: namely the fixed point is joined to just two nodes of the triangle for which it is fixed. The conjecture does not apply to trivial fixed points. Indeed our diagram of a trivial graph shows that the node  $g$  there is joined by 3 edges to  $bdf$ , by 2 edges to  $bcd$ , by 1 edge to  $cde$  and  $g$  is not joined at all to  $ceh$ .

(Received July 25, 1960.)

## ФИКСИРОВАННЫЕ ТОЧКИ ОКРАШИВАНИЯ ГРАФОВ

P. VERMES

### Резюме

$G$  есть простой и насыщенный плоскостный граф, если он изоморфен структуре односвязного полиедра, каждая грань которого треугольник и в котором три ребра образуют треугольник лишь в том случае, если они являются ребрами некоторой грани.

Под  $k$ -окрашиванием графа  $G$  понимается такое окрашивание его угловых точек  $k$  красками, при котором граничные точки любого ребра окрашены в разный цвет.

$G$  4-хроматичен, если он может быть окрашен четырьмя цветами и не может быть окрашен тремя цветами.

Угловая точка  $p$  4-хроматичного плоскостного графа есть его фиксированная точка, если в  $G$  есть такой треугольник  $abc$ , что в любом 4-окрашивании графа  $p, a, b, c$  окрашены в разные цвета. Мы говорим также, что  $p$  фиксирован относительно треугольника  $abc$ .

Тривиальный граф есть граф, построенный следующим способом: взятую внутри пусого треугольника угловую точку  $d$  связываем с  $a, b$  и  $c$ . Относительно одного или нескольких из полученных треугольников  $abd, bcd$  и  $cad$  повторим этот процесс и эти шаги повторим конечное число раз.

Угловая точка  $p$  есть тривиальная фиксированная точка графа  $G$ , если  $G$  содержит тривиальный частичный граф, относительно треугольника которого  $p$  фиксированна.

В работе доказывается, что гипотеза о четырех цветах эквивалентна следующей:

**Гипотеза.** Если  $B$  4-хроматичном насыщенном плоскостном графе угловая точка  $p$  нетривиальная фиксированная точка относительно треугольника  $abc$  и  $pa$  является ребром  $G$ , то  $pb$  или  $pc$  также является ребром  $G$ .



# ON SOME PROBLEMS CONNECTED WITH THE GALTON-TEST

by

E. CSÁKI and I. VINCZE

## Introduction

One of the oldest two-sample tests is that proposed by GALTON to DARWIN (see [6]), without however knowing the distribution of his statistic. As far as we know this distribution was determined for the first time in the work of K. L. CHUNG and W. FELLER [1]. Papers [2], [3], [4] and [5] are considering the same problem and its generalization respectively. As the Galton-test does not appear to be powerful, present paper aims at improving the test both by modification of the Galton-statistic and by forming a pair of statistics. Our considerations are closely connected with the method of N. V. SMIRNOV used for the determination of limiting distribution of his two sample test [9]. In this paper for equal sample-sizes some exact joint distributions are determined by elementary methods and the corresponding limiting distributions are determined as well. We wish to consider statistical problems and the case of different sample-sizes in a following paper.

**Notations.** Let us denote by  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  and  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  samples taken from populations with the common continuous distribution functions  $F(x)$  and  $G(x)$  resp. Let us arrange these samples in order of magnitude:

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_1^* &< \xi_2^* < \dots < \xi_n^*, \\ \eta_1^* &< \eta_2^* < \dots < \eta_n^*. \end{aligned}$$

We introduce further the union of these ordered samples:

$$\zeta_1^* < \zeta_2^* < \dots < \zeta_{2n}^*$$

and the random variables

$$\vartheta_i = \begin{cases} +1, & \text{if } \zeta_i^* = \xi_j \\ -1, & \text{if } \zeta_i^* = \eta_k. \end{cases}$$

The partial sum of the  $\vartheta_i$ -s is denoted by  $s_i$  i. e.

$$s_i = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_i, \quad s_0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Under the assumption  $F(x) \equiv G(x)$  each array  $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{2n})$  of the  $n(+1)$ -s and  $n(-1)$ -s has the same probability  $\binom{2n}{n}^{-1}$ . Each array corresponds to a random path starting at and returning after  $2n$  steps to the origin.



Each path has the same probability. If the points  $(i, s_i)$  are represented in the plane and each of them is connected with the next one, then we obtain the usual illustrative figure of the paths. We shall denote by

$E_{2n}$  a path from  $(0, 0)$  to  $(2n, 0)$ ,

$T_i$  a point of the path, where either  $(s_{i-1} = -1, s_i = 0, s_{i+1} = +1)$  or  $(s_{i-1} = +1, s_i = 0, s_{i+1} = -1)$  occurs, and we join to these points  $T_0 = (0, 0)$ ,  $T_{2n} = (2n, 0)$ .

$T_i^k$  a point of the path, where either

$(s_{i-1} = k-1, s_i = k, s_{i+1} = k+1)$ , or  $(s_{i-1} = k+1, s_i = k, s_{i+1} = k-1)$

holds.

We shall call in the following the points  $T_i$  and  $T_i^k$  intersection points.

$E_{2n}^l$  an  $E_{2n}$ -path containing exactly  $l+1$   $T_i$  points; with other words an  $E_{2n}^l$ -path has  $l$  waves (halfwaves),

$E_{2n}^{g,l}$  an  $E_{2n}$ -path having  $l+1$   $T_i$  points and  $2g$  steps above the axis.

$E_{2n,k}^l$  an  $E_{2n}$ -path having  $l+1$   $T_i^k$  points,

$E_{2n,k}^{g,l}$  an  $E_{2n,k}^l$ -path having  $2g$  steps above the height  $k$ ,

$H_m^k$  a path starting at the origin and reaching for the first time the height  $k$  at the  $m$ -th step,

$N(A)$  the number of  $A$  paths or points (e.g.  $N(E_{2n}) = \binom{2n}{n}$ ) or for an

$$E_{2n}^l\text{-path } l+1 = N(T_i).$$

## § 1. The Galton statistic and the number of waves

1. We shall give two proofs for the following

**Theorem 1.1**

$$(2) \quad N(E_{2n}^l) = \frac{2l}{n} \binom{2n}{n-l} \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

**First proof.** As it is known the number of  $E_{2m}$  paths, going throughout under or above the axis, is

$$\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}.$$

In consequence of this the number of  $E_{2n}$ -paths with intersection points  $T_0, T_{2\alpha_1}, T_{2(\alpha_1+\alpha_2)}, \dots, T_{2(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{l-1})}, T_{2(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_l)}$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l = n, \alpha_i \geq 1$ ) is equal to

$$2 \frac{1}{\alpha_1+1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_2+1} \binom{2\alpha_2}{\alpha_2} \dots \frac{1}{\alpha_l+1} \binom{2\alpha_l}{\alpha_l}.$$

The factor 2 is due to the possibilities of starting in either positive or negative direction.

Hence we have

$$N(E_{2n}^l) = 2 \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_l = n \\ \alpha_i \geq 1}} \frac{1}{\alpha_1 + 1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \dots \frac{1}{\alpha_l + 1} \binom{2\alpha_l}{\alpha_l}.$$

Let us denote the generating function of the  $N(E_{2n}^l)$ -s by  $F_l(v)$ , i. e.

$$(3) \quad F_l(v) = \sum_{n=1}^{\infty} N(E_{2n}^l) v^n.$$

Let us introduce further the notation for the known generating function

$$(4) \quad f(v) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + 1} \binom{2\alpha}{\alpha} v^\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4v}}{2v} - 1.$$

As it is easy to see the relation

$$F_l(v) = 2 [f(v)]^l = 2 v^l \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4v}}{2v} \right)^{2l}$$

holds. One of the authors [8] has determined the following generating function

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2l + 2j}{j} \frac{l}{l + j} v^j = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4v}}{2v} \right)^{2l},$$

from which the relation

$$F_l(v) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2l + 2j}{j} \frac{l}{l + j} v^{j+l} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n} \binom{2n}{n-l} v^n$$

may be obtained, giving the proof of our theorem 1.1.

**Second proof.** There holds the following

**Lemma.**

$$N(E_{2n}^l) = 2 N(H_{2n}^{2l}).$$

For the known relation (see eg. Feller [7] p. 71)

$$N(H_{2n}^{2l}) = \frac{l}{n} \binom{2n}{n-l}$$

the proof of the lemma gives us the proof of theorem 1.1 too.

As one half of the  $E_{2n}^l$ -paths is starting in the positive direction and the other half in the negative one, we may consider the paths with  $s_1 = +1$  only. A one to one transformation of these paths into the  $H_{2n}^{2l}$ -paths will be

given. This happens in the following way: Figure 1 shows a possible domain within which such  $(E_{2n}^l | s_1 = +1)$  path must proceed. As it is seen each path is divided by the points  $T_i$  into  $l$  sections.

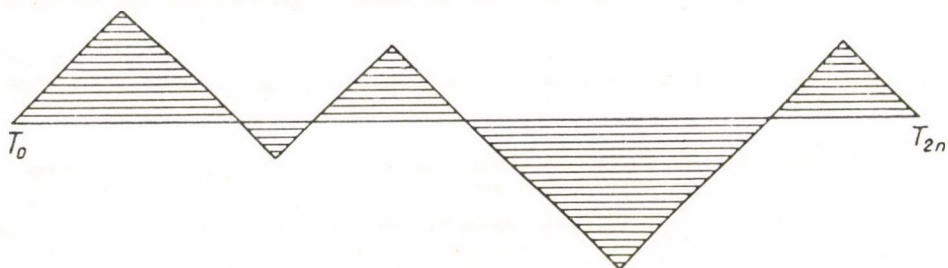


Figure 1.

Let us reflect the positive parts of the path (the positive waves) around the axis (see figure 2).

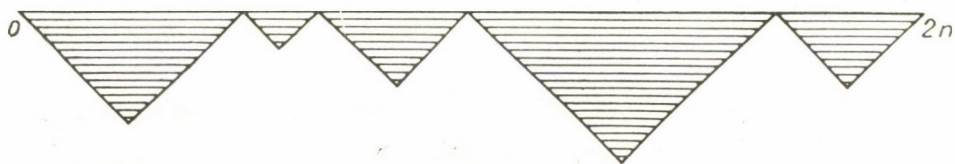


Figure 2.

Here we have for each  $i = 1, 2\alpha_1 + 1, 2(\alpha_1 + \alpha_2) + 1, \dots, s_i = -1$ . Let us omit these first steps of each of the  $l$  sections and let us join to the end of each section a positive step. Figure 3 shows the domain containing the graph of a path after the mentioned modifications. Thus we obtained a  $H_{2n}^{2l}$  path.

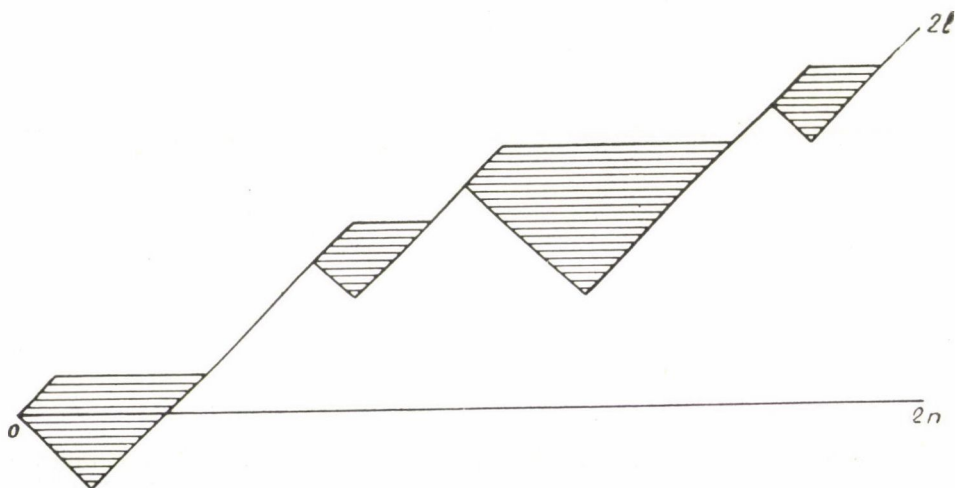


Figure 3.



The connection between a  $H_{2n}^{2l}$  and the corresponding  $(E_{2n}^l | s_1 = +1)$  is given by the relation that the points where  $H_{2n}^{2l}$  reaches the height  $2i$  for the first time correspond to the  $T_i$  points of  $E_{2n}^l$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ). This construction may be carried out in the opposite direction as well and thus the proof of our lemma is given.

2. Let the random variable  $\lambda$  be the number of waves in the case of two samples defined in the above section. Then our theorem 1.1 gives immediately the following

**Theorem 1.1'.** *Under the null hypothesis*

$$(5) \quad \mathbf{P}(\lambda = l) = \frac{2l}{n} \frac{\binom{2n}{n-l}}{\binom{2n}{n}}, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

or

$$\mathbf{P}(\lambda < l) = 1 - 2 \frac{\binom{2n-1}{n-l}}{\binom{2n}{n}}, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

For the limiting distribution we have

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\lambda < y \sqrt{2n}) = 1 - e^{-2y^2}, \quad y \geq 0.$$

As it can be seen the random variable  $\lambda$  is equal to the number of intersections the two empirical distribution functions. We wish to mention that a similar problem was considered by MIHALEVICH [4] but his definition of intersection is not equal to ours and he obtains different results.

3. Let us consider now the Galton-statistic. Let us denote it by  $\gamma$ , thus  $\gamma$  is equal to the number of  $\xi_i^*$ -s exceeding the corresponding  $\eta_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) and  $\gamma$  may be  $0, 1, \dots, n$  (see the array in (1) of section I.) As it is known  $2\gamma$  equals the "time" spent by the point walking randomly on the straight line above 0. The relation

$$\mathbf{P}(\gamma = g) = \frac{1}{n+1}, \quad g = 0, 1, 2, \dots, n.$$

is well known.

For the comparison of the two samples, i. e. for deciding whether the hypothesis  $F(x) \equiv G(x)$  holds, or not we suggest the test based on the joint distribution of the pair of statistics  $(\gamma; \lambda)$ . In order to determine this distribution we prove the following

**Theorem 1.2.** *The number of  $E_{2n}^{g,l}$ -paths is equal to*

$$\begin{aligned}
 N(E_{2n}^{g,l}) &= \\
 &= \begin{cases} \frac{l^2}{2g(n-g)} \binom{2g}{g-\frac{l}{2}} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{l}{2}}, & \text{if } l \text{ is even,} \\ \frac{l^2-1}{4g(n-g)} \left[ \binom{2g}{g-\frac{l+1}{2}} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{l-1}{2}} + \binom{2g}{g-\frac{l-1}{2}} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{l+1}{2}} \right], & \text{if } l \text{ is odd, } l-1 \leq 2g \leq 2n-l+1 \end{cases} \\
 (7) &
 \end{aligned}$$

**Proof.** Using our above notations let be the ordinate of the  $T_i$  points  $0, 2\alpha_1, 2(\alpha_1 + \alpha_2), \dots, 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{l-1}), 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l) = 2n$ . If  $s_1 = +1$ , then  $g = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots$  must hold. Hence for the number of  $E_{2n}^{g,l}$  paths starting in the positive direction we have

$$(8) \quad \sum^* \frac{1}{\alpha_1 + 1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \cdots \frac{1}{\alpha_l + 1} \binom{2\alpha_l}{\alpha_l},$$

where  $\Sigma^*$  means summation for  $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots = g$ ,  $\alpha_2 + \alpha_4 + \dots = n-g$  and  $\alpha_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . In the same way we have for the number of  $E_{2n}^{g,l}$  paths starting in negative direction

$$(9) \quad \sum^{**} \frac{1}{\alpha_1 + 1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \cdots \frac{1}{\alpha_l + 1} \binom{2\alpha_l}{\alpha_l},$$

where now the summation holds for  $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots = n-g$ ,  $\alpha_2 + \alpha_4 + \dots = g$  and  $\alpha_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

$N(E_{2n}^{g,l})$  equals the sum of the above two expressions (8) and (9).

Formula (8) may be written in the form

$$\begin{aligned}
 (8') \quad & \left( \sum_{\alpha_1 + \alpha_3 + \dots = g} \frac{1}{\alpha_1 + 1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_3 + 1} \binom{2\alpha_3}{\alpha_3} \cdots \right) \times \\
 & \times \left( \sum_{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots = n-g} \frac{1}{\alpha_2 + 1} \binom{2\alpha_2}{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_4 + 1} \binom{2\alpha_4}{\alpha_4} \cdots \right),
 \end{aligned}$$

and expression (9) equals

$$\begin{aligned}
 (9') \quad & \left( \sum_{\alpha_1 + \alpha_3 + \dots = n-g} \frac{1}{\alpha_1 + 1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_3 + 1} \binom{2\alpha_3}{\alpha_3} \cdots \right) \times \\
 & \times \left( \sum_{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots = g} \frac{1}{\alpha_2 + 1} \binom{2\alpha_2}{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_4 + 1} \binom{2\alpha_4}{\alpha_4} \cdots \right).
 \end{aligned}$$

If now  $l$  is even, then we have for the first factor in (8') the value  $\frac{1}{2} N(E_{2g}^{\frac{l}{2}})$

and for the second  $\frac{1}{2} N(E_{2(n-g)}^{\frac{l}{2}})$ . But the same holds — in inverted order — for the factors in (9'). These give the statement of our theorem 1.2 for even  $l$ .

If  $l$  is odd, then we have for the two factors in (8'),

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_3 + \dots = g} \frac{1}{\alpha_1 + 1} \binom{2\alpha_1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_3 + 1} \binom{2\alpha_3}{\alpha_3} \dots \frac{1}{\alpha_l + 1} \binom{2\alpha_l}{\alpha_l} = \frac{1}{2} N(E_{2g}^{\frac{l+1}{2}})$$

and

$$\sum_{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots = n-g} \frac{1}{\alpha_2 + 1} \binom{2\alpha_2}{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_4 + 1} \binom{2\alpha_4}{\alpha_4} \dots \frac{1}{\alpha_{l-1} + 1} \binom{2\alpha_{l-1}}{\alpha_{l-1}} = \frac{1}{2} N(E_{2(n-g)}^{\frac{l-1}{2}}).$$

We have analogous expressions for the factors in (9') and thus we obtained the complete proof of our theorem 1.2.

The distribution of the pair of random variables is given by

**Theorem 1.2'.** In the case  $F(x) \equiv G(x)$

$$(10) \quad \mathbf{P}(\gamma=g, \lambda=l) = \begin{cases} \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left[ \frac{l^2}{2g(n-g)} \binom{2g}{g-\frac{l}{2}} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{l}{2}} \right], & \text{if } l \text{ is even} \\ \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left[ \frac{l^2-1}{4g(n-g)} \left\{ \binom{2g}{g-\frac{l+1}{2}} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{l-1}{2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \binom{2g}{g-\frac{l-1}{2}} \binom{2n-2g}{n-g-\frac{l+1}{2}} \right\} \right], & \text{if } l \text{ is odd} \end{cases}$$

here if  $g=0$ , or  $n$ , then  $l=1$ ,

if  $1 \leq g \leq n-1$ , then  $l=2, 3, \dots, \min(2g+1, 2n-2g+1)$

and for the limiting distribution

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\gamma \leq zn, \lambda \leq y\sqrt{2n}) = \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2v(1-v)}} du dv.$$

As mentioned in the introduction the statistical questions of the test based on the above statistics will be treated in a second paper. We shall prove there that *the test based on the statistic  $\lambda$  is asymptotically consistent against all continuous alternatives.*

## § 2. Extension of the Galton statistic and the number of waves

1. In this paragraph the distinguished role of the height  $k=0$  i. e. the horizontal axis is abolished and the situation of the random path relative to the horizontal line of height  $k>0$  is regarded. The number of intersections and the length of time spent above this height will be considered.



**Theorem 2.1.** *The number of  $E_{2n,k}^l$ -paths, is equal to*

$$(12) \quad N(E_{2n,k}^l) = \binom{2n+2}{n-k-l} \frac{k+l+1}{n+1}, \quad k > 0, \quad l > 0 \text{ odd.}$$

**Proof.** We shall give a one to one transformation of the  $E_{2n,k}^l$ -paths into the  $H_{2n+2}^{2k+2l+2}$ -paths. Let be  $r_1$  the first and  $r_2$  the last  $T_i^k$  point. (See figure 4.)

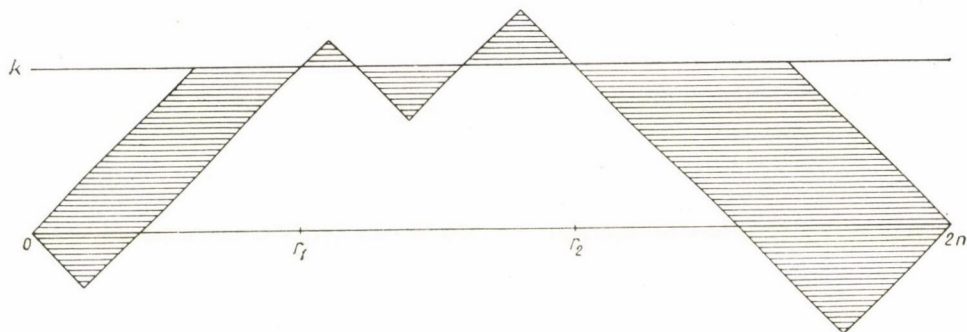


Figure 4.

Let us leave the section  $(0, r_1)$  of the path unchanged. According to the second proof of theorem 1.1, the section between  $r_1$  and  $r_2$  corresponds to a path starting at the point  $(r_1, k)$  and reaching after  $r_2 - r_1$  steps for the first time the height  $k + 2l$ . Concerning the section between  $r_2$  and  $2n$  let us first alter the signs and then the direction, i.e. we replace  $\vartheta_{r_2}, \dots, \vartheta_{2n}$  by  $-\vartheta_{2n}, \dots, \vartheta_{r_2}$ , and let us attach this transformed section to the end of the previous one (see figure 5).

Finally let us now insert both between  $\vartheta_{r_1}$  and  $\vartheta_{r_1+1}$  and after  $\vartheta_{2n}$  a  $(+1)$ . Thus we obtain a  $H_{2n+2}^{2k+2l+2}$ -path. By reversing this procedure it may be seen that this transformation is a one to one.

We wish to mention that by writing  $|k|$  instead of  $k$  the formula (12) is valid in the case of negative  $k$  as well. From formula (12) there follows the following

**Theorem 2.1'.** *In the case  $F(x) \equiv G(x)$  denoting by  $\lambda_k + 1$  the number of  $T_i^{(k)}$  points and by  $\varkappa$  the maximal distance between the two empirical distribution function*

$$\varkappa = n \cdot \max_{(x)} (F_n(x) - G_n(x)) = \max_{0 \leq i \leq 2n} s_i$$

the relation

$$\mathbf{P}(\varkappa > k, \lambda_k = l) = \frac{k+l+1}{n+1} \frac{\binom{2n+2}{n-k-l}}{\binom{2n}{n}}, \quad k > 0, \quad l \geq 1 \text{ odd.}$$

and for the limiting distribution

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \frac{\varkappa}{\sqrt{2n}} > a, \frac{\lambda_k}{\sqrt{2n}} < y \right) = e^{-2a^2} - e^{-2(a+y)^2}, \quad a \geq 0, \quad y \geq 0 \text{ holds.}$$

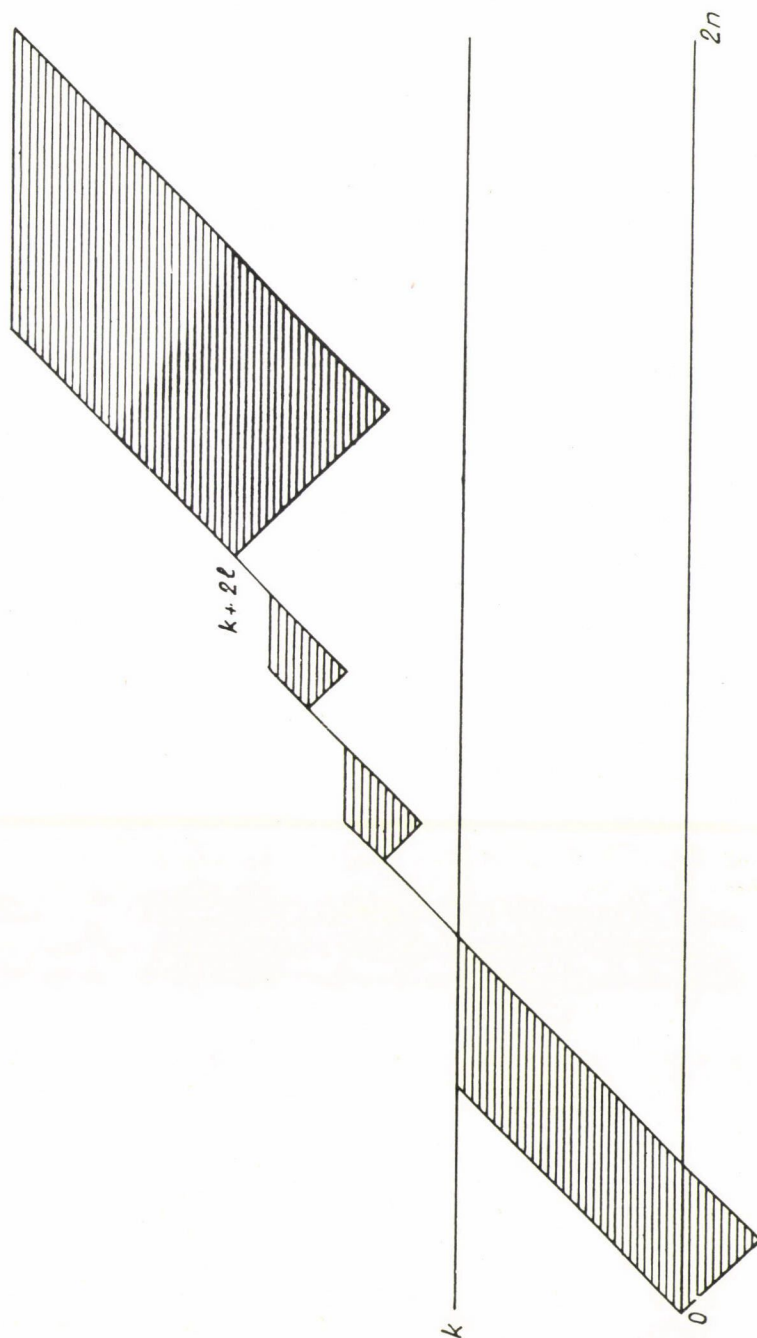


Figure 5.

2. Let us regard now the modification of the Galton-statistic.

As mentioned above the Galton-statistic  $\gamma$  is equal to the number of the positive members of the array

$$\xi_1^* - \eta_1^*, \xi_2^* - \eta_2^*, \dots, \xi_i^* - \eta_i^*, \dots, \xi_n^* - \eta_n^*.$$

If one of the samples is removed in one direction the number  $\gamma_k$  of the positive members of the array

$$\xi_{k+1}^* - \eta_1^*, \xi_{k+2}^* - \eta_2^*, \dots, \xi_n^* - \xi_{n-k}^*$$

may be considered. It is easy to see that  $2\gamma_k$  is equal to the "time" spent by the point walking randomly on the straight line above the height  $k$ . MIHALEVICH has derived an equivalent problem to this [4] and obtained a result equivalent to the following:

$$(13) \quad \mathbf{P}(\gamma > k, \gamma_k = g) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{r=g}^{n-k} \binom{2r}{r} \frac{1}{r+1} \binom{2n-2r}{n+k-r} \frac{k}{n-r}.$$

3. We now prove the

**Theorem 2.2.**

$$(14) \quad N(E_{2n,k}^{g,l}) = \frac{(k+1)(l^2-1)}{4g} \left( g - \frac{l+1}{2} \right) \sum_{(r)} \frac{1}{(r-g)(n+1-r)} \times \\ \times \left( r - g - \frac{l-1}{2} \right) \binom{2n+2-2r}{n-r-k},$$

where the summation is for  $2n-2k \geq 2r \geq \max(2g+l-1, 2l)$ .

**Proof.** If  $r_1$  and  $r_2$  denote the first and the last  $T_i^{(k)}$  points, resp., the section between  $r_1$  and  $r_2$  is an  $E_{2r}^{g,l}$ -path starting in positive direction where  $2r = r_2 - r_1$ .

The first section corresponds to a  $H_{r_1+1}^{k+1}$ -path, the last one to a  $H_{2n-r_2+1}^{k+1}$ -path.

Thus

$$\begin{aligned} N(E_{2n,k}^{g,l}) &= \sum_{r_1, r_2} N(H_{r_1+1}^{k+1}) N(E_{r_2-r_1}^{g,l}, s_1 = +1) N(H_{2n-r_2+1}^{k+1}) = \\ &= \sum_{(r)} \sum_{r_1=k}^{2n-2r-k} N(H_{r_1+1}^{k+1}) N(E_{2r}^{g,l}, s_1 = +1) N(H_{2n-2r-r_1+1}^{k+1}) = \\ &= \sum_{(r)} \left[ N(E_{2r}^{g,l}, s_1 = +1) \sum_{r_1=k}^{2n-2r-k} N(H_{r_1+1}^{k+1}) N(H_{2n-2r-r_1+1}^{k+1}) \right] = \\ &= \sum_{(r)} \frac{l^2-1}{4g(r-g)} \left( g - \frac{l+1}{2} \right) \left( r - g - \frac{l-1}{2} \right) \sum_{r_1=k}^{2n-2r-k} \frac{k+1}{r_1+1} \times \end{aligned}$$



$$\times \left( \frac{r_1 + 1}{\frac{r_1 + k}{2} + 1} \right) \frac{k + 1}{2n - 2r - r_1 + 1} \left( \frac{2n - 2r - r_1 + 1}{\frac{2n - 2r - r_1 + k}{2} + 1} \right),$$

but using the method of generating functions it can be seen that

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=k}^{2n-2r-k} \frac{k+1}{r_1+1} \left( \frac{r_1+1}{\frac{r_1+k}{2}+1} \right) \frac{k+1}{2n-2r-r_1+1} \left( \frac{2n-2r-r_1+1}{\frac{2n-2r-r_1+k}{2}+1} \right) = \\ = \frac{k+1}{n-r+1} \binom{2n-2r+2}{n-r-k}, \end{aligned}$$

proving our Theorem 2.2.

**Theorem 2.2'.** In the case  $F(x) \equiv G(x)$  for the random variables  $\kappa$ ,  $\lambda_k$  and  $\gamma_k$  the joint distribution law

$$\mathbf{P}(\kappa > k, \gamma_k = g, \lambda_k = l) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} N(E_{2n,k}^{g,l})$$

holds and we have the joint limiting distribution

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2n}} > a, \frac{\lambda_k}{\sqrt{2n}} < y, \frac{\gamma_k}{n} < z \right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2a^2} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2 + 2au}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{(u+2av)^2}{2v(1-v)}} du dv \\ a \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1. \end{aligned}$$

**Proof.** For the finite distribution we refer to the expression (14).

In order to obtain the limiting distribution the following notations are introduced

$$\begin{aligned} \frac{k}{\sqrt{2n}} \sim a, \frac{l}{\sqrt{2n}} \sim y, \frac{g}{n} \sim z, \frac{r}{n} \sim w \\ a \geq 0, y \geq 0, 1 \geq w \geq z \geq 0. \end{aligned}$$

from which follow

$$dy \sim \frac{2}{\sqrt{n}} (l \text{ is odd!}), dz \sim \frac{1}{n}, dw \sim \frac{1}{n}.$$

Further we have

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{2} \sim \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{z}} \sqrt{2g} \sim \frac{1}{z} \frac{y}{\sqrt{w-z}} \sqrt{2(r-g)}, \\ k \sim \frac{a}{\sqrt{1-w}} \sqrt{2(n-r)}. \end{aligned}$$

From these relations and by using the well known asymptotic formulae we obtain the relation

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2n}} > a, y \leq \frac{\lambda_k}{\sqrt{2n}} < y + dy, z \leq \frac{\gamma_k}{n} < z + dz \right) = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{y^2 a}{z^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z}} \int_z^1 \frac{1}{[(w-z)(1-w)]^{3/2}} e^{-\left(\frac{y^2}{2(w-z)} + \frac{2a^2}{1-w}\right)} dw dy dz. \end{aligned}$$

Applying for the variable  $w$  under the integral the transformation

$$\frac{1-w}{1-r} = \frac{t}{1+t}$$

it follows that

$$\frac{2}{\pi} \frac{y^2 a}{z^{3/2} (1-z)^2} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)} - \frac{2a^2}{1-z}} \int_0^\infty \frac{1+t}{t^{3/2}} e^{-\frac{4a^2 + y^2 t^2}{t}} dt dy dz.$$

The integral can be evaluated with the aid of the known formula

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{1/2}} e^{-\frac{1+t^2}{2bt}} dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{1+t^2}{2bt}} dt = \frac{\sqrt{2b\pi}}{e^{1/b}}$$

and we obtain the limiting density function corresponding to our statement in theorem 2.2'.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2n}} > a, y \leq \frac{\lambda_k}{\sqrt{2n}} < y + dy, z \leq \frac{\gamma_k}{n} < z + dz \right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y^2 + 2ay}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-2a^2} e^{-\frac{(y+2az)^2}{2z(1-z)}} dy dz. \end{aligned}$$

Integration in respect of  $z$  from 0 to  $y$  leads to the relation

$$\mathbf{P} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2n}} > a, y \leq \frac{\lambda_k}{\sqrt{2n}} < y + dy \right) = 4(a+y) e^{-2(a+y)^2} dy$$

corresponding to our theorem 2,1', and in respect of  $y$  from 0 to  $\infty$  to

$$\mathbf{P} \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2n}} > a, z \leq \frac{\gamma_k}{n} < z + dz \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_z^1 \frac{a}{[u(1-u)]^{3/2}} e^{-\frac{2a^2}{1-u}} du,$$

which is the limiting form of the distribution (13) of MIHALEVICH.

(Received July 27, 1960.)

## REFERENCES

- [1] CHUNG, K. L.—FELLER, W.: „Fluctuations in coin tossing” *Proceedings National Academy of Sciences USA* **35** (1949) 605—608.
- [2] ГНЕДЕНКО, Б. В. — МИХАЛЕВИЧ, В. С.: «О распределении числа выходов одной эмпирической функции распределения над другой.» *ДАН СССР* **82** (1952) 6, 841—843.
- [3] ГНЕДЕНКО, Б. В. — МИХАЛЕВИЧ, В. С.: «Две теоремы о поведении эмпирической функции распределения.» *ДАН СССР* **85** (1952) 1, 25—27.
- [4] МИХАЛЕВИЧ, В. С.: «О взаимном расположении двух эмпирических функций распределения.» *ДАН СССР* **85** (1952) 3, 485—488.
- [5] ГНЕДЕНКО, Б. В.: «Проверка неизменности распределения вероятностей в двух независимых выборках.» *Mathematische Nachrichten* **12** 1 (2) (1954) 29—63.
- [6] HODGES, J. L.: „Galton's rank-order test.” *Biometrika* **42** (1955) 261—262.
- [7] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I. (2nd edition) John Wiley and Sons, New York, 1957.
- [8] VINCZE, I.: „On some joint distributions and joint limiting distributions in the theory of order statistics, II.” *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **4** (1959) 29—47.
- [9] Смирнов, Н. В.: «Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках.» *Бюллетень Московского государственного Университета Математика* **2** (1939) 2, 3—14.

## О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СВЯЗАННЫХ С КРИТЕРИЕМ ГАЛЬТОНА

E. CSÁKI и I. VINCZE

### Резюме

В работе рассматривается случайное блуждание по линии, где блуждающая частица «шагает» единицу вперед или назад с вероятностью  $\frac{1}{2}$  и вернется после  $2n$  шагов в исходное положение. Пусть обозначает  $2\gamma_k$  число шагов, после которых координата положения частицы больше чем  $k$  ( $\gamma_0$  — критерий Гальтона), и  $\lambda_k + 1$  число переходов в точке  $k$ . Определяются распределения, совместное распределение и соответствующие предельные распределения случайных величин  $\gamma_k$  и  $\lambda_k$ . Эти распределения могут быть использованы для конструирования критериев для сравнения двух выборок. — Исследования связаны с работами Смирнова [9], Гнеденко и Михалевича [2], [3], [4], [5].





# ÜBER DIE BEGRÜNDUNG DER ADDITIONS- UND MULTIPLIKATIONS-FORMELN VON BEDINGTEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Dem Andenken an K. Jordan anlässlich seines 90. Geburtstages gewidmet

von

JÁNOS ACZÉL<sup>1</sup>

## § 1. Einleitung

Eine grosse Anzahl von Arbeiten (z. B. [5]–[11], [13]–[15] vgl. das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit) beschäftigt sich mit den Verallgemeinerungen der Additions- und Multiplikationsformeln für die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens eines von sich gegenseitig ausschliessenden Ereignissen (»oder-Wahrscheinlichkeit«) bzw. des gleichzeitigen Eintreffens von unabhängigen Ereignissen (»und-Wahrscheinlichkeit«), indem sie statt Summen und Produkte a priori beliebige Funktionen  $F$  und  $G$  zulassen. Sie zeigen dann unter Voraussetzung gewisser natürlich erscheinender Bedingungen, daß man in diesem Falle die Wahrscheinlichkeiten so umdefinieren kann, daß sie den üblichen Additions- und Multiplikationsformeln unterliegen. — Dies pflegt durch Lösung des Funktionalgleichungssystems (oder eines Teiles des Systems)

$$(1) \quad F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)],$$

$$(2) \quad G[G(x, y), z] = G[x, G(y, z)],$$

$$(3) \quad G[F(x, y), z] = F[G(x, z), G(y, z)]$$

unter gewissen Bedingungen geschehen.

Nun ist aber in dem am meisten verwendeten KOLMOGOROFFSchen Axiomensystem [3] der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur die Additionsformel eine Axiome, die Multiplikationsformel dient in diesem System zur Definition der Unabhängigkeit. — Die Symmetrie dieser beiden Formeln als Axiomen wird in dem Axiomensystem von A. RÉNYI (s. z. B. [12]) hergestellt, das sich auf bedingte Wahrscheinlichkeiten bezieht.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die bezügliche Verallgemeinerung dieses Axiomensystems zu untersuchen und wieder auf das ursprüngliche zurückzuführen. Dabei werden wir sehen, daß anstelle von (3) die verwickeltere Funktionalgleichung

$$(4) \quad G[F(x, y), z] = H[G(x, z), G(y, z)]$$

tritt. (2) werden wir nicht nötig haben. — Natürlich enthalten unsere Betrachtungen die bezügliche Verallgemeinerung des Kolmogoroffschen Aufbaus als einen Spezialfall. Wir wollen auch an manchen Stellen kürzer, an anderen präziser verfahren als einige der diesbezüglichen früheren Arbeiten.

<sup>1</sup> Debrecen.

## § 2. Herleitung des grundlegenden Funktionalgleichungssystems

Das Axiomensystem von RÉNYI [12] bezieht sich auf bedingte Wahrscheinlichkeiten  $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$  als reellwertige Funktionen zweier (zufälligen) Ereignissen  $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ , und  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$ , wo  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra (vgl. [12]) der Untermengen einer beliebigen Menge  $\mathbf{M}$  ist und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ . — Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen der Ereignisalgebren:

$\mathbf{A} + \mathbf{B}$ : das Ereignis  $\mathbf{A}$  oder das Ereignis  $\mathbf{B}$ ,  
 $\mathbf{AB}$  das Ereignis  $\mathbf{A}$  und das Ereignis  $\mathbf{B}$ .  
 $\mathbf{0}$ : das unmögliche Ereignis.

Die Axiome von RÉNYI lauten dann in einer für unsere Zwecke geeigneteren, unwesentlich abgeänderten Form:

- (5)  $0 = p(\mathbf{0}/\mathbf{V}) \leq p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ ,
- (6)  $1 = p(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{W}/\mathbf{W})$ ,
- (7)  $p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ ,
- (8)  $p(\mathbf{AB}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{BV}) p(\mathbf{B}/\mathbf{V})$ ,
- (9)  $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) + p(\mathbf{B}/\mathbf{V})$  falls  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$

Das letzte Axiom reicht aus, wenn nur endlich viele einander ausschließende alternative Ereignisse betrachtet werden, im unendlichen Fall wird statt (9)

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k/\mathbf{V}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\mathbf{A}_k/\mathbf{V}) \text{ falls } \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{0} \text{ für } i \neq j$$

vorausgesetzt, was wir aber hier nicht benötigen.

Unser Ziel ist es, das Axiomensystem (5)–(9) in der auf der Hand liegenden Art zu verallgemeinern, daß wir statt (8) und (9) lediglich voraussetzen, daß  $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V})$  nur von  $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$  und von  $p(\mathbf{B}/\mathbf{V})$ ,  $p(\mathbf{AB}/\mathbf{V})$  dagegen nur von  $p(\mathbf{A}/\mathbf{BV})$  und von  $p(\mathbf{B}/\mathbf{V})$  abhängt. Wir verallgemeinern auch etwas die Voraussetzungen (5) und (6) und behalten (7) unverändert, so daß das neue Axiomensystem folgenderweise lautet:

- (10)  $e = p(\mathbf{0}/\mathbf{V}) \leq p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ ,
- (11)  $e < e' = p(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{W}/\mathbf{W})$ ,
- (12)  $p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ ,
- (13)  $p(\mathbf{AB}/\mathbf{V}) = G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{BV}), p(\mathbf{B}/\mathbf{V})]$ ,
- (14)  $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V}) = F_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), p(\mathbf{B}/\mathbf{V})]$ ,
- (15)  $F_{\mathbf{V}}(x, y)$  ist stetig wachsend in  $x$  und in  $y$ .

Aus (15) folgt übrigens, daß  $F_{\mathbf{V}}(x, y)$  auch als Funktion zweier Veränderlicher stetig ist. — Durch die Bezeichnungen wird bereits hervorgehoben, daß die Funktionen  $F$  und  $G$  von der Voraussetzung  $\mathbf{V}$  abhängen können. Dann ist z. B.

$$(16) \quad p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{CV}) = F_{\mathbf{CV}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{CV}), p(\mathbf{B}/\mathbf{CV})].$$



Wir setzen auch hier voraus, daß  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{A}$  und  $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{BV}, \mathbf{CV} \in \mathfrak{B}$  sind, wo  $\mathfrak{A}$  wieder eine  $\sigma$ -Algebra von Untermengen und  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}$  ist. Aus (10) und (11) folgt  $\mathbf{O} \notin \mathfrak{B}$ . — Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß  $\mathfrak{B}$  zusammenhängend ist in dem Sinne, daß es bei zwei beliebigen  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathfrak{B}$  Ereignisse  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$  derart gibt, daß  $\mathbf{C}_1 \mathbf{V} \in \mathfrak{B}$ ,  $\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \in \mathfrak{B}, \dots, \mathbf{W} \mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$  sind. — Endlich wird auch vorausgesetzt, daß  $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$  bei veränderlichem  $\mathbf{A}$  jeden Wert zwischen  $e$  und  $e'$  tatsächlich annimmt.

Wir verwenden noch die folgenden Gesetze der Ergebnisalgebren:

$$\begin{aligned} \mathbf{O} + \mathbf{A} &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{VV} &= \mathbf{V}, \\ (\mathbf{AV}) \mathbf{A} &= \mathbf{AV}, \\ \mathbf{CV} &= \mathbf{VC}, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C} &= \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \end{aligned} \tag{17}$$

woraus die Beziehungen

$$\begin{aligned} p(\mathbf{O} + \mathbf{A}/\mathbf{V}) &= p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) \\ p(\mathbf{A}/\mathbf{VV}) &= p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) \\ p[(\mathbf{AV}) \mathbf{A}/\mathbf{V}] &= p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) \\ p[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}/\mathbf{V}] &= p[\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})/\mathbf{V}], \\ p[(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}/\mathbf{V}] &= p(\mathbf{AC} + \mathbf{BC}/\mathbf{V}) \end{aligned}$$

folgen. Wegen (10)–(14) schließt man aus diesen auf die folgenden Eigenschaften der Funktionen  $F_{\mathbf{V}}(x, y)$ ,  $G_{\mathbf{V}}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{V}}(e, x) &= F_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{O}/\mathbf{V}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = p(\mathbf{O} + \mathbf{A}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = x, \\ G_{\mathbf{V}}(x, e') &= G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), p(\mathbf{V}/\mathbf{V})] = G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{VV}), p(\mathbf{V}/\mathbf{V})] = \\ &= p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = x, \\ G_{\mathbf{V}}(e', x) &= G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{V}/\mathbf{V}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{AV}/\mathbf{AV}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = p[(\mathbf{AV}) \mathbf{A}/\mathbf{V}] = \\ &= p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = x, \\ F_{\mathbf{V}}[F_{\mathbf{V}}(x, y), z] &= p[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}/\mathbf{V}] = p[\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})/\mathbf{V}] = F_{\mathbf{V}}[x, F_{\mathbf{V}}(y, z)], \\ G_{\mathbf{V}}[G_{\mathbf{V}}(u, v), z] &= G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{CV}), p(\mathbf{C}/\mathbf{V})] = p[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C}/\mathbf{V}] = \\ &= p(\mathbf{AC} + \mathbf{BC}/\mathbf{V}) = F_{\mathbf{V}}[G_{\mathbf{V}}(u, z), G_{\mathbf{V}}(v, z)] \end{aligned}$$

[vgl. auch (16)], wobei

$$\begin{aligned} x &= p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), y = p(\mathbf{B}/\mathbf{V}), z = p(\mathbf{C}/\mathbf{V}), \\ u &= p(\mathbf{A}/\mathbf{CV}), v = p(\mathbf{B}/\mathbf{CV}) \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Schreiben wir einfach

$$(18) \quad F_{\mathbf{V}}(x, y) = H(x, y),$$

$$(19) \quad F_{\mathbf{C}\mathbf{V}}(u, v) = F(u, v),$$

$$(20) \quad G_{\mathbf{V}}(x, y) = G(x, y),$$

so erhalten wir für diese Funktionen die folgenden Gleichungen:

$$(21) \quad H(e, x) = x,$$

$$(22) \quad G(x, e') = G(e', x) = x,$$

$$(23) \quad H[H(x, y)z] = H[x, H(y, z)]$$

$$(24) \quad G[F(u, v), z] = H[G(u, z), G(v, z)],$$

(vgl. (4)), während aus (10), (13) und (20) die Bedingung

$$(25) \quad G(x, y) \geq e$$

folgt, was die Beschränktheit der Funktion  $G$  nach unten aussagt.

Setzen wir in (24)  $z = e'$ , so wird wegen (22)

$$(26) \quad F(u, v) = H(u, v),$$

so daß (15), (21), (23) und (24) in

$$(27) \quad F(x, y) \text{ ist stetig wachsend in } x \text{ und in } y$$

$$(28) \quad F(e, x) = x,$$

$$(29) \quad F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)],$$

$$(30) \quad G[F(x, y), z] = F[G(x, z), G(y, z)]$$

übergeht [vgl. (1), (3)]. Andererseits besagt (26) wegen (18) und (19), daß

$$F_{\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{C}\mathbf{V}}(x, y)$$

besteht. Wenn wir hier die Rolle von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{V}$  vertauschen, so haben wir

$$F_{\mathbf{C}}(x, y) = F_{\mathbf{V}\mathbf{C}}(x, y) = F_{\mathbf{C}\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{V}}(x, y)$$

[vgl. (17)], falls  $\mathbf{C}, \mathbf{C}\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$ . Bei beliebigen  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}, \mathbf{W} \in \mathfrak{B}$  gibt es laut Voraussetzung Ereignisse  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$  derart, daß  $\mathbf{C}_1\mathbf{V} \in \mathfrak{B}, \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1 \in \mathfrak{B}_1, \dots, \mathbf{W}\mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$ , also gilt

$$F_{\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{C}_1\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{C}_1}(x, y) = F_{\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1}(x, y) = F_{\mathbf{C}_2}(x, y) = \dots = F_{\mathbf{C}_n}(x, y) = \\ = F_{\mathbf{W}\mathbf{C}_n}(x, y) = F_{\mathbf{W}}(x, y)$$

d. h.  $F_{\mathbf{V}}(x, y)$  hängt von  $\mathbf{V}$  nicht ab. Wir werden zeigen, daß unter den getroffenen Voraussetzungen  $G$  durch  $F$  eindeutig bestimmt ist, so daß [vgl. (20)] auch  $G_{\mathbf{V}}(x, y)$  von  $\mathbf{V}$  nicht abhängt.

Nehmen wir  $\mathbf{A}' + \mathbf{A} = \mathbf{V}$ , so folgt aus (11), (14), (18), (19), (26), (27), (10) und (28)

$$e' = p(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}' + \mathbf{A}/\mathbf{V}) = F[p(\mathbf{A}'/\mathbf{V}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] \geq F[e, p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$$

d. h.

$$p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) \leq e'$$

und aus (14), (18), (19), (26) und (10) folgt einerseits

$$(31) \quad e \leq F(x, y)$$

andererseits

$$(32) \quad F(x, y) \leq e'.$$

Die erste Ungleichung (31) bedeutet, daß  $F$  von unten beschränkt ist, die zweite, (32), dass nur solche  $x, y$  in Betracht genommen werden, für die  $F(x, y) \leq e'$  ist [ $F(x, y) \geq e$  ist wegen (27), (28) immer erfüllt.]

So müssen wir im folgenden das Funktionalgleichungssystem (29), (30) auf dem Intervall  $[e, e']$  unter den Voraussetzungen (27), (28), (32), (22), (25) lösen.

Natürlich können auch weitere Gleichungen und Ungleichungen abgeleitet werden, wir werden aber keine weitere brauchen.

### § 3. Hilfssätze

Die Funktionalgleichung (29) wurde unter der Voraussetzung (27) für Gruppen [2], Halbgruppen [4] und Gruppenkeime [1] gelöst. Hier brauchen wir sie für »Halbgruppenkeime« (rechtsseitige Halbumbgebungen des neutralen Elements) und beweisen den

**Satz 1.** Gilt die Funktionalgleichung (29) für

$$e \leq x \leq e', e \leq y \leq e', e \leq z \leq e', F(x, y) \leq e', F(y, z) \leq e', F[F(x, y)z] \leq e',$$

gelten ferner (27) und (28), so gibt es eine auf  $[0, 1]$  definierte stetig wachsende Funktion  $f(u)$  mit der Inversen  $f^{-1}(x)$  ( $x \in [e, e']$ ) derart, daß

$$(33) \quad F(x, y) = f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)]$$

für

$$e \leq x \leq e', e \leq y \leq e', F(x, y) \leq e'$$

gilt und

$$(34) \quad f(0) = e, f(1) = e'$$

ist. Umgekehrt erfüllt jede Funktion der Gestalt (33) die Gleichung (29).

Es sei bemerkt, daß das Intervall  $[e, e']$  bezüglich der Operation

$$(35) \quad x \circ y = F(x, y)$$

von oben nicht abgeschlossen zu sein braucht, es kann  $x \in [e, e'], y \in [e, e']$  derart geben, daß  $F(x, y)$  nicht im Intervall  $[e, e']$  liegt. — Wie schon bemerkt, folgt aus (27), daß  $F(u, v)$  auch als Funktion zweier Veränderlicher stetig ist.

**Beweis.** Daß jede Funktion (33) die Gleichung (29) erfüllt, sieht man durch Einsetzen sofort.

Um die andere Hälfte des Satzes zu beweisen, definieren wir die Funktion  $f(x)$  durch [vgl. (34)]

$$f(0) = e, f(1) = e',$$

$$(36) \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = f_m[f_n^{-1}(e')] \quad (m \leq n),$$

in den rationalen Punkten des Intervalles  $[0, 1]$ .



Die in (36) figurierenden Funktionen  $f_m(x)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) werden rekursiv definiert [wir verwenden die Bezeichnung (35)]:

$$(37) \quad f_1(x) = x, f_{m+1}(x) = x \circ f_m(x) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Natürlich ist  $f_m(x)$  nur für solche  $x$  definiert für welche  $f_m(x) \in [e, e']$  ist.

Aus (29), d. h. aus

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

folgt, daß

$$(38) \quad f_{m_1}(x) \circ f_{m_2}(x) = f_{m_1+m_2}(x) = f_{m_2}(x) \circ f_{m_1}(x)$$

und

$$(39) \quad f_m[f_k(x)] = f_{mk}(x) = f_k[f_m(x)]$$

gelten. Weiter folgt aus (27), (28), (35) und (37)

$$(40) \quad f_1(x) = x = e \circ x < x \circ x = f_2(x) = e \circ (x \circ x) < x \circ (x \circ x) = \\ = f_3(x) < \dots \quad \text{für } x > e$$

d. h.

$$(41) \quad f_m(x) < f_{m+1}(x) \quad \text{für } x > e.$$

Ebenfalls aus (35), (37) und aus (27) bzw. (28) folgt, daß

$$(42) \quad f_m(x) \text{ stetig wachsend in } x \text{ ist,}$$

und

$$(43) \quad f_m(e) = e$$

gilt. — So ist die Inverse  $f_n^{-1}(x)$  im ganzen Intervall  $[e, e']$  eindeutig definiert, da  $f_n(x)$  laut (43) und (42) von  $e$  mit  $x$  stetig wachsend aus dem Intervall  $[e, e']$  von rechts hinausläuft. Dies und  $m < n$ ,

$$f_m[f_n^{-1}(e')] < f_n[f_n^{-1}(e')] = e'$$

[vgl. (41)] sichert, daß (36) immer einen Sinn hat.

$$f_{mk}[f_n^{-1}(e')] = f_m(f_k[f_n^{-1}(e')]) = f_m[f_n^{-1}(e')]$$

[vgl. (39)] zeigt, daß die Definition (36) auch eindeutig ist.

Weiter folgt aus (36) und (41)), daß

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f_m[f_n^{-1}(e')] < f_{m+1}[f_n^{-1}(e')] = f\left(\frac{m+1}{n}\right) \quad \text{für } m+1 \leq n$$

ist, d. h. daß die Funktion  $f$  auf den rationalen Stellen wächst (da ja zwei Brüche immer auf gemeinsamen Nennern gebracht werden können) und (36), (38) bringen auch

$$(44) \quad f\left(\frac{m_1 + m_2}{n}\right) = f_{m_1+m_2}[f_n^{-1}(e')] = f_{m_1}[f_n^{-1}(e')] \circ f_{m_2}[f_n^{-1}(e')] = \\ = f\left(\frac{m_1}{n}\right) \circ f\left(\frac{m_2}{n}\right) \quad \text{für } m_1 + m_2 \leq n$$

mit sich, so daß die Funktion  $f(x)$  in den rationalen Punkten des Intervalles  $[0, 1]$  die Funktionalgleichung

$$(45) \quad f(u + v) = f(u) \circ f(v) \quad \text{für } u, v, u + v \in [0, 1]$$

erfüllt.

Aus dem Wachsen von  $f(x)$  in den rationalen Punkten folgt, daß die Folge

$$f\left(\frac{1}{n}\right)$$

mit wachsenden  $n$  echt monoton abnehmend ist. Da jedes Glied dieser Folge größer als  $e$  ist, hat sie einen Grenzwert und dieser ist gleich  $e$ , denn wäre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = d > e,$$

so wäre [vgl. (44) und (40)]:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f\left(\frac{1}{2n}\right) \circ f\left(\frac{1}{2n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) \circ \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) = d \circ d > d,$$

was unmöglich ist. Also gilt

$$(46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = e.$$

Wir können jetzt die Definition von  $f(u)$  auf das ganze reelle Intervall  $[0, 1]$  ausdehnen, indem wir für ein beliebiges  $u \in [0, 1]$  den Funktionswert  $f(u)$  als den Dedekindschen Schnitt der  $\{f(r_n)\}$  und  $\{f(R_n)\}$  mit rationalen  $r_n, R_n$  und

$$r_n < u < R_n$$

definieren. Diese Definition ist wegen (46) eindeutig und die so erhaltene stetige Funktion  $f(u)$  erfüllt (45) für alle  $u, v, u + v \in [0, 1]$ , was aus (44) durch Grenzübergang folgt.  $f(u)$  bleibt auch wachsend, da es für je zwei nichtnegative reelle  $u < u' \leq 1$  immer zwei rationale  $r < r'$  gibt, so daß  $u < r < r' < u'$  und also

$$f(u) \leq f(r) < f(r') \leq f(u')$$

gilt.

Wenn wir endlich in (45)

$$x = f(u), y = f(v)$$

einsetzen, erhalten wir unter Beachtung von (35) eben die Behauptung (33), womit der Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Setzen wir (33) in (30) ein, so erhalten wir

$$G\{f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)], z\} = f\{f^{-1}[G(x, z)] + f^{-1}[G(y, z)]\}.$$

Führen wir hier die Bezeichnungen

$$x = f(u), y = f(v) \quad (u, v \in [0, 1])$$

und

$$(47) \quad g_z(u) = f^{-1}\{G[f(u), z]\} \quad (u \in [0, 1], z \in [e, e'])$$

ein, so gilt für diese Funktion

$$(48) \quad g_z(u + v) = g_z(u) + g_z(v) \quad (u, v, u + v \in [0, 1])$$

Wir sehen von der Abhängigkeit von  $z$  momentan ab, so ist die Funktionalgleichung

$$(49) \quad g(u + v) = g(u) + g(v) \quad \text{für } u, v, u + v \in [0, 1]$$

zu untersuchen.

Aus (34) und (25) folgt

$$g_z(u) = f^{-1}\{G[f(u), z]\} \geq f^{-1}(e) = 0,$$

also die Beschränktheit (von unten) der Funktion  $g$  mit der unteren Schranke 0 für positive  $u$ . Es gilt diesbezüglich (vgl. [16], wo aber die Voraussetzungen nicht die selben sind) der

**Satz 2.** *Gilt die Funktionalgleichung (49) für  $u, v, u + v \in [0, 1]$  und ist*

$$(50) \quad g(u) \geq 0 \quad \text{für genügend kleine positive } u$$

*d. h. ist  $g(u)$  in einer rechtsseitigen Halbumgebung von 0 von unten beschränkt mit der unteren Schranke 0, so gilt*

$$(51) \quad g(u) = cu$$

*für alle  $u \in [0, 1]$ .*

**Beweis.** Aus (49) folgt

$$(52) \quad g(nu) = ng(u)$$

für positive ganze  $n$  und für  $nu \in [0, 1]$ .

Speziell gilt für  $u = \frac{1}{n}$

$$g(1) = ng\left(\frac{1}{n}\right)$$

d. h. mit  $g(1) = c$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{n}$$

und wieder wegen (52)

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = c \frac{m}{n} \quad \text{für } m \leq n.$$

(51) ist also gültig für alle rationale Punkte des Intervalles  $[0, 1]$ .



Für  $u = 0$  ist (51) auch gültig, da aus (49) mit  $u = 0$

$$g(v) = g(0 + v) = g(0) + g(v)$$

d. h.

$$g(0) = 0 = c \cdot 0$$

folgt. — Andererseits folgt aus (50)

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \geq g(u),$$

also ist  $g(u)$  monoton wachsend in  $[0, 1]$ .

Es sei nun  $u$  eine beliebige reelle Zahl in  $[0, 1]$  und  $\{r_n\}$  bzw.  $\{R_n\}$  seien wachsende bzw. abnehmende, gegen  $u$  konvergierende Folgen von rationalen Zahlen, so ist

$$r_n < u < R_n$$

und deshalb

$$c r_n = g(r_n) \leq g(u) \leq g(R_n) = c R_n.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren beide Seiten zu  $cu$ , so daß

$$g(u) = cu$$

d. h. (51) für alle  $u \in [0, 1]$  gilt, w. z. b. w.

Natürlich erfüllt auch (51) bei jedem Wert der Konstante  $c$  die Funktionalgleichung (49) immer.

Man mag bemerken, daß der Beweis von Satz 2 dem von Satz 1 recht ähnlich war. (49) ist nämlich ein Spezialfall von (45).

#### § 4. Hauptsätze

Da es sich tatsächlich um (48) statt (49) handelt, hängt  $g$  und damit die »Konstante«  $c$  noch von  $z$  ab:

$$g_z(u) = c(z) u.$$

Wegen (47) gilt also

$$(53) \quad G(x, z) = f[c(z) f^{-1}(x)].$$

Das Funktionensystem (33), (53) erfüllt übrigens die Gleichungen (29), (30) immer.

Nehmen wir noch (22) und (34) in Betracht, so haben wir

$$z = G(e', z) = f[c(z) f^{-1}(e')] = f[c(z)]$$

d. h.

$$(54) \quad c(z) = f^{-1}(z), \quad f(u) = c^{-1}(u),$$

so daß (53) und (33) in

$$(55) \quad G(x, y) = c^{-1}[c(x) c(y)],$$

und

$$(56) \quad F(x, y) = c^{-1}[c(x) + c(y)]$$

übergehen. Die Funktionen (55) und (56) erfüllen nun schon alle Bedingungen (22), (25), (27), (28), (29), (30). — Wenn wir noch

$$(57) \quad H(x, y) = F(x, y) = c^{-1}[c(x) + c(y)]$$

wegen (26) hinzunehmen, so haben wir den

**Satz 3.** *Das Funktionensystem (55), (56), (57) mit stetig wachsendem, in  $[e, e']$  definierten  $c(x)$  ist die allgemeine Lösung des für*

$$x, y, z \in [e, e'], \quad F(x, y) \leq e', \quad F(y, z) \leq e', \quad F[F(x, y), z] \leq e', \\ G[F(x, y), z] \leq e'$$

*vorausgesetzten Funktionalgleichungssystems (23), (24), falls noch (21), (22), (25) und (27) vorausgesetzt sind.*

Setzen wir (55), (56) und (57) mittels (18), (19) und (20) in (13) und in (14) ein, so erhalten wir

$$(58) \quad c[p(\mathbf{AB}/\mathbf{V})] = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{BV})]c[p(\mathbf{B}/\mathbf{V})]$$

und

$$(59) \quad c[p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V})] = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] + c[p(\mathbf{B}/\mathbf{V})].$$

— Dies gibt die Idee, die bedingten Wahrscheinlichkeiten mittels

$$(60) \quad \bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})]$$

umzudefinieren. Für die so neu definierten Wahrscheinlichkeiten folgt aus (10), (11), (12), (58) und (59) wegen (34) und (54)

$$0 = \bar{p}(\mathbf{O}/\mathbf{V}) \leq \bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}),$$

$$1 = \bar{p}(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = \bar{p}(\mathbf{W}/\mathbf{W}),$$

$$\bar{p}(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = \bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}),$$

$$\bar{p}(\mathbf{AB}/\mathbf{V}) = \bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{BV})\bar{p}(\mathbf{B}/\mathbf{V}),$$

$$\bar{p}(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V}) = \bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) + \bar{p}(\mathbf{B}/\mathbf{V}),$$

was eben das Axiomensystem (5)–(9) für  $\bar{p}$  statt  $p$  wiedergibt. So haben wir den

**Satz 4.** *Nimmt die Funktion  $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$  von  $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$  — wo  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra von Untermengen einer Menge  $\mathbf{M}$  durchläuft und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$  zusammenhängend ist — jeden Wert in  $(e, e')$  an und gelten für  $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$  die Bedingungen (10)–(15), so existiert eine stetig wachsende Funktion  $c(x)$  mit  $c(e) = 0$ ,  $c(e') = 1$  derart, daß für*

$$(60) \quad \bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})]$$

*die Bedingungen (5)–(9) erfüllt sind.*

*Ist  $\mathfrak{B}$  nicht zusammenhängend, sondern zerfällt in zusammenhängende Teile  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ , so treten, wie man leicht einsieht, an Stelle der Funktion  $c$  die Funktionen  $c_1, c_2, \dots$  für die  $c_i(e) = 0$ ,  $c_i(e') = 1$  und statt (60)*

$$\bar{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = c_i[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] \quad \text{für } \mathbf{V} \in \mathfrak{B}_i \ (i = 1, 2, \dots)$$

*gelten.*

(Eingegangen: 15. August, 1960.)



LITERATURVERZEICHNIS

- [1] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen*. Göttingen, 1929.
- [2] CARTAN, É.: *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*. (Mémorial des sci. math. 42.) Paris, 1930.
- [3] KOLMOGOROFF, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. (Ergebnisse der Math. (2) 3) Berlin, 1933.
- [4] ACZÉL, J.: «Sur les opérations définies pour nombres réels.» *Bull. Soc. Math. France* **76** (1949) 59—64.
- [5] BARNARD, G. A.: «Statistical inference.» *Journal of the Royal Statistical Society Ser B* **11** (1949) 119—149.
- [6] GOOD, I. J.: *Probability and the weighing of evidence*. Appendix III. London—New York, 1950.
- [7] RICHTER, H.: «Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. I.» *Mathematische Annalen* **125** (1952) 129—139.
- [8] RICHTER, H.: «Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II.» *Mathematische Annalen* **125** (1952) 223—234.
- [9] RICHTER, H.: «Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. III.» *Mathematische Annalen* **125** (1952) 335—343.
- [10] RICHTER, H.: «Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. IV.» *Mathematische Annalen* **126** (1953) 362—374.
- [11] RICHTER, H.: «Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. V.» *Mathematische Annalen* **128** (1954) 305—339.
- [12] RÉNYI, A.: «On a new axiomatic theory of probability.» *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 285—335.
- [13] JÁNOSSY, L.: «Remarks on the foundation of probability calculus.» *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1955) 333—350.
- [14] ACZÉL, J.: «A solution of some problems of K. Borsuk and L. Jánossy.» *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1955) 351—362.
- [15] RICHTER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. (Grundlehren der math. Wiss. LXXXVI.) Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.
- [16] ACZÉL, J.: «Miscellen über Funktionalgleichungen. I.» *Mathematische Nachrichten* **19** (1958) 87—99.

## ОБ ОБОСНОВАНИИ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Посвященная памяти К. JORDAN по случаю его 90-ого года рождения.

J. ACZÉL

### Резюме

Обобщая результаты RÉNYI [12] автор доказывает:

Если функция  $p(A/V)$  принимает все значения, принадлежащие промежутку  $(e, e')$  при условии, что  $A$  пробегает  $\sigma$ -алгебру подмножеств  $\mathfrak{A}$  произвольного множества, а  $V$  пробегает связное подмножество  $\mathfrak{B}$  от  $\mathfrak{A}$  и если она удовлетворяет условиям (10)—(14), где  $F_V(x, y)$  непрерывная, строго монотонно возрастающая по обоим переменным функция, тогда существует такая непрерывная и строго монотонная  $s$ -функция, что новая вероятностная функция, определенная через (60) удовлетворяет условиям (5)—(9).

Под связностью  $\mathfrak{B}$  мы здесь подразумеваем тот факт, что для любых  $V \in \mathfrak{B}$  и  $W \in \mathfrak{B}$  существуют такие множества  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathfrak{B}$ , что  $C_1 V \in \mathfrak{B}, C_2 C_1 \in \mathfrak{B}, \dots, WC_n \in \mathfrak{B}$ . Если это условие не выполнено, тогда  $\mathfrak{B}$  распадается на (в этом смысле) связные части и теорема изменяется, поскольку к каждой связной части принадлежит своя  $s$ -функция.





# НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕР

М. ARATÓ<sup>1</sup>

Пусть заданы на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathfrak{A})$  две вероятностные меры  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$ , и обозначим  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ , если мера  $\mathbf{P}_1$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\mathbf{P}_2$ . Если последовательность  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$  такая, что  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$  и  $\mathbf{P}_i^n$  ( $i = 1, 2$ ;  $n = 1, 2, 3 \dots$ ) обозначает меру  $\mathbf{P}_i$  на  $\mathfrak{A}_n$ , то  $\{p_n(\omega), \mathfrak{A}_n\}$  образует мартингал в пространстве  $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_2\}$ , где  $p_n(\Omega) = \frac{\mathbf{P}_1^n(d\omega)}{\mathbf{P}_2^n(d\omega)}$ , при предположении  $\mathbf{P}_1^n \ll \mathbf{P}_2^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Хорошо известно (см. например *СН. СТРИЕВЕЛ* [1]), что  $p_n(\omega) \rightarrow p(\omega)$  почти всюду по мере  $\mathbf{P}_2$ , и мера  $\mathbf{P}_1$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\mathbf{P}_2$ , тогда и только тогда, когда

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2} |p_n(\omega) - p(\omega)| = 0$$

(где  $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}$  обозначает математическое ожидание по мере  $\mathbf{P}_2$ ), и в этом случае  $p(\omega) = \frac{\mathbf{P}_1(d\omega)}{\mathbf{P}_2(d\omega)}$ .

В том частном случае, когда  $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \dots \times \mathfrak{Q}_n$  и  $\mathbf{P}_i^n = \overline{\mathbf{P}}_1^i \times \dots \times \overline{\mathbf{P}}_i^i \times \dots \times \overline{\mathbf{P}}_i^i$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\overline{\mathbf{P}}_i^k$  ( $i = 1, 2$ ) обозначает меру  $\mathbf{P}_i$  на  $\mathfrak{Q}_k$  и назовем этот случай прямыми произведениями мер, известна теорема КАКУТАНИ [2], что  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$  тогда и только тогда, когда

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2} (\sqrt{p_n(\omega)}) > 0.$$

Ж. НАЛЕК [3] доказал, что если выполняется условие

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_1} \log p_n(\omega) < \infty,$$

то  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ .

<sup>1</sup> Москва.

В недавней статье P. RÉVÉSZ [4] доказал, что  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ , если  $\mathbf{P}_2^n = \overline{\mathbf{P}}_2^1 \times \dots \times \overline{\mathbf{P}}_2^n$ ,  $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{L}_1 \times \dots \times \mathfrak{L}_n$ , и выполняется условие

$$(4) \quad \left| \frac{\mathbf{P}_1^n(A)}{\mathbf{P}_1^{n-1} \times \overline{\mathbf{P}}_2^n(A)} - 1 \right| < \delta_n \text{ (для } A \in \mathfrak{A}_n \text{ равномерно),}$$

где

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < \infty.$$

(В статье RÉVÉSZ-а вместо  $\overline{\mathbf{P}}_2^n$  используется  $\overline{\mathbf{P}}_1^n$ , но доказательство его без изменения переносится на этот случай.)

В этой заметке я хочу показать эквивалентность условия (1) и (2) при условии теоремы КАКУТАНИ, и доказать теорему RÉVÉSZ-а, кроме того показать примеры, в которых имеет место абсолютно непрерывность, но не выполняется условия ХАЛЕК и RÉVÉSZ-а.

1. Из неравенств

$$\int \left| \sqrt{p_n(\omega)} - \sqrt{p_m(\omega)} \right|^2 \mathbf{P}_2(d\omega) \leq \int |p_n(\omega) - p_m(\omega)| \mathbf{P}_2(d\omega)$$

и (по неравенству Коши-Буняковского)

$$\begin{aligned} \int |p_n(\omega) - p_m(\omega)| \mathbf{P}_2(d\omega) &= \int \left| \sqrt{p_n(\omega)} - \sqrt{p_m(\omega)} \right| \left| \sqrt{p_n(\omega)} + \sqrt{p_m(\omega)} \right| \mathbf{P}_2(d\omega) \leq \\ &\leq 2 \int \left| \sqrt{p_n(\omega)} - \sqrt{p_m(\omega)} \right|^2 \mathbf{P}_2(d\omega) \end{aligned}$$

следует, что  $p_n(\omega)$  сходится в среднем тогда и только тогда, когда  $\sqrt{p_n(\omega)}$  сходится в среднем квадратичном. Используя, что  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k < 0$  ( $0 < a_n \leq 1$ )

тогда и только тогда, когда  $\prod_{k=n+1}^m a_k \rightarrow 1$ , при  $n, m \rightarrow \infty$ , и

$$\begin{aligned} \int \left| \sqrt{p_m(\omega)} - \sqrt{p_n(\omega)} \right|^2 \mathbf{P}_2(d\omega) &= \int \left| \prod_{k=n+1}^m \sqrt{\bar{p}_k(\omega)} - 1 \right|^2 p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) = \\ &= \int \left| \prod_{k=n+1}^m \sqrt{\bar{p}_k(\omega)} - 1 \right|^2 \mathbf{P}_2(d\omega) = 2 - 2 \int \prod_{k=n+1}^m \sqrt{\bar{p}_k(\omega)} \mathbf{P}_2(d\omega) \end{aligned}$$

(где  $\bar{p}_k(\omega) = \frac{\mathbf{P}_1^k(d\omega)}{\mathbf{P}_2^k(d\omega)}$ ) следует, что при условии теоремы КАКУТАНИ  $\sqrt{p_n(\omega)}$  сходится в среднем квадратичном, т. е. в среднем сходится  $p_n(\omega)$ . Наоборот, если  $p_n(\omega)$  сходится в среднем, то  $\sqrt{p_n(\omega)}$  в среднем квадратичном и второй член последнего равенства стремится к 0, т. е. выполняется условие (2).



2. Теорема Révész-а следует из следующего ряда равенств и неравенств

$$\begin{aligned} \left( \int |p_m(\omega) - p_n(\omega)| \mathbf{P}_2(d\omega) \right)^2 &= \left( \int \left| \frac{p_m(\omega)}{p_n(\omega)} - 1 \right| p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) \right)^2 \leq \\ &\leq \int \left| \frac{p_m(\omega)}{p_n(\omega)} - 1 \right|^2 p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) = \int \left( \frac{p_m(\omega)}{p_n(\omega)} \right)^2 p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) - 1 \leq \\ &\leq \prod_{j=n+1}^m (1 + \delta_j^2) - 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{p_m^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) &= \int \frac{p_{m-1}^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} \left( \frac{p_m(\omega)}{p_{m-1}(\omega)} - 1 + 1 \right)^2 p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) = \\ &= \int \frac{p_{m-1}^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} \left[ \left( \frac{p_m(\omega)}{p_{m-1}(\omega)} - 1 \right)^2 + 1 \right] p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) \leq \\ &\leq (1 + \delta_m^2) \int \frac{p_{m-1}^2(\omega)}{p_n^2(\omega)} p_n(\omega) \mathbf{P}_2(d\omega) \leq (1 + \delta_{n+1}^2) \dots (1 + \delta_m^2). \end{aligned}$$

Мы использовали, что

$$\int \frac{p_{m-1}^2}{p_n^2} (p_m - p_{m-1}) \frac{p_n}{p_{m-1}} \mathbf{P}_2(d\omega) = 0$$

и по условию (4)

$$\left( \frac{p_m(\omega)}{p_{m-1}(\omega)} - 1 \right)^2 \leq \delta_m^2.$$

Таким образом,  $p_n(\omega)$  сходится в среднем и поэтому  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$  по условию (1).

3. Легко показать, что, если независимые случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  принимают значения 0, 1 с вероятностью  $\alpha_n, 1 - \alpha_n$  по мере  $\mathbf{P}_1$  и  $\beta_n, 1 - \beta_n$  по мере  $\mathbf{P}_2$ , то условие (2) равносильно тому, что

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\beta_n})^2 + (\sqrt{1 - \alpha_n} - \sqrt{1 - \beta_n})^2 \} < \infty.$$

В том случае, когда

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \quad \beta_n = \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \quad \left( 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \right)$$

выполняется условие (6), но (3) нет. В том случае, когда

$$\alpha_n = \left( \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} + \frac{1}{n^\delta} \right)^2, \quad \beta_n = \frac{1}{n^{2\delta}} \quad (\varepsilon > 0, \delta > 1/2, \delta - \varepsilon > 1/4)$$

выполняется условие (6), но (5) нет.

(Поступила: 25 августа 1960 г.)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] STRIEBEL, CH.: "Densities for stochastic processes." *Annals of Mathematical Statistics* **30** (1950) 559—567.
- [2] KAKUTANI, S.: "On equivalence of infinite product measures." *Annals of Mathematical Statistics* **49** (1948) 214—224.
- [3] HÁJEK, J.: "A property of  $I$ -divergence of marginal probability distributions." *Чехословацкий Математический Журнал* **8** (1958) 460—464.
- [4] RÉVÉSZ, P.: "A limit distribution theorem for sums of dependent random variables." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 125—131.

## SOME REMARKS ON THE ABSOLUTE CONTINUITY OF MEASURES

by

M. ARATÓ

## Abstract

The following question was considered already by many authors: Let  $(\Omega, \mathfrak{A})$  be a measurable set, let  $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$  denote a sequence of  $\sigma$ -algebras such that

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}.$$

Let be defined two sequences  $\mathbf{P}_i^{(1)}, \mathbf{P}_i^{(2)}, \dots$  ( $i=1, 2$ ) of probability measure on the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  resp. and two probability measures  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  on  $\mathfrak{A}$ . We assume, that the sequences

$$\mathbf{P}_i^{(1)}, \mathbf{P}_i^{(2)}, \dots, \quad (i = 1, 2)$$

are compatible, and

$$\mathbf{P}_1^{(n)} \ll \mathbf{P}_2^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

We may ask: under what conditions does

$$\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$$

hold.

The aim of this paper is to consider the connections between the different results on this question.

# ON GALTON'S RANK ORDER TEST

KÁROLY SARKADI

## § 1. Introduction

In this note we shall give a simple proof for a theorem of CHUNG and FELLER [1], as well as for its generalized forms, and make some remarks on some connected problems.

Let us consider a random sequence of  $k$   $(+1)$ 's and  $k$   $(-1)$ 's and denote it<sup>1)</sup> by  $\mathbf{C}$ . There are  $\binom{2k}{k}$  possible sequences  $C$  and each of them is supposed to be equiprobable. Let  $S_i = S_i(C)$  be the sum of the first  $i$  members of  $C$ . Let us denote by  $N'_k = N'_k(C)$  the number of the positive members in the sequence  $S_1, S_3, \dots, S_{2k-1}$  ( $N'_k$  is the so-called Galton-statistic).

The theorem of CHUNG and FELLER [1] states:  $(N'_k = N'_k(\mathbf{C}))$ .

### Theorem 1.

$$\mathbf{P}\{N'_k = i\} = \frac{1}{k+1} \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

This theorem was extended first by GNEDENKO and MIHALEVICH. They considered a random sequence of  $k = mp$   $(+1)$ 's and  $m$   $(-p)$ 's where  $p$  is integer.  $S_i$  being defined as before, let us denote by  $N'_k$  the number of the positive members in the sequence

$$\begin{aligned} &S_1, \quad S_2, \quad \dots, S_p, \\ &S_{p+2}, \quad S_{p+3}, \quad \dots, S_{2p+1} \\ &S_{2p+3}, \quad S_{2p+4}, \quad \dots, S_{3p+2} \\ &\dots\dots\dots \\ &S_{k+m-p}, S_{k+m-p+1}, \dots, S_{k+m-1} \end{aligned}$$

The theorem of GNEDENKO and MIHALEVICH [2] states:

<sup>1)</sup> Random variables will be distinguished from their actual values by printing their symbols in bold type.



**Theorem 2.**

$$P\{N'_k = i\} = \frac{1}{k+1} \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

In 1953, SPARRE ANDERSEN proved the following theorem:

Let be  $X_1, X_2, \dots, X_n$  symmetrically dependent random variables<sup>2)</sup> with  $\sum_{i=1}^n X_i = 0$ . Let us denote by  $S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i$  and let be  $P\{S_1 S_2 \dots S_{n-1} = 0\} = 0$ . Let be  $N_n$  defined as the number of positive members in the sequence  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ . Then ([3], Theorem 2/1<sup>o</sup>)

**Theorem 3.**

$$P\{N_n = i\} = \frac{1}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

We wish to mention that although Theorem 3 is closely connected to theorems 1 and 2 it is no generalization in the proper sense.

Several proofs are known for Theorem 1 [4], [5], the simplest one due to HODGES [6]. However, even this proof seems to be complicated compared to the simplicity of the theorem itself.

For the theorem of SPARRE ANDERSEN, SPITZER [7] gave an elegant, simple proof, but his method cannot be applied to prove the theorem of CHUNG and FELLER, nor that of GNEDENKO and MIHALEVICH.

In § 2 we give a method for proving each of the three theorems which is not more complicated than that of SPITZER.

In § 3 we consider some connected problems.

**§ 2. The new proofs**

Consider first the theorem of CHUNG and FELLER. Our proof — as well as that of HODGES — is based on a one by one transformation mapping the sequences  $C$  into sequences  $C'$  for which  $N'_k(C') = N'_k(C) - 1$ .

Let be  $N'_k(C) \geq 1$ . We divide  $C$  into three subsequences of consecutive members:  $C_1, C_2, C_3$ .  $C_1$  is the shortest beginning subsequence of  $C$ , which sums to 1 and  $C_2$  the shortest subsequence immediately following  $C_1$  which sums to  $-1$ . Our transformation consists of changing the order of the subsequences  $C_1$  and  $C_2$ . (Fig. 1).

In the transformed sequence  $C_2$  will be the shortest beginning subsequence which sums to  $-1$  and  $C_1$  the shortest subsequence immediately following  $C_2$  which sums to 1, thus the transformation is a one by one.

Further let be  $2x+1$  the length of  $C_1$  and  $2y+1$  the length of  $C_2$ . Then the first  $x$  members of the sequence  $S_1(C), S_3(C), \dots, S_{2k-1}(C)$  are negative,  $S_{2x+1} = 1$  and the following  $y$  members are positive. On the other hand, the sequence  $S_1(C'), S_3(C'), \dots, S_{2k-1}(C')$  has  $y$  positive members at the beginning,  $S_{2y+1} = -1$  and the following  $x$  members are negative. The

<sup>2)</sup> This means that their joint distribution function is a symmetrical function of its arguments [3]. Also the terms "equivalent random variables", "interchangeable random variables" are used for this notion in the literature.

remaining subsequences are identical from which  $N'_k(C') = N'_k(C) - 1$  follows.

Now we turn to the theorem of SPARRE ANDERSEN. It is proved first the special case if the components of the vector  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  are the random permutations of the constants  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . In this case let be  $C_1$  the shortest beginning subsequence which sums to a positive value and  $C_2$  the following subsequence having a negative partial sum. We obtain in the same manner as before that the change of order of  $C_1$  and  $C_2$  diminishes

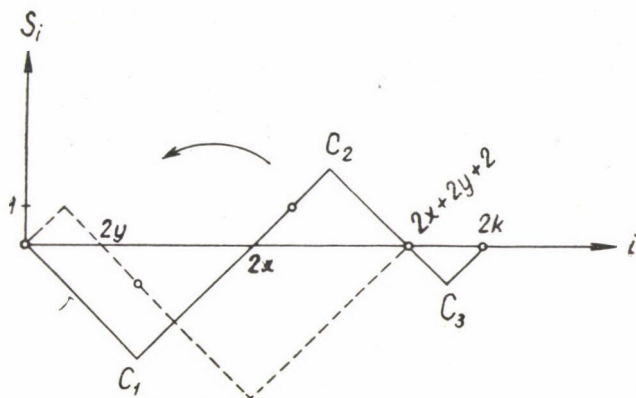


Figure 1.

the number of positive members in the sequence  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  by unity. Then the general form of the theorem can be proved by stating that the conditional distribution of  $N_n$  with respect to the order statistics of the  $X_i$ 's does not depend on the condition.

Now let us consider the theorem of GNEDENKO and MIHALEVICH. We prove the following generalization of this theorem:

Let be  $X_1, X_2, \dots, X_n$  symmetrically dependent random variables with  $\sum_{i=1}^n X_i = 0$ ; let be always exactly  $k$  of the  $X_i$ 's equal to 1, and let the other  $n-k$  take on negative integral values. Let us denote by  $R_i = X_1 + X_2 + \dots + X_{r_i}$  where  $r_i$  is the rank of the  $i$ -th + 1 in the sequence  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Let be  $N'_k$  defined as the number of positive members in the sequence  $R_1, R_2, \dots, R_k$ . Then we have

**Theorem 4.**

$$P\{N'_k = i\} = \frac{1}{k+1}$$

$$(i = 0, 1, \dots, k).$$

Evidently if we apply in this case the same transformation and if the subsequences  $C_1$  and  $C_2$  contained  $x$  and  $y$  (+1)'s, respectively, i. e. the

sequence  $\{R_i\}$  began with  $x - 1$  negative terms and  $y + 1$  positive terms then after applying the above transformation it will begin with  $y$  positive and  $x$  negative terms which proves Theorem 4.

### § 3. Connected problems

Let us consider again the random sequence of  $k$   $(+1)$ 's and  $k$   $(-1)$ 's. Let  $T_k = T_k(C)$  be the first maximum place of  $S_i$  ( $S_0 = 0$ ). Another theorem of SPARRE ANDERSEN ([3], formula 5.10) states that

#### Theorem 5.

$$P\{T_k = 2i\} = P\{T_k = 2i + 1\} \\ (i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

If we exclude the case  $T_k = 0$ , i. e. the first positive maximum place is considered, then the sign  $+$  on the right side changes to  $-$ . This form of the theorem is due to VINCZE [8].

A modified, symmetric form of these theorems is the following:

Let be  $U_k$  a randomly chosen value from the maximum places ( $0$  and  $2k$  are regarded as the same place). Then we have

#### Theorem 6.

$$P\{U_k = i\} = \frac{1}{2k} \quad (i = 0, 1, \dots, 2k - 1).$$

This theorem can be simply proved by the aid of the transformation used by SPARRE ANDERSEN. This transformation consists of transposing the first element of the sequence to the end. Evidently this transformation shifts every maximum place of  $S_k$  to left by unity *mod*  $2k$ , which proves theorem 6. Theorem 5 can be also simply verified in this way by stating that the transformation shifts the first maximum place by unity if it was  $\geq 1$ , on the other hand it will be odd if it was  $0$  before the transformation.

The generalization for the sequence of symmetrically dependent random variables ([3], Theorem 2/2°) can be treated in the same way.

(Received September 15, 1960.)

### REFERENCES

- [1] CHUNG, K. L.—FELLER, W.: „Fluctuations in coin tossing.” *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1943) 605—608.
- [2] Гнеденко, Б. В. — Михалевич, В. С.: «Две теоремы о поведении эмпирических функции распределения». *Доклады АН СССР* **85** (1952) 25—27.
- [3] SPARRE ANDERSEN, E.: “On the fluctuations of sums of random variables.” *Math. Scand.* **1** (1953) 263—285.



- [4] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. 1. ed Wiley, New York, 1950; Chapter 12, problem 4., p. 263.
- [5] Гнеденко, Б. В. — Михалевич, В. С.: «О распределении числа выходов одной эмпирической функции распределения над другой.» *Доклады АН СССР* **82** (1952) 841—843.
- [6] HODGES, J. L.: „Galton's rank order test.” *Biometrika* **42** (1952) 261—262.
- [7] SPITZER, F.: „A combinatorial lemma and its application to probability theory.” *Trans. Am. Math. Soc.* **82** (1956) 323—339.
- [8] VINCZE, I.: „On some joint distributions and joint limiting distributions in the theory of order statistics, II.” *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **4** (1959) 29—47.

## О РАНГОВОМ КРИТЕРИИ GALTON-A

K. SARKADI

### Резюме

В статье дается новое и простое доказательство одной теоремы Chung-а и Feller-а [1], ее обобщения происходящего от Гнеденко и Михалевич-а [2] а также одной теоремы Sparre Andersen-а [3], высказывающих равномерное распределение критерии Galton-а и его обобщения. Сущность доказательства состоит в том, что фигурирующая там последовательность разлагается на три последовательности: на наиболее короткую начальную последовательность  $C_1$  сумма которой положительна, на наиболее короткую подпоследовательность  $C_2$ , состоящую из элементов последующих после  $C_1$  таких, что ее сумма отрицательна и на остальную подпоследовательность  $C_3$ . Перемена местами  $C_1$  и  $C_2$  уменьшает значение критерии Galton-а на единицу и примененное при этом преобразование взаимно-однозначно.



# L'ANALYSE D'EFFICACITÉ DE LA MODERNISATION TECHNIQUE DE LA PRODUCTION (UNE APPROXIMATION)

par

PÉTER BOD

L'économie socialiste se développe sur la base de la reproduction élargie. L'agrandissement de la production sociale impose l'accroissement de la capacité de l'appareil entier de production. Les nouveaux moyens de production peuvent fonctionner ou bien sur un niveau stationnaire ou bien sur un niveau plus élevé de la technique. Pour autant que nous augmentions la production sans changer le niveau technique — le besoin en main-d'oeuvre augmente approximativement en proportion de l'accroissement de la production. Mais élargir la production sur une base plus avancée de la technique conduit à une économie de la main-d'oeuvre comparée avec le même développement sur un niveau technique constant.

De cette façon — l'épargne de la main-d'oeuvre réalisable par la modernisation technique de la production peut être considérée comme une mesure objective de cela.

Nous allons montrer ci-dessous comment on peut s'approcher de l'estimation de cette sorte de développement technique au niveau de l'économie nationale. Par la suite nous supposons pouvoir disposer d'une matrice technologique de l'économie nationale, qui a été calculée en vertu d'un bilan de «dépense-émission» (input-output) composé dans une désagrégation des groupes de produits. La désagrégation de la balance doit être assez détaillée, pour que nous puissions considérer la production des divers secteurs comme homogène. Nous supposons enfin que les produits ont une différente valeur d'usage; l'un ne peut pas remplacer l'autre, et les dépenses et les émissions de la production totale sont mesurées en unités naturelles.

Nous représentons par:

$q_{ik}$  la dépense besoin du  $i$ -ième produit pour obtenir l'unité du  $k$ -ième produit (Coefficients technologiques). ( $i = 1, 2, \dots n$ ), ( $k = 1, 2, \dots n$ ).

$Q$  la matrice composée des coefficients technologiques.

$R = (E - Q)^{-1}$  l'inverse du type Leontieff de la matrice  $Q$ .

$m_i$  la durée du travail direct par homme-heure nécessaire pour produire l'unité du  $i$ -ième produit.

$q$  le vecteur de la production globale d'économie nationale.

$r$  le vecteur de la production finale d'économie nationale.

Nous formulons d'abord le taux d'économie réalisable à l'aide d'un investissement, qui améliore la technique dans le  $k$ -ième groupe de la production et coûte  $K$  Ft. Nous entendons par «investissement modernisant» (qui améliore



la technique) un investissement effectué de telle façon qu'il assure une production stationnaire, mais d'une productivité plus élevée. (Cela veut dire, en conséquence de l'investissement qu'aucun des composants du vecteur  $\mathbf{m}$  ne croît, mais l'un d'eux diminue effectivement.)

La modernisation amène à un changement dans la  $k$ -ième colonne de la matrice technologique de l'économie nationale. Soient

$$(1) \quad q'_{ik} = q_{ik} + \Delta q_i$$

les coefficients modifiés.

Le changement peut être considéré comme une modification de la matrice initiale avec une matrice de rang un

$$(2) \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{Q} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^*$$

où

$$(3) \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{c}^* = (0, 0, \dots, \overset{k}{-1}, \dots, 0)$$

La nouvelle forme de la matrice  $(\mathbf{E} - \mathbf{Q})$  sera :

$$(4) \quad (\mathbf{E} - \mathbf{Q}') = (\mathbf{E} - \mathbf{Q} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^*).$$

L'inverse de cette matrice (d'après les formules de SHERMAN, MORISSON et BARTHLETT):

$$(5) \quad \mathbf{R}' = (\mathbf{E} - \mathbf{Q}')^{-1} = \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^*}{1 + \mathbf{c}^* \mathbf{R} \mathbf{b}} \right) \cdot \mathbf{R}.$$

Le perfectionnement technique modifie aussi le besoin spécifique de main d'oeuvre dans le  $k$ -ième groupe de production. La forme modifiée du vecteur correspondant est:

$$(6) \quad \mathbf{m}'^* = (m_1, m_2, \dots, m_k - \Delta m_k, \dots, m_n)$$

Le besoin complet de main-d'oeuvre pour gangner une certaine production finale en projet  $\mathbf{r}$  au moyen de la technique ancienne est

$$(7) \quad m_0 = \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$$

Le besoin complet de main-d'oeuvre pour gagner la même production finale après la modernisation technique perfectuée dans le  $k$ -ième groupe de l'économie nationale est:

$$(8) \quad m'_0 = \mathbf{m}'^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{m}'^* \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^*}{1 + \mathbf{c}^* \mathbf{R} \mathbf{b}} \right) \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}.$$

L'épargne de main-d'oeuvre obtenue

$$(9) \quad \Delta m_0 = m_0 - m'_0.$$

Tous les forints de l'investissement mentionné rendent possible l'économie de  $\frac{\Delta m_0}{K}$  homme-heures par an à côté d'une production finale stationnaire d'éco-

nomie nationale. Il est possible alors de convertir l'épargne de main-d'oeuvre en l'épargne de salaire et nous obtenons ainsi le taux de l'intérêt de l'investissement, en prenant pour intérêt l'épargne de salaire.

Or dans la pratique économique il existe une grande variété de possibilités pour réaliser les modernisations techniques les plus diverses. Ces modernisations sont d'efficacité différentes. Il faut donc examiner dans quels groupes de l'économie il est plus avantageux d'exécuter les investissements, vu que les moyens matériels, qui sont à la disposition de la modernisation technique — sont restreints.

Il est évident, que parmi les conditions momentanées données de l'économie nationale et parmi les possibilités actuelles de la technique nouvelle — il existe, même dans chacun des groupes de la production, plusieurs possibilités de développement technique.

Mais il nous semble convenable de choisir dans une seule branche seulement une solution bien définie.

Nous considérons comme optimal pour l'économie nationale une politique d'investissement, qui est réalisable par les moyens matériels donnés et qui rend possible une épargne maximum de main d'oeuvre. Ce problème d'optimum conduit à la programmation linéaire discrète.

Soit  $x_k^{(j)}$  une variable discrète, qui peut prendre les valeurs 1 et 0.  $x_k^{(j)} = 1$  signifie que nous réalisons dans le  $k$ -ième secteur la modernisation avec le numéro  $j$ . Cela demande une somme de  $K_k^{(j)}$  Ft. et rend possible une épargne de main-d'oeuvre de  $\Delta m_{k0}^{(j)}$  homme-heures.  $x_k^{(j)} = 0$  signifie que cette modernisation n'est pas réalisée.

Le problème d'optimum peut être rédigé de la manière suivante:

On cherche un système de valeurs  $x_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ) tel que

$$(10) \quad \sum_{k,j} \Delta m_{k0}^{(j)} \cdot x_k^{(j)}$$

soit maximum avec les conditions limitées

$$(11) \quad \begin{aligned} \sum_{k,j} K_k^{(j)} \cdot x_k^{(j)} &\leq K \\ \sum_j x_k^{(j)} &\leq 1 (k = 1, 2, \dots, n) \\ x_k^{(j)} &= \begin{cases} 0 & (k = 1, 2, \dots, n) \\ 1 & (j = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème peut être résolu avec les méthodes connues.

*Quelques remarques d'économie politique :*

1. Nous avons supposé dans le modèle entre autres que:

a) Les coefficients technologiques ne varient que sous l'influence d'un «investissement modernisant.»

b) Il est possible d'évaluer «ex ante» l'influence d'un «investissement modernisant» quelconque — plané dans un certain secteur — sur les coefficients du secteur.



c) Les divers variantes des investissements sont, du côté des possibilités matérielles, également réalisables.

d) La production globale nécessaire pour la production finale fixée est réalisable (du point de vue des capacités) aussi après avoir perfectionné les «investissements modernisants», bien que ceux-ci modifient la structure de la production globale.

2. Il faut noter que le modèle ne peut pas servir directement à distribuer dans la pratique le fond d'investissement de l'économie nationale. C'est ainsi à cause des hypothèses appliquées; en premier lieu à cause de l'hypothèse de l'«investissement modernisant», ce qui n'est qu'une abstraction. Dans la pratique un investissement améliore d'une part la technique et augmente d'autre part simultanément les capacités de la production. Par delà il est impossible de partager le fond d'investissement de l'économie nationale en deux fonds partiels — l'un pour les «investissements modernisants» et l'autre pour ceux qui rendent possible l'élargissement de la production. Le modèle peut nous aider pour acquérir des informations approximatives concernant l'efficacité de l'amélioration de la technique de la production dans les divers secteurs de l'économie nationale.

3. Nous pouvons utiliser le modèle pour développer les possibilités d'atteindre une épargne maximum de la main d'oeuvre dans un grand complexe industriel, si nous possédons une matrice technologique, décrivant les relations intersectorielles du complexe

(Reçu le 30 Septembre 1960.)

## **К ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОГО УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА (ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ПРОБЛЕМЕ)**

P. BOD

### **Резюме**

Техническое усовершенствование производства делает возможным произвести множество изделий, удовлетворяющее тождественный волюмента окончательной, общественной потребности, затрачивая меньше общественного труда. Автор указывает, что экономия работы, которая может быть таким образом сэкономлена с помощью технического усовершенствования, может рассматриваться как объективная мера эффективности технической усовершенствования.

Автор определяет понятие «усовершенствующего капиталовложения» и показывает, что в явном виде можно выразить всю экономию затраты общественного труда, которую можно добиться модернизацией в некоторой отрасли промышленности.

С помощью дискретного линейного программирования можно найти наиболее благоприятное распределение имеющихся материальных средств для «модернизирующих капиталовложений» между отдельными отраслями народного хозяйства.

Ввиду того, что «модернизирующее капиталовложение» фактически обычно не существует — капиталовложения одновременно увеличивают и производственную мощность — с помощью модели можно получить лишь приблизительную информацию относительно того, в каких отраслях наиболее эффективно усовершенствование техники. Если модель применяем к какой-нибудь большой промышленной единице — технологическая матрица отображает взаимные связи между частями данной промышленной единицы — можно непосредственно изучать возможности мер, приводящих к наиболее эффективному увеличению производительности.



# PRIMITIV-REKURSIVE WORTBEZIEHUNGEN IN DER PROGRAMMIERUNGSSPRACHE »ALGOL 60«

von

RÓZSA PÉTER

1. In der Zeitschrift »Numerische Mathematik« ist in diesem Jahr ein Referat erschienen über die algorithmische Sprache »Algol 60«, welche zum Zweck der Programmierung von Rechenautomaten konstruiert wurde. Darin werden Definitionen von gewissen Prädikaten angegeben, die für den ersten Augenblick zirkelhaft aussehen; es wird aber die Bemerkung gemacht, dass es sich dabei um gewisse Rekursionen handelt. Tatsächlich ergeben sich bei exakterer Fassung die genannten Prädikate als primitiv-rekursive Beziehungen auf einer Wortemenge.

2. Die sogenannten »Worte« einer Wortemenge entstehen ähnlich wie die natürlichen Zahlen, nur statt aus 0 ausgehend eine einzige Nachfolgerfunktion zu benutzen, geht man hier aus dem üblich mit  $A$  bezeichneten leeren Wort aus, und benutzt zur Bildung der Worte das Anknüpfen der »Buchstaben« eines »Alphabetes«. In einer im Acta Hungarica erscheinenden Arbeit, worüber ich schon am Warschauer Symposium über infinitistische Methoden der Grundlagenforschung in 1959 berichtet habe, habe ich allgemein die »zahlenartig aufbaubaren Mengen«, darunter als einen Spezialfall auch die Wortemengen, und die auf diesen definierbaren rekursiven Funktionen untersucht. Es werden hier die Ergebnisse dieser Arbeit verwendet.

Das Schema der primitiven Rekursion auf einer Wortemenge  $\mathfrak{M}$  mit dem Alphabet  $\mathfrak{A} = \{ \dots, a_i, \dots \}$  lautet:

$$f(A) = k,$$

dann, falls  $a_i \in \mathfrak{A}$

$$(D) \quad f(a_i) = g_{a_i},$$

endlich, wenn  $a_i, a_j \in \mathfrak{A}$ ,

$$f(a_i x a_j) = g'_{a_j}(a_i x, x a_j, f(a_i x), f(x a_j)),$$

wobei  $k$  konstant,  $g_{a_i}$  bei jedem  $a_i$  konstant, und  $g'_{a_j}$  für jedes  $a_j$  eine bereits definierte Funktion ist (natürlich können dabei auch Parameter auftreten, diese schreibe ich der Kürze halber nicht aus).

$a_i x, x a_j$  sind die »unmittelbaren Vorgänger« von  $a_i x a_j$ , d. h. solche, die um 1 weniger Buchstaben enthalten. Als Vorgänger eines Wortes gelten seine zusammenhängende Bestandteile; für diese wird auch eine zweckmässige

Anordnung angegeben. In dieser Anordnung sind die Vorgänger des Wortes  $x = a_1 a_2 \dots a_n$ , wobei  $a_i \in \mathfrak{A}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  ist:

$$A, a_1, a_2, a_1 a_2, \dots, a_{n-1}, \dots, a_1 a_2 \dots a_{n-1}, a_n, \dots, a_2 a_3 \dots a_n, a_1 a_2 \dots a_n.$$

Die unmittelbaren Vorgänger von  $x$  sind für  $n > 1$

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_2 a_3 \dots a_n;$$

jedes  $a_i \in \mathfrak{A}$  hat den einzigen echten Vorgänger  $A$ . Man sieht, dass alle echten Vorgänger von  $x$  Vorgänger seiner unmittelbaren Vorgänger sind. Als Zeichen dafür, dass  $y$  ein Vorgänger bzw. echter Vorgänger von  $x$  ist, wird

$$y \leq x \quad \text{bzw.} \quad y < x$$

verwendet.

Eine Wortfunktion ist in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursiv, wenn sie von dem leeren Wort  $A$ , von der charakteristischen Funktion der Gleichheit und von den Anknüpfungsfunktionen  $xa_i$  ausgehend, wo  $a_i \in \mathfrak{A}$ , durch endlichviele Substitutionen und primitive Rekursionen aufgebaut werden kann.

Eine Wortbeziehung  $B(x_1, \dots, x_n)$  ist primitiv-rekursiv in  $\mathfrak{M}$ , wenn ihre charakteristische Funktion primitiv-rekursiv ist, welche etwa wie folgt definiert werden kann:

$$b(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} A, & \text{wenn } B(x_1, \dots, x_n) \\ a_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $a_0$  ein festes Element des Alphabets ist.

Ich habe bewiesen, dass jeder Wortefolge  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ein Wort  $c_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$  als für festes  $n$  in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursive Funktion derart zugeordnet werden kann, dass sich daraus die Glieder  $x_0, x_1, \dots, x_n$  bzw. die »Länge«  $n$  der Folge mit Hilfe von in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursiven Funktionen  $k_i(x)$  bzw.  $\text{long}(x)$  folgendermassen ergeben: für  $i = 0, 1, \dots, n$

$$x_i = k_i(c_n(x_0, \dots, x_n))$$

und

$$n = \text{long}(c_n(x_0, \dots, x_n)).$$

Mit diesen lässt sich eine Wertverlaufsfunktion  $\varphi(x)$  einer Funktion  $f(x)$  folgenderweise definieren: wenn

$$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s = x$$

sämtliche Vorgänger von  $x$  sind, in der genannten Reihenfolge, dann sei

$$\varphi(x) = c_s(f(\bar{x}_0), f(\bar{x}_1), \dots, f(\bar{x}_s)).$$

Daraus ergibt sich  $f(\bar{x}_i)$  für  $i \leq s$  als

$$f(\bar{x}_i) = k_i(\varphi(x));$$

ferner gilt

$$s = \text{long}(\varphi(x)).$$

Wird in der Definition (D)  $f(a_i x)$  und  $f(ax_j)$  durch  $\varphi(a_i x)$  bzw.  $\varphi(ax_j)$  ersetzt, so wird aus (D) eine Wertverlaufsrekursion (D\*); und es ist leicht







$F$  bereits ein Faktor und  $P$  ein Primausdruck ist, so ist  $F$  hoch  $P$ , mit der linearen Bezeichnung im Algol

$$F \uparrow P,$$

auch ein Faktor. Wird das Prädikat » $x$  ist ein Faktor« mit  $F(x)$  bezeichnet, und » $x$  ist Primausdruck« mit  $P(x)$ , so kann diese Definition exakt wie folgt aufgeschrieben werden:

$$F(x) \equiv P(x) \vee (Ey) (Ez) [F(y) \& P(z) \& x = y \uparrow z].$$

Dabei sind hier die Quantoren beschränkt, und zwar ist sowohl  $y$  als auch  $z$  ein echter Vorgänger von  $x$ . Dies benutzend könnte man, falls  $P(x)$  bereits eine primitiv-rekursive Beziehung in  $\mathfrak{M}$  wäre, auch  $F(x)$  als eine solche nachweisen.

Es tritt aber auch eine weitere Komplikation auf: in der Definition von  $P(x)$  wird auch das Prädikat »arithmetischer Ausdruck zu sein« verwendet, und in der Definition dieses Prädikats  $A(x)$  wird wieder  $F(x)$  benutzt. Das scheint nun wieder zirkelhaft zu sein.

In der exakten Fassung kommt aber daraus wieder kein Zirkel, sondern eine simultane Definition für  $F(x)$ ,  $P(x)$ ,  $A(x)$  und für weitere, in der Definition auftretende Prädikate heraus, worin z.B.  $P(x)$  wiederum mit Benutzung solcher  $A(y)$  definiert wird, wobei  $y$  echter Vorgänger von  $x$  ist.

Statt dieser sehr langwierigen Definition möchte ich hier eine einfachere simultane Definition nur zweier Prädikate behandeln; aber der dabei benutzte Gedankengang lässt sich ganz ähnlich auf alle im »Algol 60« vorkommenden Definitionen anwenden.

4. Sei die simultane Definition der Beziehungen  $F_0(x)$  und  $F_1(x)$  (dementsprechend, dass das leere Wort z. B. auch als ein spezieller arithmetischer Ausdruck gelten kann): für  $r = 0, 1$

$$F_r(A) = \text{wahr},$$

und für  $x \neq A$

$$F_r(x) \equiv (Ey) (Ez) [y, z < x \& F_0(y) \& F_1(z) \& x = g_r(y, z)],$$

wobei  $g_0(y, z)$  und  $g_1(y, z)$  in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursive Funktionen sind. Ich werde beweisen, dass  $F_0(x)$  und  $F_1(x)$  primitiv-rekursive Beziehungen in  $\mathfrak{M}$  sind, d. h. dass ihre charakteristische Funktionen primitiv-rekursiv sind, welche etwa derart definiert werden können: für  $r = 0, 1$

$$f_r(x) = \begin{cases} A, & \text{falls } F_r(x) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ausführlich ausgeschrieben erhält man für  $r = 0, 1$

$$f_r(A) = A$$

und für  $x \neq A$

$$f_r(x) = \begin{cases} A, & \text{falls } (Ey) (Ez) [y, z < x \& f_0(y) = f_1(z) = A \& x = g_r(y, z)] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese simultane Definition für  $f_0(x)$  und  $f_1(x)$  kann mit Hilfe der in Nr. 2 eingeführten Hilfsfunktionen wie üblich auf die Definition einer einzigen Funktion  $f(x)$  aufgelöst werden. Dabei ist

$$f(x) = c_1(f_0(x), f_1(x)),$$

woraus sich

$$f_0(x) = k_0(f(x)), \quad f_1(x) = k_1(f(x))$$

ergibt; so werden in  $\mathfrak{M}$  samt  $f(x)$  auch  $f_0(x)$  und  $f_1(x)$  primitiv-rekursiv ausfallen. Wir haben also nur  $f(x)$  zu untersuchen.

5. Erstens gilt nach den Definitionen von  $f(x)$ ,  $f_0(x)$  und  $f_1(x)$

$$(1) \quad f(A) = c_1(f_0(A), f_1(A)) = c_1(A, A).$$

Dann gilt für ein beliebiges  $a_i \in \mathfrak{A}$  (da echter Vorgänger von  $a_i$  nur  $A$ , und  $f_0(A) = f_1(A) = A$  ist):

$$f(a_i) = c_1(f_0(a_i), f_1(a_i)) = \begin{cases} c_1(A, A), & \text{falls } g_0(A, A) = a_i \text{ \& } g_1(A, A) = a_i \\ c_1(A, 0), & \text{falls } g_0(A, A) = a_i \text{ \& } g_1(A, A) \neq a_i \\ c_1(0, A), & \text{falls } g_0(A, A) \neq a_i \text{ \& } g_1(A, A) = a_i \\ c_1(0, 0), & \text{falls } g_0(A, A) \neq a_i \text{ \& } g_1(A, A) \neq a_i. \end{cases}$$

Nach 2) und 4) der Nr. 2 ist  $f(a_i)$  als »zusammengeflückte« Funktion primitiv-rekursiv in  $\mathfrak{M}$ ; ihr Wert ist daher für jedes feste  $a_i$  eine bestimmte Konstante  $g_{a_i}$ . Es gilt damit für  $a_i \in \mathfrak{A}$

$$(2) \quad f(a_i) = g_{a_i}.$$

6. Endlich ergibt sich bei  $a_i, a_j \in \mathfrak{A}$  für

$$f(a_i x a_j) = c_1(f_0(a_i x a_j), f_1(a_i x a_j))$$

auch eine »zusammengeflückte« Definition, da  $f_0(x)$  und  $f_1(x)$  nur die Werte  $A$  und  $0$  annehmen, und daher der Wert  $f(a_i x a_j)$  nur einer der vier Werte

$$c_1(A, A), c_1(A, 0), c_1(0, A), c_1(0, 0)$$

sein kann, je nachdem von den beiden Beziehungen

$$\text{I.} \quad (Ey) (Ez) [y, z < a_i x a_j \text{ \& } k_0(f(y)) = k_1(f(z)) = A \text{ \& } a_i x a_j = g_0(y, z)]$$

und

$$\text{II.} \quad (Ey) (Ez) [y, z < a_i x a_j \text{ \& } k_0(f(y)) = k_1(f(z)) = A \text{ \& } a_i x a_j = g_1(y, z)]$$

beide wahr sind (also auch ihre Konjunktion), oder die Konjunktion von I. mit der Negation von II., oder die Konjunktion der Negation von I. mit II., oder endlich die Konjunktion der Negationen von I. und von II. wahr ist. Es genügt hier I. zu untersuchen; II. und die genannten Konjunktionen lassen sich genau so erledigen.

7. Nun sieht man, dass in I. der Wert von  $f$  an der Stelle  $a_i x a_j$  mit Hilfe von Werten  $f(y)$ ,  $f(z)$  definiert wird, wobei  $y$  und  $z$  echte Vorgänger der Stelle  $a_i x a_j$  sind. So ist naheliegend, dass es sich hier um eine Wertverlaufsrekursion handelt. Eine Schwierigkeit bedeutet nur, dass  $y$  und  $z$  gebundene Variablen



sind. Das lässt sich ausschalten, wenn wir die Wertverlaufsfunktion  $q(x)$  unserer Funktion  $f(x)$  verwenden.

Wie ich bereits erwähnt habe, sind die echten Vorgänger von  $a_i x a_j$  Vorgänger von einem der unmittelbaren Vorgänger  $a_i x$  oder  $x a_j$ . Seien sämtliche Vorgänger von  $a_i x$  bzw.  $x a_j$  in der genannten Reihenfolge:

$$\bar{x}'_0, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_{s'} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}''_0, \bar{x}''_1, \dots, \bar{x}''_{s''}.$$

Es ist klar, da  $a_i x$  von gleichvielen Buchstaben besteht wie  $x a_j$ , dass sie beide gleichviele Vorgänger haben, also dass  $s' = s''$  ist und wir wissen bereits dass

$$s' = \text{long}(\varphi(a_i x))$$

ist. So gilt für die echten Vorgänger  $y$  und  $z$  von  $a_i x a_j$  mit gewissen  $t, u \leq s'$

$$y = \bar{x}'_t \text{ oder } \bar{x}''_t, \quad z = \bar{x}'_u \text{ oder } \bar{x}''_u,$$

d. h. mit den Beziehungen der Nr. 2:

$$y = v_t(a_i x) \text{ oder } v_t(x a_j), \quad z = v_u(a_i x) \text{ oder } v_u(x a_j),$$

und daher ist  $f(y)$  das Glied mit Index  $t$ , und  $f(z)$  das Glied mit Index  $u$  der Folge, welcher  $\varphi(a_i x)$  oder  $\varphi(x a_j)$  zugeordnet wird, d. h.

$$f(y) = k_t(\varphi(a_i x)) \text{ oder } k_t(\varphi(x a_j)),$$

$$f(z) = k_u(\varphi(a_i x)) \text{ oder } k_u(\varphi(x a_j)).$$

Nach 1) der Nr. 2 gilt noch mit in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursivem  $d$

$$a_i x a_j = d(a_i x, x a_j).$$

Endlich ist die Existenz von  $y$  und  $z$  der gewünschten Art gleichbedeutend mit der Existenz von entsprechenden Indizes  $t$  und  $u$ .

Wird das alles in I. eingesetzt, so erhält man zufolge der Fallunterscheidungen eine 4-gliedrige Disjunktion. Das erste Disjunktionsglied ist:

$$\text{III. } (Et) (Eu) [t, u \leq \text{long}(\varphi(a_i x)) \& k_0(k_t(\varphi(a_i x))) = k_1(k_u(\varphi(a_i x))) = 1 \& \\ \& d(a_i x, x a_j) = g_0(v_t(a_i x), v_u(a_i x))],$$

und die drei anderen Disjunktionsglieder unterscheiden sich davon nur darin, dass in ihnen der Reihe nach für das 3-te, 6-te, dann für das 2-te, 5-te, endlich für das 2-te, 3-te, 5-te, 6-te Auftreten von  $a_i x$  immer  $x a_j$  gesetzt wird. Setzen wir

$$B'(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (Et) (Eu) [t, u \leq \text{long}(x_3) \& k_1(k_0(x_4)) = k_1(k_u(x_4)) = 1 \& \\ \& d(x_1, x_2) = g_0(v_t(x_1), v_u(x_1))],$$

dann ergibt sich diese Beziehung mit zweimaliger Anwendung von 3) der Nr. 2 als primitiv-rekursiv in  $\mathfrak{M}$ , und III. ist äquivalent mit

$$B'(a_i x, x a_j, \varphi(a_i x), \varphi(x a_j)).$$

Ganz ähnlich ergeben sich die drei anderen Disjunktionsglieder als auf  $a_i x, x a_j, \varphi(a_i x)$  und  $\varphi(x a_j)$  angewandte, in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursive Beziehungen, und nach 2) der Nr. 2 gilt dasselbe auch für ihre Disjunktion.



8. Daher ist I. der Nr. 6 mit in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursivem  $B^{(1)}$  der Beziehung

$$B^{(1)}(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j))$$

äquivalent. Genau so erhält man eine mit II. der Nr. 6 äquivalente Beziehung

$$B^{(2)}(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)),$$

und aus diesen die in Nr. 6 aufgezählten Konjunktionen als

$$B_w(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)) \quad (w = 1, 2, 3, 4),$$

wobei  $B_1, B_2, B_3, B_4$  in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursive Beziehungen sind. So ergibt sich für  $a_i, a_j \in \mathfrak{A}$

$$f(a_i xa_j) = \begin{cases} c_1(A, A), & \text{falls } B_1(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)) \\ c_1(A, 0), & \text{falls } B_2(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)) \\ c_1(0, A), & \text{falls } B_3(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)) \\ c_1(0, 0), & \text{falls } B_4(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)). \end{cases}$$

Die durch

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} c_1(A, A), & \text{falls } B_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ c_1(A, 0), & \text{falls } B_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ c_1(0, A), & \text{falls } B_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ c_1(0, 0), & \text{falls } B_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases}$$

definierte »zusammengeflochtene« Funktion  $h$  ist in  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursiv, und damit gilt für  $a_i, a_j \in \mathfrak{A}$

$$(3) \quad f(a_i xa_j) = h(a_i x, xa_j, \varphi(a_i x), \varphi(xa_j)).$$

9. Wie wir an der in Nr. 2 angedeuteten Modifizierung (D\*) von (D) sehen, ergibt (1), (2) und (3) für  $f(x)$  eine Wertverlaufsrekursion in  $\mathfrak{M}$ , und somit ist  $f(x)$ , und damit auch  $f_0(x)$  und  $f_1(x)$  primitiv-rekursiv in  $\mathfrak{M}$ .

Da sie ferner die charakteristischen Funktionen der Beziehungen  $F_0(x), F_1(x)$  sind, gilt das auch für diese Beziehungen.

Ähnlich beweist man, dass alle in der Sprache »Algol 60« definierten Prädikate in der Algol-Wortemenge  $\mathfrak{M}$  primitiv-rekursiv sind.

(Eingegangen: 8. Oktober, 1960.)

## ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ СЛОВООТНОШЕНИЯ НА ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

R. PÉTER

### Резюме

В журнале «Numerische Mathematik» в этом году было опубликовано сообщение об алгоритмическом языке «ALGOL 60» сконструированном для программирования вычислительных машин. В нем даются такие определения некоторых предикатов, которые в первый момент кажутся пороч-

ным кругом; но делается замечания, что здесь речь идет о взятых в некотором смысле рекурсиях. При более точной формулировке эти предикаты действительно оказываются примитивно-рекурсивными реляциями на некотором множестве слов.

Так называемые «слова» некоторого множества слов получают так же, как и натуральные числа, только вместо того, чтобы исходя из 0 применять единственную функцию образования следующего элемента, здесь обычно исходят из пустого слова  $\Lambda$  и образуют слова добавлением «букв» некоторого «алфавита». В одной работе, публикуемой в *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, о которой я уже доложила в 1959-ом году на варшавском симпозиуме о нефинитных методах исследования оснований математики, я в общем виде исследовала «множества, которые могут быть построены как числа», — среди них в качестве специального случая и множества слов — и рекурсивные функции, которые на них можно определить. Здесь используются результаты этой работы.

«Алфавит» языка «ALGOL 60» содержит основные символы этого языка: буквы, числа, символы логических значений, знаки действий, скобки, знаки препинания, несколько крупно набранных слов и их последовательностей, также считающихся буквами «алфавита», например *else* или *go to*. На основании на нем множества слов для характеристических функций определенных на языке «ALGOL 60» предикатов сначала могут быть получены рекурсии для совместного множества значений; которые могут затем привести к примитивным рекурсиям.



# ON SYSTEMS OF EQUATIONS CONTAINING ONLY ONE NONLINEAR EQUATION

by

BÉLA HAJTMAN

## § 1. Introduction

The systems to be considered here consist of several linear equations and of one equation of higher degree. Our purpose is to find conditions of solvability and the number of solutions, and to give an explicit formula for the solutions. This is achieved by giving explicitly an equation in one unknown the knowledge of whose roots reduces the given system to a linear system. We call this equation „the eliminant of the system”. We are giving this eliminant in terms of symbolic determinants. Such ones were applied in elimination theory first by CLEBSCH who generalized (in his paper [3]) the use of symbols introduced by ARONHOLD [1].

Our method is — essentially — the application of POISSON's one [6] to this special system. It seems this has more advantages here than any other method. Namely, the known methods (those of BÉZOUT, CAYLEY, KRONECKER, etc.) give us procedures of constructing the eliminant, but do not give for it an explicit formula, which we can do here without any difficulty. Our method enables us to discuss certain properties of the solutions such as the number of the different roots, the multiplicity of the roots, the rank of the system of equations. We are able to establish explicit relations between eliminants belonging to different unknowns. Among the eliminants of the classical theory such relations can be found only after the application of Liouville's transformation (see e. g. NETTO [5] §§ 359, 387. Bd. II.) which is rather inconvenient. Our method has the practical advantage that we may restrict ourselves to determining a preassigned unknown if we are interested in only one unknown.

The greatest part of this paper deals with systems in which the number of independent equations is equal to that of the unknowns. The general case will be considered in the last section. We devote a separate section to the behaviour of the solutions and that of the eliminants under linear transformation.

Similar systems have been dealt with by CLEBSCH [2], but he has considered only systems in which the number of equations is greater than that of unknowns and he has discussed merely the existence of a common root.

G. FREUD was so kind as to raise the question dealt with in this paper and he proposed to choose this way of solving. In the preparation of this paper I have got many helps from Prof. L. FUCHS too. I am very much obliged to both of them.



## § 2. The solution of the system of equations

Let us consider a system of  $n$  equations in  $n$  unknowns, where  $n - 1$  equations are linear and one equation is of degree  $k > 1$ . The coefficients of the system of equations are supposed to be elements of a field  $F$  of characteristic 0 or some prime  $p > k$ . The  $(n-1) \times n$  rectangular matrix  $\mathfrak{A}$  of the coefficients of the linear equations is assumed to be of rank  $n-1$ . We are looking for the solutions of this system.

Writing the equation of degree  $k$  in the usual way in homogeneous and symmetric form, we have the following system of equations:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(2) \quad \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n \dots \sum_{i_k=0}^n c_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = 0,$$

$$(2a) \quad x_0 = 1$$

where  $a_{ij}, b_i, c_{i_1 i_2 \dots i_k} \in F$ , the  $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$  are independent of the permutation of their indices and the matrix  $[a_{ij}] = \mathfrak{A}$  is of rank  $n-1$ .

Two types of determinants are needed in what follows. We obtain the determinant  $A_j$  from  $\mathfrak{A}$  by omitting the column of index  $j$  and prefixing the sign  $(-1)^{j-1}$ . The other,  $A_j^{(l)}$  may be derived from  $A_j$  by putting the elements  $b_i$  (the right members of the linear equations) in place of the column of index  $l$ . Then obviously  $A_j^{(l)} = -A_l^{(j)}$ . It is useful to agree to put  $A_0 = 0$ ;  $-A_0^{(j)} = A_j^{(0)} = A_j$ ;  $A_j^{(j)} = 0$ .

Next we write the coefficients  $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$  as the product of the symbols  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ . These symbols  $c_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) may be regarded as indeterminates over  $F$  which permute among themselves, but it is to be emphasized that we shall consider only formulas in which every term contains no  $c_j$  or the product of exactly  $k$  symbols.

The equation (2) may be written as

$$(3) \quad \left( \sum_{j=0}^n c_j x_j \right)^k = 0.$$

The explicit construction of the solution of the systems above depends on the following lemma:

**Lemma.** If  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  is a solution of the system (1)–(2), then  $\xi_i$  satisfies the equation

$$(4) \quad (Px_i - R_i)^k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

where  $P$  and  $R_i$  are symbolic determinants defined by

$$(5) \quad P = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n} \end{vmatrix}; \quad R_i = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{i-1} & -c_0 & c_{i+1} & \dots & c_n \\ a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1i-1} & b_{n-1} & a_{n-1i+1} & \dots & a_{n-1n} \end{vmatrix}.$$

The equations (4) will be called the *eliminants* of the system (1)—(2).

**Proof.** By Cramer's rule we obtain from the equations (1):

$$(6) \quad x_j A_i = x_i A_j + A_i^{(j)}.$$

This equation is valid also in the cases  $i = j$ ,  $i = 0$ ,  $j = 0$ .

In order to verify the lemma, let us multiply the equation (3) by the  $k$ th power of  $A_i$  and substitute (6). It is enough to perform the calculation for a single factor. We obtain

$$A_i \sum_{j=0}^n c_j x_j = \sum_{j=0}^n c_j (x_i A_j - A_j^{(i)}) = P x_i - R_i,$$

for, denoting by  $\Sigma^i$  the sum from which the index  $i$  is omitted, we have

$$(7) \quad \sum_{j=0}^n c_j A_j = \sum_{j=1}^n c_j A_j = P,$$

$$\sum_{j=0}^n c_j A_j^{(i)} = \sum_{j=1}^n c_j A_j^{(i)} + c_0 A_0^{(i)} + c_i A_i^{(i)} = \sum_{j=1}^n c_j A_j^{(i)} - c_0 A_i = R_i.$$

This proves the lemma.

We shall call the unknown  $x_j$  (and also the index  $j$ ) *singular* if  $A_j = 0$ . For nonsingular unknowns we can state also the converse of the lemma above:

**Theorem 1.** *Let  $x_i$  be a nonsingular unknown. To every root  $x_i = \xi_i$  of the eliminant*

$$(8) \quad (P x_i - R_i)^k = 0$$

*there exists one and only one solution  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  of the system (1)—(2) which may be got by the formulas (6) and in this way every solution of (1)—(2) can be obtained.*

(Thus the solution of (1)—(2) can be got by solving first (8) and then using (6)).

Since  $A_i \neq 0$ , the values  $\xi_j$  got from (6) obviously satisfy the system (1), whatever  $\xi_i$  may be (Cramer's rule!). If we substitute them into (2), it seems immediately that they satisfy this too provided that  $\xi_i$  is a root of the equation (8). And this is what we wished to prove.

By the consideration of the equation (6) it will be seen at once that (4) for singular unknowns is not suitable to solve the system of equations: to each of them (6) gives only one value. (If there exist more solutions than one then the singular unknowns have the same value in each one.) However, the equation (4) is often not adequate to the determination of this single value. Concerning this case we may state:

**Theorem 2.** *Let  $x_s$  be a singular unknown. If  $P^k \neq 0$ , the equation (4) for  $x_s$  has a single root with multiplicity  $k$ . If  $P^k = 0$ , then every coefficient of the polynomial  $(P x_s - R_s)^k$  is equal to zero.*

**Proof.** Let  $x_p$  and  $x_r$  be nonsingular unknowns. From (6) we have

$$(9) \quad \xi_s = \frac{A_p^{(s)}}{A_p} = \frac{A_r^{(s)}}{A_r}$$

since  $A_s = 0$ . Multiply the first equation of (7) by  $\xi_s$  to get:

$$(10) \quad P \xi_s = \sum_{j=0}^n c_j A_j \xi_s = \sum_{j=0}^n c_j A_j^{(s)} = R_s.$$

Hence (4) has the form

$$(Px_s - R_s)^k = (Px_s - P \xi_s)^k = P^k(x_s - \xi_s)^k = 0,$$

which completes the proof.<sup>1</sup>

### § 3. Properties of the eliminants and the solutions

The eliminants for nonsingular unknowns are suitable not only for getting the solutions, but also for establishing certain properties of them, e. g. the number of solutions, the multiplicity of a solution. Starting with a fixed nonsingular unknown  $x_i$ , it is evident that the number of all solutions is equal to the effective degree  $g_i$  of the eliminant for  $x_i$ , unless the eliminant vanishes identically (and so  $g_i$  is undefined). Let a root  $\xi_i$  of this eliminant have the multiplicity  $\mu_i$ , then — according to the usual definition (e. g. see NETTO [5] § 349. Bd. II.) — we say the multiplicity of the solution  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  (belonging to  $\xi_i$  by (6)) in the system (1)–(2) is  $\mu_i$ .

However, — as it is clear from the proof of Theorem 1 — there cannot be made any distinction between the different nonsingular unknowns.<sup>2</sup> Indeed, we shall prove that  $g_i$  is characteristic for the system itself, i. e. for every nonsingular index its value is independent of the index. (Consequently, the index  $i$  may be omitted.) It will also be proved that in the eliminants for nonsingular unknowns the multiplicities  $\mu_i$  of the elements  $\xi_i$  of a fixed solution  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  are equal. Both of these assertions follow immediately from the next theorem.

**Theorem 3.** *Let  $x_r$  and  $x_t$  be nonsingular unknowns. If (by (6)) we apply the linear transformation*

$$(11) \quad x_r = \frac{A_r}{A_t} x_t + \frac{A_t^{(r)}}{A_t}$$

*to the eliminant belonging to  $x_r$  and then multiply by  $\left(\frac{A_t}{A_r}\right)^k$ , we obtain the eliminant belonging to  $x_t$ .*

<sup>1</sup> Since  $\xi_s$  is the root of the  $(k-1)$ st derivative of (4), we have

$$\xi_s = \frac{P^{k-1} R_s}{P^k}$$

(if  $P^k \neq 0$ ). By (10), this is the same value as that got by (9).

<sup>2</sup> The conditions required at the start of our discussion guarantee the existence of only one nonsingular unknown.



Thus the eliminants belonging to nonsingular unknowns differ essentially only by a linear transformation.

**Proof.** Clearly, it is enough to show that (11) implies

$$A_r(Px_i - R_i) = A_i(Px_r - R_r).$$

First we shall verify the relation

$$(12) \quad A_i R_r = A_i^{(r)} P + A_r R_i.$$

Using (7), the coefficient of  $c_j$  in (12) is:

$$\begin{aligned} A_i A_j^{(r)} &= A_i x_r A_j - A_i x_j A_r = \\ &= A_i^{(r)} A_j + A_r x_i A_j - A_r x_j A_i = A_i^{(r)} A_j + A_r A_j^{(i)} \end{aligned}$$

where we have applied (6) again and again. This proves (12). Now by (11) and (12)

$$\begin{aligned} A_i(Px_r - R_r) &= P(x_i A_r - A_r^{(i)}) - A_i R_r = \\ &= A_r P x_i - (A_r^{(i)} P + A_i^{(r)} P + A_r R_i) = A_r(Px_i - R_i) \end{aligned}$$

which completes the proof.

**Corollary 1.** *The eliminants (4) for nonsingular indices are of the same effective degree  $g$ .*

**Corollary 2.** *If  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  is a solution of (1)–(2), then for every nonsingular index  $i$  the multiplicity of  $\xi_i$  in the  $i$ th eliminant is independent of  $i$ .<sup>3</sup>*

For singular indices the effective degree of the eliminants is equal to  $g$  if and only if  $g = k$ , — otherwise the eliminants are identically zero. Similarly, the multiplicity of a root of some singular eliminant is either  $k$  or undefined, — as we have seen.

We discuss the case, when  $g > 0$  is not true, separately. If  $g = 0$  (i. e. among the coefficients of (8) only  $R_i^k$  is different from zero), the system (1)–(2) is inconsistent. If every coefficient vanishes ( $g$  is undefined), our system has infinitely many solutions (it is indeterminated).

Our system is of rank  $n$  or  $n - 1$ . In KRONECKER's terminology [4], a system of equations in  $n$  unknowns is of rank  $n - j$  if its solutions form a  $j$ -dimensional manifold. In our case, if  $g > 0$ , the rank is  $n$ , while if  $g$  is undefined, it is  $n - 1$  and not lower, because the system (1) is of rank  $n - 1$ .<sup>4</sup>

The eliminant determines too, of course, what extension of the field  $F$  is needed in computing the solutions. The extension needed in the calculation of the roots of the eliminants will obviously contain the whole solutions, since the equations (6) are linear. Because of Theorem 3, however, it is also true that the extension of the field needed in solving will be the same one for every

<sup>3</sup> This statement follows from a theorem of the classical theory too. That asserts (see e. g. NETTO [5] § 403. Bd. II.) that the multiplicity of a solution is equal to the product of the multiplicities occurring in the respective equations of the system. (We shall use this theorem in the fourth section.) However, our Corollary 2 shows that the eliminant (8) is equivalent to those defined in the classical theory.

<sup>4</sup> We note that the values got for the singular unknowns form always a 0-dimensional manifold therefore the rank of the indeterminated system will not in general be so-called pure rank.

nonsingular unknown, and we cannot narrow this field by seeking some more suitable eliminant. Accordingly, if one of the eliminants of some system (1)—(2) is not solvable by radicals (in the cases  $k \geq 5$ ), then none of the others for nonsingular unknowns may be solved so.

#### § 4. Linear transformations

We shall use the following notations. The determinant of the matrix  $[\tau_{ij}]$  of the linear transformation

$$(13) \quad x_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

will be denoted by  $T$ . We suppose that  $T \neq 0$ . Furthermore let  $[\sigma_{ij}]$  be the matrix of the inverse transformation of (13):

$$(14) \quad y_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Then  $\sigma_{ij} = T_{ji} T^{-1}$ , where  $T_{ji}$  is the so-called cofactor of  $\tau_{ji}$  in  $T$ .

If we apply the transformation (13) to the system (1)—(2), we get a similar system of equations with unknowns  $y_i$ . The new system has again eliminants, etc. We keep the same notations for the new system with adding asterisks.

Next we discuss the behaviour of the eliminants under a linear transformation.

**Theorem 4.** *For the leading coefficient of the transformed eliminant we have*

$$P^{*k} = P^k T^k.$$

**Proof.** Let us apply the transformation (13) to the equation (3), after we have extended the matrix  $[\tau_{ij}]$  by the elements  $\tau_{00} = 1$ ,  $\tau_{0j} = \tau_{i0} = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). We have

$$\sum_{i=0}^n c_i \sum_{j=0}^n \tau_{ij} y_j = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^n c_i \tau_{ij} \right) y_j.$$

Hence  $[\tau_{ij}]$  transforms the vector  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$  into  $(c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*)$ . Therefore, the symbols  $c_j$  are transformed in the same manner as the coefficients  $a_{ij}$ . Consequently,

$$P^* = PT,$$

proving the theorem.

**Theorem 5.** *For the effective degrees we have*

$$g^* = g.$$

**Proof.** In view of the factorization theory of matrices (e.g. see WELLSTEIN [7]) one can interpret every nonsingular linear transformation as a finite sequence of the elementary transformations of the following types:

- a) interchange of two unknowns;
- b) multiplication of one of the unknowns by some element  $c \neq 0$  ( $c \in F$ );
- c) addition of a certain unknown to an other one.



If we consider in detail the change of the eliminant under these elementary transformations, we obtain that the equation (8) either remains unchanged or will be one of the forms

$$c (Py_i - R_i)^k = 0, \\ (Py_i - R_i \mp R_j)^k = 0.$$

It is easy to see that in both cases the effective degree remains the same as the original was. (Unless  $y_i$  will be singular.) Q. e. d.

By the theorem mentioned in the third footnote a solution of (1)–(2) has the same multiplicity  $\mu$  in the system (1)–(2) as in the equation (2). This  $\mu$  is — by definition — the multiplicity of the  $i$ th element of the solution in the  $i$ th eliminant, where  $i$  is any nonsingular index. The usual definition of multiple roots of some equation in several unknowns is the following (e. g. NETTO [5] § 351. Bd. II.): a root  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  of an equation in  $n$  unknowns has the multiplicity  $\mu$  if the equation may be written as a homogeneous polynomial of degree  $\mu$  of the factors  $(x_j - \xi_j)$ . (In general the coefficients of this one will be, of course, polynomials in  $n$  unknowns.)

Let  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  be a  $\mu$ -tuple solution of (1)–(2). Denote by  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) the values obtained from the transformation (14) by the substitution  $x_j = \xi_j$ . Writing (2) in the mentioned polynomial form of  $(x_j - \xi_j)$  and carrying out in this form the transformation (13), we shall see that the array  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  is a root of the equation (2)\* which has at least the multiplicity  $\mu$ , or, since the same holds for the inverse transformation, it has exactly the multiplicity  $\mu$ . Thus we have proved the following:

**Theorem 6.** *Applying the transformation (14) to the  $\mu$ -tuple solution  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  of the system (1)–(2), the arising array  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  will again be an exactly  $\mu$ -tuple solution of the system of equations transformed by (13).*

## § 5. The general case

We have solved the system (1)–(2) imposing strong restrictions upon the number of equations and the rank of the matrix of coefficients. Consider now the general case.

$$(15) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(16) \quad \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n \dots \sum_{i_k=0}^n c_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = 0,$$

$$(16a) \quad x_0 = 1,$$

where the coefficients are taken from a field  $F$  (which is of characteristic 0 or a prime greater than  $k$ ). The values of the coefficients  $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$  are invariant under taking any permutation of the indices.

For the solvability of our system a trivial necessary condition is that the system consisting of its linear equations be solvable, i. e. the rank of the matrix of the linear system be equal to that of the augmented matrix. Then choose a maximal independent system of linear equations and suppose that (15) denotes already this, that is, the matrix  $\mathfrak{A}_{mr}$  of coefficients of (15) is of rank  $m$ .



We shall distinguish three cases:  $m < n-1$ ,  $m = n-1$  and  $m = n$ . The second one was dealt with above in detail, now we sketch how to treat the others.

Consider first the case  $m < n-1$ . By hypothesis every solution (if exists) contains parameters, so the rank of the system is a priori lower than  $n$ . Now, introduce the indeterminates  $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_{n-1}$  as parameters and add to the system (15) the equations

$$(17) \quad x_{j_{m+1}} = b_{m+1}, x_{j_{m+2}} = b_{m+2}, \dots, x_{j_n} = b_{n-1},$$

where  $j_1, j_2, \dots, j_n$  denotes a permutation of  $1, 2, \dots, n$ , such that  $\mathfrak{A}_{mn}$  has a nonvanishing minor composed of its columns  $j_1, j_2, \dots, j_{m+1}$ . Let  $f$  denote the number of *different* systems which may be got from (15)–(16) by permuting the indices. It is easily seen this  $f$  varies in the interval

$$(n-m) \leq f \leq \binom{n}{m+1}$$

according to the number of nonvanishing  $m$ -rowed minors of  $\mathfrak{A}_{mn}$ .

Now, choose a fixed permutation of indices and add (17) to the equations (15); it is immediately seen that the conditions required in § 2 are fulfilled. Hence the system of equations can be solved in the same way as there. The only difference is that the first  $m$  of  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  are constant, but the other  $n-m-1$  are indeterminates over  $F$ .

The results of sections 2 and 3 remain valid also in this case. Obviously, the results of § 4 are valid only for linear transformations leaving invariant the linear subspace of the unknowns and that of the parameters.

Now we make some remarks.

Considering the matrix of the system (15) enlarged by (17), one sees immediately that the parameters are always singular.

Because of the special form of the matrix of the system of equations the determinant  $P$  defined by (5) equals

$$S = \begin{vmatrix} c_{j_1} & c_{j_2} & \dots & c_{j_{m+1}} \\ a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_{m+1}} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_{m+1}} \end{vmatrix} = (-1)^\pi P,$$

where  $\pi$  is determined by the chosen permutation of the unknowns. However, concerning the determinant  $R_i$  ( $i = j_1, j_2, \dots, j_{m+1}$ ) we get

$$(-1)^\pi R_i = T_i - \sum_{j=m+2}^n b_{j-1} U_i^{(j)},$$

where  $T_i$ , resp.  $U_i^{(j)}$  are obtained from  $S$  by interchanging the  $i$ th column

with the column  $(-c_0, b_1, \dots, b_m)$ , resp.  $(c_j, a_{1j}, \dots, a_{mj})$ . Consequently, the eliminant (8) becomes

$$\left( Sx_i - T_i + \sum_{j=m+2}^n b_{j-1} U_i^{(j)} \right)^k = 0.$$

The determinants  $S, T_i, U_i^{(j)}$  contain no longer parameter.

Finally we discuss the case  $m = n$ . CLEBSCH [2] has explicitly given a product of symbolic determinants which vanishes if and only if there exists a solution. We give a further condition for the solvability:

**Theorem 7.** Consider a system of equations in  $n$  unknowns consisting of one equation of degree  $k$  and  $n$  linear equations having a matrix  $\mathfrak{A}_n$  of coefficients of rank  $n$ . This system has a (necessarily single) solution if and only if the equation of degree  $k$  can be written as a polynomial (of degree  $k$ ) of the linear equations of the system.

**Proof.** It is well-known that there exists at most one solution. The sufficiency of the condition is also trivial.

In order to prove the necessity let us apply for simplicity's sake the linear transformation

$$(18) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

transforming the linear system into

$$(19) \quad y_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

The transformation can be extended also to the unknown  $x_0$  in the trivial way. So the unknowns increase with the „unknown”  $y_0 = 1$  and the linear system increases with a new equation of index 0 where  $b_0 = 1$ .

Apply the transformation (18) also to the equation (2). Obviously we shall get a polynomial of degree  $k$  in the new unknowns  $y_i$ :

$$(20) \quad \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n \dots \sum_{i_k=0}^n \gamma_{i_1 i_2 \dots i_k} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k} = 0,$$

that is, the transformed equation is a polynomial of the left sides of the linear equations.

Now, if the solution of the linear system (given by the Cramer's rule) satisfies also (2), then we have

$$(21) \quad \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n \dots \sum_{i_k=0}^n \gamma_{i_1 i_2 \dots i_k} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k} = 0.$$

To complete the proof it remained to show that (20) may be written as a polynomial of the  $(y_i - b_i)$ . This means that, applying the transformation

$$y_i = z_i + b_i,$$

no constant member remains in (20). Transforming we see that the constant term is nothing else than the expression (21) — which vanishes. Q. e. d.

(Received October 10, 1960.)

## REFERENCES

- [1] ARONHOLD, S.: "Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **55** (1858) 97—191.  
 [2] CLEBSCH, A.: »Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren.« *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **58** (1861) 273—291.  
 [3] CLEBSCH, A.: »Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen.« *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **59** (1861) 1—62.  
 [4] KRONECKER, L.: »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.« *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **92** (1881) 1—122.  
 [5] NETTO, E.: *Vorlesungen über Algebra*, Leipzig, 1900.  
 [6] POISSON, D.: «Mémoire sur l'élimination dans les équations algébriques.» *Journal de l'École Polytechnique* **4** (1804) cah. 11, 199—212.  
 [7] WELLSTEIN, G.: »Die Dekomposition der Matrizen.« *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1909) 77—79.

## О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ОДНО НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

B. HAJTMAN

## Резюме

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(2) \quad \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n \dots \sum_{i_k=0}^n c_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = 0,$$

$$(2a) \quad x_0 = 1,$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$  элементы тела  $F$  (характеристика которого 0 или простое число, большее чем  $k$ ) и значение коэффициентов  $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$  не зависит от перестановок их индексов. Ищутся решения этой системы уравнений и условия её разрешимости.

В § 2—4 рассматривается случай  $m = n - 1$ , при предположении, что ранг матрицы коэффициентов  $\mathcal{A}$  системы линейных уравнений (1) равен  $n - 1$ . Определителем, относящимся к неизвестному  $x_i$ , называется минор матрицы  $\mathcal{A}$ , получаемый вычеркиванием  $i$ -ого столбца. Неизвестное *сингулярно*, если соответствующий минор равен нулю.

В § 2 находится решение. Важную роль играют следующие символические определители:

$$P = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad R_i = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{i-1} & -c_0 & c_{i+1} & \dots & c_n \\ a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

где символы  $c_j$  определяются так:

$$c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \equiv c_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$



Теорема I утверждает, что, если неизвестное  $x_i$  не сингулярно, то каждому корню символического уравнения

$$(3) \quad (Px_i - R_i)^k = 0$$

соответствует одно (и только одно) решение системы уравнений (1) — (2), остальные элементы которого получается из простой системы линейных уравнений, и таким образом получаются все решения (1) — (2). Система уравнений (3) называется *элиминантом* системы.

Согласно теореме 2, если уравнение (3) записано для сингулярного неизвестного, то оно имеет единственный  $k$ -кратный корень при  $P^k \neq 0$  (и это значение принимает сингулярное неизвестное во всех решениях), если же  $P^k = 0$ , то все коэффициенты уравнения равны нулю.

В § 3 исследуются свойства элиминантов и решений. Теорема 3 определяет соотношение между элиминантами, относящимися к несингулярным неизвестным; оказывается, что они — не считая постоянных факторов — отличаются друг от друга простым линейным преобразованием. Отсюда следует, что разрешимость, число решений, кратность отдельных решений однозначно определяется уже одним элиминантом (относительно несингулярного неизвестного).

В § 4 изучается поведение элиминантов и решений в случае линейного преобразования неизвестных. Теорема 4 занимается поведением коэффициента  $P^k$ , теорема 5 — фактической степени элиминантов, наконец, теорема 6 — кратности решений при преобразовании.

В § 5 не ставится ни каких ограничений относительно  $m$  и ранга матрицы  $\mathfrak{A}$ . Сначала рассматривается случай, когда решение содержит параметр. Этот случай сводится к рассмотренному в первых параграфах. Наконец, рассматривается случай, когда ранг матрицы  $\mathfrak{A}$  равен  $n$ . Теорема 7 дает необходимое и достаточное условие разрешимости в этом случае.



## SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION ENTIÈRE

par

LÁSZLÓ ALPÁR et PAUL TURÁN

1. La notion des valeurs exceptionnelles des fonctions entières a été introduite par E. PICARD démontrant qu'une fonction entière admet toutes les valeurs complexes sauf peut-être une. L'idée des valeurs exceptionnelles a été généralisée par E. BOREL au cas des fonctions entières d'ordre fini de la manière suivante: Désignons par  $\varrho (< \infty)$  l'ordre de la fonction entière  $f(z)$  et par  $b$  un nombre complexe arbitraire; soient  $z_1, z_2, \dots, z_\nu, \dots$  les racines de l'équation  $f(z)=b$ , chacune prise selon sa multiplicité, et ayant pour exposant de convergence  $\varrho_c(b)$ . BOREL a démontré qu'en général pour un  $b$  quelconque  $\varrho_c(b) = \varrho$  sauf peut-être pour un nombre exceptionnel  $b_0$  pour lequel  $\varrho_c(b_0) < \varrho$ . Autrement dit il existe tout au plus un seul nombre  $b_0$  tel que

$$(1.1) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^{q-\varepsilon}} < +\infty \quad (0 < \varepsilon < \varrho - \varrho_c(b_0)),$$

où  $z_1, z_2, \dots, z_\nu, \dots$  sont maintenant les racines de l'équation particulière  $f(z) = b_0$ . Le nombre  $b_0$  est dit valeur exceptionnelle  $B$  (BOREL) de la fonction entière  $f(z)$ .

La généralisation de la notion des valeurs exceptionnelles peut être poussée encore plus loin. En effet, soit  $\varphi(x)$  une fonction définie sur l'intervalle  $x \geq 0$ , réelle, positive, strictement monotone décroissante, tendant vers 0 pour  $x \rightarrow \infty$  aussi rapidement que l'on veut. Le nombre complexe  $b$  soit appelé une valeur exceptionnelle  $\varphi$  de la fonction  $f(z)$  si

$$(1.2) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(|z_\nu|) < +\infty.$$

Considérant la relation (1.1), on voit que cette question a été examinée et résolue par BOREL dans le cas spécial où  $\varphi(x) = x^{-\varrho}$ .

Si en particulier  $\varphi(x)$  tend aussi rapidement vers zéro que

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) x^a = 0$$

pour tous les  $a > 0$  et si  $f(z)$  est d'ordre fini, alors — en vertu du théorème de BOREL que nous venons de citer — on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^{q+\varepsilon}} < +\infty$$



quels que soient  $\varepsilon > 0$  et le nombre  $b$ . Ce qui revient à dire que, d'après (1.3), avec la fonction  $\varphi(x)$  ainsi définie, la série (1.2) est convergente pour chaque  $b$ . Par conséquent, dans ce cas, chaque nombre complexe est une valeur exceptionnelle  $\varphi$  de toutes les fonctions entières d'ordre fini et la distinction de ce genre des nombres  $b$  n'a aucun sens concret.

Mais précisément c'est cette circonstance qui suggère à soulever la question plus générale: peut-on donner une fonction particulière  $\varphi(x)$  telle que chaque nombre complexe  $b$  soit une valeur exceptionnelle  $\varphi$  de toutes les fonctions entières? Nous affirmons qu'une telle fonction  $\varphi(x)$  n'existe pas; bien plus à chaque fonction  $\varphi_0(x) > 0$  donnée et tendant vers zéro aussi rapidement que l'on veut, on peut trouver une fonction  $f_0(z)$  d'ordre infini n'ayant aucune valeur exceptionnelle  $\varphi_0$ .

2. Ce que nous venons d'exposer peut être énoncé sous la forme suivante:

**Théorème.** Soit  $\varphi_0(x)$  une fonction définie sur l'intervalle  $x \geq 0$ , réelle, positive, strictement monotone décroissante, tendant vers 0 pour  $x \rightarrow \infty$  aussi rapidement que l'on veut, d'ailleurs quelconque. Alors on peut déterminer une fonction entière  $f_0(z)$  telle que l'on ait

$$(2.1) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_0(|z_v|) = +\infty$$

pour chaque nombre complexe  $b$ , où  $z_1, z_2, \dots, z_v, \dots$  sont les racines de l'équation  $f_0(z) = b$ , chacune prise selon sa multiplicité.

Nous allons démontrer, outre l'assertion du théorème, que les signes des coefficients de la série de Taylor de  $f_0(z)$  peuvent être choisis d'une manière absolument arbitraire.

Nous remarquons encore qu'il serait intéressant de trouver une démonstration de ce théorème différente de la nôtre et qui ne s'appuie pas sur la série de Taylor de  $f_0(z)$ .

**Démonstration.** Soit

$$(2.2) \quad \varphi_0(x) = e^{-q(x)}$$

où  $q(x) > 0$  est une fonction strictement monotone croissante sur l'intervalle  $x \geq 0$ . Introduisons encore les notations suivantes:

$$(2.3) \quad p(x) = [e^{q(x)}]$$

$[\alpha]$  signifie la plus grande partie entière du nombre  $\alpha$ ,

$$k_v = 4^{4^v}, \quad r_v = \log k_v = 4^v \log 4 \quad (v = 1, 2, \dots),$$

$$(2.4) \quad g(m) = \prod_{l=2}^m \log l.$$

Désignons de plus par  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$  une suite de nombres dont les termes admettent seulement les valeurs  $+1$  et  $-1$  dans un ordre quelconque.

Nous allons démontrer que chaque fonction

$$(2.5) \quad f_0(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{z^{k_n}}{g(k_n)} \right)^{p(r_n)}$$

répond aux conditions exigées.

Considérons la quantité

$$(2.6) \quad B_v = \left( \frac{r_v^{k_v}}{g(k_v)} \right)^{p(r_v)} = e^{p(r_v)(k_v \log \log k_v - \sum_{l=2}^{k_v} \log \log l)}$$

et l'intégrale

$$(2.7) \quad I_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_0(r_v e^{i\theta})| d\theta.$$

Pour un  $v$  suffisamment élevé, sur la circonférence  $|z| = r_v$ , l'inégalité

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \left| f_0(z) - \varepsilon_v \left( \frac{z^{k_v}}{g(k_v)} \right)^{p(r_v)} \right| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{v-1} \left( \frac{r_v^{k_n}}{g(k_n)} \right)^{p(r_n)} + \sum_{n=v+1}^{\infty} \left( \frac{r_v^{k_n}}{g(k_n)} \right)^{p(r_n)} = \\ &= o(B_v) + B_v \sum_{n=1}^{v-1} \frac{\left( \prod_{l=2}^{k_n} \log l \right)^{p(r_v)-p(r_n)} \left( \prod_{l=k_n+1}^{k_v} \log l \right)^{p(r_v)}}{r_v^{k_v p(r_v) - k_n p(r_n)}} + \\ &+ B_v \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{r_v^{k_n p(r_n) - k_v p(r_v)}}{\left( \prod_{l=2}^{k_v} \log l \right)^{p(r_n)-p(r_v)} \left( \prod_{l=k_v+1}^{k_n} \log l \right)^{p(r_n)}} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} o(B_v) + B_v \sum_{n=1}^{v-1} Y'_n + B_v \sum_{n=v+1}^{\infty} Y''_n \end{aligned}$$

est vérifiée. Pour  $1 \leq n \leq v-1$ , on a  $l < k_v$  et  $\log l < r_v$  [(cf. 2.4)] dans l'expression de  $Y'_n$ , et en y remplaçant  $\log l$  par  $r_v$  on obtient

$$(2.9) \quad Y'_n = \frac{r_v^{2p(r_v)-p(r_n)}}{r_v^{k_v p(r_v)-k_n p(r_n)}} = r_v^{-\{(k_v-2)p(r_v)-(k_n-1)p(r_n)\}4^v} < \left( \frac{1}{4} \right)^{\{(k_v-2)p(r_v)-(k_n-1)p(r_n)\}4^v},$$

car  $k_v - 2 > k_n - 1$ ,  $p(r_n) < p(r_v)$  et par suite

$$(k_v - 2) p(r_v) - (k_n - 1) p(r_n) > 0,$$

et

$$r_v^{-1} = \frac{1}{4^{4^v} \log 4} < \left( \frac{1}{4} \right)^{4^v}.$$

De même d'après (2.8)

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Y''_n &= \frac{r_v^{2k_v\{p(r_n)-p(r_v)\}}}{\left( \prod_{l=2}^{k_v} \log l \cdot \prod_{l=k_n-k_v+1}^{k_n} \log l \right)^{p(r_n)-p(r_v)}} \frac{r_v^{(k_n-2k_v)p(r_n)+k_v p(r_v)}}{\left( \prod_{l=k_v+1}^{k_n-k_v} \log l \right)^{p(r_n)} \left( \prod_{l=k_n-k_v+1}^{k_n} \log l \right)^{p(r_v)}} < \\ &< \left( \frac{r_v^{2k_v}}{\prod_{l=2}^{k_v} \log l \cdot \prod_{l=k_n-k_v+1}^{k_n} \log l} \right)^{p(r_n)-p(r_v)}. \end{aligned}$$

Ce qui s'explique par les faits suivants:

$$k_n p(r_n) - k_v p(r_v) = 2 k_v \{p(r_n) - p(r_v)\} + (k_n - 2 k_v) p(r_n) + k_v p(r_v),$$

et

$$\left( \prod_{l=k_v+1}^{k_n} \log l \right)^{p(r_n)} = \left( \prod_{l=k_v+1}^{k_n-k_v} \log l \right)^{p(r_n)} \left( \prod_{l=k_n-k_v+1}^{k_n} \log l \right)^{p(r_n)-p(r_v)} \left( \prod_{l=k_n-k_v+1}^{k_n} \log l \right)^{p(r_v)}.$$

En outre dans (2.10) le second facteur de  $Y_n''$  est inférieur à 1, car son numérateur et son dénominateur contiennent des facteurs en nombres égaux, et

$$\log l > \log k_v = r_v \quad (l = k_v + 1, k_v + 2, \dots, k_n).$$

D'autre part

$$\frac{r_v^{2k_v}}{\prod_{l=2}^{k_v} \log l \prod_{l=k_n-k_v+1}^{k_n} \log l} = \frac{r_v^2 \cdot r_v^{2(k_v-1)}}{\log k_n \prod_{l=2}^{k_v} \{\log l \cdot \log(k_n - l + 1)\}}.$$

Or, la fonction  $t(x) = \log x \cdot \log(a - x)$ , où  $a$  est une constante et  $a > x + 1 \geq 3$ , prend son maximum pour  $x = \frac{a}{2}$ , donc le produit  $\log l \cdot \log(k_n - l + 1)$  est le plus petit pour  $l = 2$ , c'est-à-dire

$$\log l \cdot \log(k_n - l + 1) \geq \log 2 \cdot \log(k_n - 1) > c_0 \log 2 \cdot r_n,$$

où  $c_0 > 0$  est une constante. Par conséquent

$$\begin{aligned} (2.11) \quad \frac{r_v^2}{\log l \cdot \log(k_n - l + 1)} &< \frac{4^{2.4v} \log^2 4}{c_0 \log 2 \cdot 4^{4^n} \log 4} = \\ &= \frac{2}{c_0} \left( \frac{1}{4} \right)^{4^n - 2.4v} < \left( \frac{1}{4} \right)^{4^n - 3.4v}. \end{aligned}$$

On constate de plus que

$$(2.12) \quad \frac{r_v^2}{\log k_n} = \frac{r_v^2}{r_n} = \frac{4^{2.4v} \log^2 4}{4^{4^n} \log 4} < \left( \frac{1}{4} \right)^{4^n - 3.4v}.$$

Il découle de (2.10), (2.11) et (2.12) que

$$(2.13) \quad Y_n'' < \left( \frac{1}{4} \right)^{(4^n - 3.4v) \{p(r_n) - p(r_v)\}}.$$

Les inégalités (2.9) et (2.13) signifient que

$$(2.14) \quad \sum_{n=1}^{v-1} Y_n' = o(1); \quad \sum_{n=v+1}^{\infty} Y_n'' = o(1).$$

En vertu de (2.8) et (2.14) on a

$$(2.15) \quad |f_0(r_v e^{i\theta})| = B_v \{1 + o(1)\}.$$



Posons l'expression (2.15) dans l'intégrale (2.7) en tenant compte de (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 I_\nu &> \log B_\nu - o(1) = p(r_\nu) \left( k_\nu \log \log k_\nu - \sum_{l=2}^{k_\nu} \log \log l \right) - o(1) = \\
 &= p(r_\nu) \left\{ k_\nu \log \log k_\nu - \int_{e^e}^{k_\nu} \log \log x dx - O(1) \right\} = \\
 (2.16) \quad &= p(r_\nu) \left\{ -O(1) + \int_{e^e}^{k_\nu} \frac{dx}{\log x} \right\} = \\
 &= p(r_\nu) \left\{ 1 + o(1) \right\} \frac{k_\nu}{\log k_\nu} > \left\{ 1 - o(1) \right\} p(r_\nu) \frac{e^{r_\nu} \text{ def}}{r_\nu} = A_\nu.
 \end{aligned}$$

On peut aussi conclure de (2.15) que pour chaque  $\nu > d_0(b)$  et  $|z| = r_\nu$

$$(2.17) \quad |f_0(r_\nu e^{i\vartheta}) - b| = B_\nu \{1 + o(1)\},$$

donc d'après (2.16) et (2.17)

$$(2.18) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_0(r_\nu e^{i\vartheta}) - b| d\vartheta > \log B_\nu - o(1) > A_\nu.$$

Il faut discuter par la suite séparément le cas où  $b \neq 1$  et celui où  $b = 1$ . Supposons d'abord que  $b \neq 1$ . Dans ce cas  $z = 0$  n'est pas un zéro de la fonction  $f_0(z) - b = F(z)$ , la formule de JENSEN peut donc être appliquée sur les zéros de  $F(z)$  contenus dans le cercle  $|z| \leq r_\nu$ . Selon cette formule et la relation (2.18)

$$(2.19) \quad \log |F(0)| + \sum_{|z_n| \leq r_\nu}^n \log \frac{r_\nu}{|z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(r_\nu e^{i\vartheta})| d\vartheta > A_\nu.$$

Décomposons en deux parties la somme qui figure dans (2.19). Considérons d'abord la partie où n'interviennent que les zéros situés dans le cercle  $|z| \leq 1$ . Si  $\nu$  est suffisamment grand ( $\nu > d_1(b)$ ), alors  $r_\nu |z_n| > 1$  pour tous les  $|z_n| \leq 1$  et

$$(2.20) \quad \sum_{|z_n| \leq 1}^n \log \frac{r_\nu}{|z_n|} < c_1 \log r_\nu$$

où  $c_1$  est une constante convenablement choisie. En désignant ensuite par  $N_b(r_\nu)$  le nombre de tous les zéros de  $F(z)$  qui tombent dans le cercle  $|z| \leq r_\nu$ , nous pouvons écrire

$$(2.21) \quad \sum_{1 < |z_n| \leq r_\nu}^n \log \frac{r_\nu}{|z_n|} < N_b(r_\nu) \log r_\nu.$$

En conséquence de (2.19), (2.20) et (2.21) si  $\nu$  est assez grand, soit  $\nu > d_2(b)$ , on a

$$N_b(r_\nu) > \frac{A_\nu}{\log r_\nu}.$$

On peut donc choisir parmi les  $r_\nu$  une suite monotone croissante  $r_{\nu_1} < r_{\nu_2} < \dots < r_{\nu_s} < \dots$  telle que l'on ait

$$(2.22) \quad N_b(r_{\nu_s}) - N_b(r_{\nu_{s-1}}) > \frac{A_{\nu_s}}{\log r_{\nu_s}} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Compte tenu de (2.22) la somme (2.1) satisfait à l'inégalité

$$(2.23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(|z_n|) > \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{r_{\nu_{s-1}} < |z_n| \leq r_{\nu_s}} \varphi_0(|z_n|) > \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_0(r_{\nu_s}) \{N_b(r_{\nu_s}) - N_b(r_{\nu_{s-1}})\} > \\ > \{1 - o(1)\} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_0(r_{\nu_s}) p(r_{\nu_s}) \frac{e^{r_{\nu_s}}}{r_{\nu_s} \log r_{\nu_s}}.$$

(2.2) et (2.3) entraînent que le dernier terme de (2.23) tend vers  $+\infty$ . Le théorème est ainsi démontré pour  $b \neq 1$ .

Reste à examiner le cas où  $b = 1$ , mais celui-ci peut être facilement ramené au précédent. Nous avons d'après (2.5)

$$f_0(z) - 1 = \left( \frac{z^{k_1}}{g(k_1)} \right)^{p(r_1)} \left\{ \varepsilon_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n \frac{g(k_1)^{p(r_1)} z^{k_n p(r_n) - k_1 p(r_1)}}{g(k_n)^{p(r_n)}} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{z^{k_1}}{g(k_1)} \right)^{p(r_1)} f_1(z).$$

Par suite  $f_1(0) = \varepsilon_1$  et les zéros de  $f_1(z)$  coïncident avec les racines non nulles de l'équation  $f_0(z) = 1$ . Soit en outre

$$(2.24) \quad B_{1\nu} = \left( \frac{r_\nu^{k_1}}{g(k_1)} \right)^{p(r_1)}, \quad \frac{B_\nu}{B_{1\nu}} = C_\nu = \frac{g(k_1)^{p(r_1)}}{g(k_\nu)^{p(r_\nu)}} r_\nu^{k_\nu p(r_\nu) - k_1 p(r_1)}.$$

Selon (2.14) et (2.24) nous avons sur la circonférence  $|z| = r_\nu$

$$\left| f_1(z) - \varepsilon_\nu \frac{g(k_1)^{p(r_1)} z^{k_\nu p(r_\nu) - k_1 p(r_1)}}{g(k_\nu)^{p(r_\nu)}} \right| \leq o(C_\nu) + C_\nu \left( \sum_{n=2}^{v-1} Y'_n + \sum_{n=v+1}^{\infty} Y''_n \right) = o(C_\nu),$$

et il s'ensuit que

$$|f_1(r_\nu e^{i\theta})| = C_\nu \{1 + o(1)\}.$$

La formule de JENSEN s'applique donc à nouveau.  $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$  représentant les zéros de  $f_1(z)$ , chacun pris selon sa multiplicité et vu (2.18) il vient

$$(2.25) \quad \sum_{|z'_n| \leq r_\nu} \log \frac{r_\nu}{|z'_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_1(r_\nu e^{i\theta})| d\theta > \\ > \log C_\nu - o(1) = \{1 - o(1)\} B_\nu > A_\nu.$$

À partir de l'expression (2.25) se reproduit la même démonstration qui a suivi la relation (2.18). La fonction  $f_1(z)$  ne possède donc aucune valeur exceptionnelle  $\varphi_0$  et à plus forte raison  $f_0(z)$  non plus.

*Remarque ajoutée lors de la correction des épreuves.* Nous avons aperçu, plusieurs mois après avoir achevé cet ouvrage, que le théorème énoncé est valable avec quelques modifications pour certaines fonctions régulières dans le cercle-unité. Nous signalons ce résultat comme un corollaire de notre théorème sans le démontrer, la démonstration étant d'ailleurs assez simple.

**Corollaire.** La fonction  $\varphi_0(x)$  étant donnée, on peut trouver une fonction  $h_0(\zeta)$  régulière dans le cercle  $|\zeta| \leq 1$ , excepté le point  $\zeta = 1$ , telle que pour un  $b$  quelconque la fonction  $h_0(\zeta) - b$  possède une infinité de zéros, dans le cercle  $|\zeta| < 1$ , soient  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\mu, \dots$ , chacun pris avec sa multiplicité ayant pour point d'accumulation  $\zeta = 1$ , et

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_0 \left( \frac{1}{|1 - \zeta_\mu|} \right) = +\infty.$$

On peut prendre par exemple  $h_0(\zeta) = f_0 \left( \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)$ .

(Reçu le 20 Octobre 1960.)

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

L. ALPÁR и P. TURÁN

### Резюме

Пусть  $\varphi(x)$  есть определенная при  $x \geq 0$  положительная функция, как угодно быстро стремящаяся к 0 если  $x \rightarrow \infty$ ;  $f(x)$  — целая функция. Комплексное число  $b$  называется  $\varphi$ -исключительным значением функции  $f(z)$ , если

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(|z_\nu|) < +\infty,$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_\nu, \dots$  корни уравнения  $f(z) = b$ , взятые с их кратностью.

Из одной известной теоремы Бореля следует, что если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) x^a = 0$  при любом  $a > 0$ , и  $f(z)$  целая функция конечного порядка, то все конечные числа  $\varphi$ -исключительные значения. В связи с этим возникает следующий вопрос: существует ли такая функция  $\varphi(x)$ , что каждое комплексное число является  $\varphi$ -исключительным значением всякой целой функции? Оказы-



вается, что таких функций  $\varphi(x)$  не существует, более того, ко всякой положительной функции  $\varphi_0(x)$ , как угодно быстро стремящейся строго монотонно к 0 при  $x \rightarrow \infty$ , можно подобрать такую целую функцию  $f_0(z)$  не конечного порядка, которая не имеет  $\varphi$ -исключительных значений. Другими словами, если  $\varphi_0(x) > 0$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_0(x) = 0$ , то можно задать функцию  $f_0(z)$  так, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_0(|z_{\nu}|) = +\infty,$$

каким бы ни было комплексное число  $b$ , где  $z_1, z_2, \dots, z_{\nu}, \dots$  корни уравнения  $f_0(z) = b$ , взятые с их кратностью.

# ON A DENSITY THEOREM OF YU. V. LINNIK

by  
P. TURÁN

## § I.

1. Let  $\Delta$  be positive integer,  $\chi$  runs over the characters belonging to the moduls  $\Delta$ ,  $w = \sigma + it$  and  $L(w, \chi)$  the L-function belonging to  $\chi$ ,  $(l, \Delta) = 1$  and  $P(\Delta, l)$  the least prime  $= l \pmod{\Delta}$ . YU. V. LINNIK has proved in 1944 the important theorem<sup>1</sup>

$$(1.1.1) \quad P(\Delta, l) < \Delta^{c_1}$$

where  $c_1$  and later  $c_2, c_3, \dots$  stand in § I for positive numerical constants. One of his two main tools in his proof for (1.1.1) is the following theorem.<sup>2</sup>

If  $2 \leq \lambda \leq \frac{1}{10} \log \Delta$  and  $N(\lambda, \Delta)$  stands for the number of zeros of all  $L(w, \chi)$ 's mod  $\Delta$  in the domain

$$(1.1.2) \quad 1 - \frac{\lambda}{\log \Delta} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq \frac{e^\lambda}{\log \Delta},$$

then for  $\Delta > c_2$  the inequality

$$(1.1.3) \quad N(\lambda, \Delta) \leq e^{c_3 \lambda}$$

holds.

The aim of this note is to offer an alternative, rather short proof for this theorem. More exactly we shall prove the following theorem.

Denoting by  $N(\lambda, \Delta, t_0)$  the number of the zeros of all L-functions mod  $\Delta$  in the domain

$$(1.1.4) \quad 1 - \frac{\lambda}{\log \Delta} \leq \sigma \leq 1, \quad |t - t_0| \leq \frac{e^\lambda}{\log \Delta}$$

we have for  $|t_0| \leq \sqrt{\Delta}$  and suitable  $c_4, c_6, c_7$  and

$$(1.1.5) \quad 0 \leq \lambda \leq c_4 \log \Delta$$

<sup>1</sup> For a detailed exposition of LINNIK's very powerful proof in simplified form due to K. A. RODOSKIJ, see the book of K. PRACHAR: *Primzahlverteilung*. (Springer, 1957) in particular p. 330—370.

<sup>2</sup> The theorem (1.1.2)—(1.1.3) is identical with theorem 2.1 on p. 331. of PRACHAR's book and for the proof (after some preparations in § I of Chapter VII.) see p. 331—348 of this book.

for  $\Delta > c_5$  the inequality

$$(1.1.6) \quad N(\lambda, \Delta, t_0) \leq c_6 e^{c_7 \lambda}.$$

2. Our proof (though we made no attempt to squeeze out possibly small values) gives possibility to find not too large *explicit* values for  $c_4$ ,  $c_6$  and  $c_7$  (which have a significance in finding a possibly small value for the important constant  $c_1$ ). Let namely  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  be the following three constants (whose numerical values can be evaluated by well-known arguments.<sup>3</sup>)

I. For  $(l, \Delta) = 1$  and  $x \geq \Delta^3$  we have

$$(1.2.1) \quad S_l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{\Delta}}} \Lambda(n) \leq a_1 \frac{x}{\varphi(\Delta)}.$$

(BRUN's method, in the simplified form of A. SELBERG gives for  $a_1$  a value  $< 4$ .)

II. If  $0 \leq \delta \leq 1$ , then the number of zeros of each single  $L(w, \chi)$  in the square

$$1 - \delta \leq \sigma \leq 1, \quad |t - t_1| \leq \frac{\delta}{2} \quad (t_1 \text{ real})$$

is at most

$$(1.2.2.) \quad 1 + a_2 \delta \log \{\Delta(1 + |t_1|)\}.$$

( $a_2$  can be chosen about  $\frac{1}{2}$ ).

III. The parallelogramm

$$(1.2.3) \quad 1 - \frac{a_3}{\log \Delta} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq 1$$

can contain at most one simple zero of  $\prod L(w, \chi)$ . (If such a  $\varrho$ -zero („Siegel-zero“) exists and  $L(\varrho, \chi^*) = 0$ , then we shall call  $\chi^*$  an „exceptional“ character).

Further let  $\omega$  be the smallest positive integer satisfying the following inequalities:

$$(1.2.4a) \quad \omega \geq e^4, \quad (1.2.4e) \quad \omega \geq \left(\frac{8}{a_3}\right)^{\frac{2}{5}}.$$

$$(1.2.4b) \quad \omega \geq \frac{3}{8a_2}, \quad (1.2.4f) \quad \omega \geq 36a_2^2$$

$$(1.2.4c) \quad 8e(\omega + 1) \left(\frac{2}{3}\right)^\omega < \left(\frac{2}{3}\right)^{\omega^{3/4}}, \quad (1.2.4g) \quad \omega \geq \frac{1}{a_2^4}$$

$$(1.2.4d) \quad \frac{36a_2 \log(9e\omega)}{\sqrt{\omega}} \leq 1, \quad (1.2.4h) \quad 1 \geq (36\omega)^2 a_1 e^{-\frac{a_1}{8}\omega^{\frac{5}{2}}} + e^{-\frac{a_2 a_3}{2}\omega^{\frac{5}{2}}}.$$

<sup>3</sup> All can be found in PRACHAR's book, for I. see p. 44, for II. see p. 331, for III. see p. 118. 120 and 122.



Then we assert that with this  $\omega$

$$(1.2.5) \quad c_4 = \frac{1}{2\omega^2}, \quad c_6 = \frac{6}{a_3}, \quad c_7 = (\omega^2 + 1)^5$$

can be chosen in (1.1.5) resp. (1.1.6).

3. For the sake of orientation I remark that for

$$\log \log \Delta \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \log \Delta.$$

LINNIK's estimation (1.1.2)—(1.1.3) is easy<sup>4</sup> and the same holds in the whole range  $2 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \log \Delta$  about the proof of the inequality

$$(1.3.1) \quad N(\lambda, \Delta) \leq e^{c_2 \lambda} \log \Delta;$$

the principal difficulty lies in eliminating the logarithmic factor in (1.3.1) for the range  $a_3 \leq \lambda \leq \log \log \Delta$ . My proof of the theorem (1.1.5)—(1.1.6) will turn out to be essentially an application of my second main theorem in the following special form.<sup>5</sup>

If  $m$  is a positive integer,

$$(1.3.2) \quad \max_{j=1, \dots, n} |z_j| \geq 1$$

and  $n \leq N_1$ , then for a suitable integer  $r_1$  with

$$(1.3.3) \quad m + 1 \leq r_1 \leq m + N_1$$

we have

$$(1.3.4) \quad |z_1^{r_1} + z_2^{r_1} + \dots + z_n^{r_1}| \geq \left( \frac{N_1}{8e(m + N_1)} \right)^{N_1}.$$

The paper apart from this is self-contained. The only new feature (compared to other applications of this theorem) is, apart from the un-

<sup>4</sup> For a very short and simple proof see my paper »Über die Wurzeln der Dirichletschen L.-Functionen.« *Acta Scient. Szeged* T. **10** (1943) 3–4 p. 188–201 (manuscr. received 27. Aug. 1941).

<sup>5</sup> See my book: *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953; a completely rewritten English edition will appear among the Interscience Tracts. As to this sharper form of the theorem see our paper with Vera T. Sós "On some new theorems in the theory of diophantine approximations." *Acta Math. Hung.* T. **6** (1955) 3–4, p. 241–254.

sual choice of some parameters, an estimation of the quantity  $|R(n)|$  (see lemma I) which was dispensable in the previous applications.<sup>6</sup>

Theorem (1.1.2)—(1.1.3) enables one to prove (1.1.1) for at least the half of the progressions mod  $\Delta$  and also to prove (1.1.1) for all progressions mod  $\Delta$  with a „small”  $c_1$  under the supposition that there is no exceptional character mod  $\Delta$  in the sense of III. (which as well-known is generally the case, apart from a „very few”  $\Delta$ 's). We shall not treat these here. In the case when an exceptional character exists mod  $\Delta$ , the situation is met by Linnik's second theorem (theorem 3.1. in PRACHAR's book). I think that also this theorem can be proved along the lines of this paper.

As we shall show in 9. of § II the theorem (1.1.4)—(1.1.5)—(1.1.6) can be quickly deduced from the following.

**Theorem.** For  $\omega$  satisfying (1.2.4),  $\Delta > c_8$ , for

$$(1.3.5) \quad 1 - \frac{1}{2\omega^{5/2}} \leq \gamma \leq 1$$

and  $|t_2| \leq \Delta^{1/4}$ , the total-number of zeros of all  $L$ -functions belonging to modulus  $\Delta$  in the square

$$(1.3.6) \quad \gamma \leq \sigma \leq 1, \quad |t - t_2| \leq \frac{1 - \gamma}{2}$$

cannot exceed

$$(1.3.7) \quad 4 \Delta^{\omega^{5/2}(1-\gamma)}.$$

Since in the proof we want to make dependent  $c_4$ ,  $c_6$  and  $c_7$  upon the quantities  $a_1$ ,  $a_2$  and  $a_3$ , we shall make the distinction in the constants denoting by  $b_1$ ,  $b_2$ , ... positive numerical constants with values independent of  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  and by  $d_1$ ,  $d_2$ , ... constants depending only upon  $a_1$ ,  $a_2$  and  $a_3$  (and  $\omega$ ).

## § II.

1. Now we shall prove the formulated theorem (1.3.5)—(1.3.6)—(1.3.7). Fixing  $\omega$  according to (1.2.4) let  $\beta$  be an arbitrary positive number satisfying

$$(2.1.1) \quad \frac{a_3 \omega^2}{2 \log \Delta} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$$

(which has a sense for  $\Delta > d_1$ ) and fixed. Then we define

$$(2.1.2) \quad A = \left[ \frac{\sqrt{\omega}}{\beta} \right] (> 28).$$

<sup>6</sup> The useful kernel  $K_1(\omega)$  in (2.1.6) and the quantity  $R(n)$  appeared for the first time in my paper "On the so-called density-hypothesis in the theory of zeta-function of Riemann." *Acta Arith.* 4 (1958) 1. 31—56.

Owing to (1.2.2) the number of zeros of each single  $L(w, \chi)$  in the square

$$(2.1.3) \quad 1 - \frac{4}{A} \leq \sigma \leq 1, \quad |t - t_1| \leq \frac{2}{A}$$

with  $|t_1| \leq A$  is for  $A > d_2$  at most

$$(2.1.4) \quad 1 + a_2 \frac{4}{A} \log A(1 + A) < 2 + \frac{8a_2}{A} \log A \stackrel{\text{def}}{=} N.$$

The integer  $k$  should be restricted at present only by

$$(2.1.5) \quad \omega N \leq k \leq (\omega + 1)N;$$

then we have evidently  $k > 98$ . Let further

$$(2.1.6) \quad K(w) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2w} \frac{e^w - e^{-w}}{2w}, \quad K_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} K(Aw),$$

further for  $n = 1, 2, \dots$

$$(2.1.7) \quad R(n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} K_1(w)^k e^{-w \log n} dw$$

and

$$(2.1.8) \quad g_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x} e^{-\frac{k}{5} \left(2 - \frac{\log x}{kA}\right)^2}.$$

2. As to  $R(n)$  we shall need the

**Lemma I.** *We have for  $n \geq e^{3kA}$  or  $n \leq e^{kA}$*

$$(2.2.1) \quad R(n) = 0,$$

further for  $e^{kA} \leq n \leq e^{3kA}$

$$(2.2.2) \quad |R(n)| \leq \frac{1}{A} \sqrt{\frac{7}{k}} n g_0(n).$$

Since the integrand in (2.1.7) is an entire function tending to 0 sufficiently quickly on every vertical line, Cauchy's theorem gives

$$(2.2.3) \quad R(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} K_1(w)^k e^{-w \log n} dw.$$

Applying the binomial formula in (2.1.7) resp. (2.2.3) and the well-known formulas

$$(2.2.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{e^{\lambda w}}{w^k} dw = 0, \quad \text{resp} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} \frac{e^{i\lambda w}}{w^k} dw = 0,$$



valid for  $\lambda \leq \text{resp. } \lambda \geq 0$  we get (2.2.1) at once. To prove (2.2.2) we remark that writing

$$(2.2.5) \quad 2 - \frac{\log n}{kA} = \vartheta, \quad -1 \leq \vartheta \leq +1$$

we have from (2.1.7)

$$(2.2.6) \quad R(n) = \frac{1}{2\pi i A} \int_{(-\frac{\vartheta}{4})} \left( e^{\vartheta w} \frac{e^w - e^{-w}}{2w} \right)^k dw \stackrel{\text{def}}{=} J_1 + J_2$$

where  $J_1$  means the integral with  $|t| \leq 4$  and  $J_2$  the rest. For the second we have trivially

$$(2.2.7) \quad |J_1| \leq \frac{1}{\pi A} \int_4^\infty \left( e^{-\frac{\vartheta^2}{4}} \frac{e^{\frac{|\vartheta|}{4}}}{t} \right)^k dt \leq \frac{4^{1-k} e^{\frac{k}{16}}}{\pi A(k-1)} < \frac{e^{-\frac{k\vartheta^2}{5}}}{4A\sqrt{k}}.$$

For  $J_1$  we have

$$(2.2.8) \quad |J_1| \leq \frac{1}{\pi A} e^{-\frac{\vartheta^2 k}{4}} \int_0^4 \left( \frac{(e^{\frac{|\vartheta|}{4}} - e^{-\frac{|\vartheta|}{4}})^2 + \sin^2 t}{\frac{\vartheta^2}{4} + 4t^2} \right)^{\frac{k}{2}} dt.$$

Since, as easy to see,

$$(e^{\frac{|\vartheta|}{4}} - e^{-\frac{|\vartheta|}{4}})^2 \leq \left\{ \frac{|\vartheta|}{2} \left( 1 + \frac{\vartheta^2}{90} \right) \right\}^2 < \frac{\vartheta^2}{4} e^{\frac{\vartheta^2}{45}},$$

we get from (2.2.8)

$$(2.2.9) \quad |J_1| \leq \frac{e^{\frac{k\vartheta^2}{90}(\frac{1}{90} - \frac{1}{4})}}{\pi A} \int_0^4 \left( \frac{1 + \frac{16}{\vartheta^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{45}} \sin^2 t}{1 + \frac{16}{\vartheta^2} t^2} \right)^{\frac{k}{2}} dt.$$

Since for  $0 \leq t \leq 4$  we have

$$(0 \leq) \sin t \leq t - \frac{t^3}{30}, \quad \text{i. e.} \quad \sin^2 t \leq t^2 - \frac{t^4}{30},$$

further for  $-1 \leq \vartheta \leq +1$

$$\left( \frac{1}{45} - \frac{1}{30.16} \right) \vartheta^2 - \frac{\vartheta^4}{30.45.16} \geq \frac{1}{30.45} \cdot 16 \vartheta^2 \geq \frac{\vartheta^2 \cdot t^2}{30.45}$$

i. e.

$$\left\{ \left( \frac{1}{45} - \frac{1}{30.16} \right) \vartheta^2 - \frac{\vartheta^4}{30.45.16} \right\} t^2 - \frac{\vartheta^2 t^4}{30.45} \geq 0$$

we obtain

$$\sin^2 t \leq \left\{ \left( 1 - \frac{\vartheta^2}{30.16} \right) t^2 - \frac{t^4}{30} \right\} \left( 1 + \frac{\vartheta^2}{45} \right) < e^{\frac{\vartheta^2}{45}} \left\{ \left( 1 - \frac{\vartheta^2}{30.16} \right) t^2 - \frac{t^4}{30} \right\}$$

i. e.

$$1 + \frac{16}{\vartheta^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{45}} \sin^2 t \leq \left( 1 + \frac{16}{\vartheta^2} t^2 \right) \left( 1 - \frac{t^2}{30} \right).$$

Putting it into (2.2.9) we obtain

$$|J_1| \leq \frac{e^{-\frac{k\vartheta^2}{5}}}{\pi A} \int_0^4 \left( 1 - \frac{t^2}{30} \right)^2 dt < \frac{e^{-\frac{k\vartheta^2}{5}}}{\pi A} \int_0^\infty e^{-\frac{kt^2}{60}} dt = \sqrt{\frac{15}{\pi k}} \frac{1}{A} e^{-\frac{k\vartheta^2}{5}}.$$

This and (2.2.7) prove the lemma.

3. Let  $b$  be real and

$$(2.3.1) \quad J(\chi, b) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} K_1(w)^k \frac{L'}{L}(w+1+ib, \chi) dw.$$

Then we have the simple

**Lemma II.** *We have independently of  $b$*

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\chi} |J(\chi, b)|^2 < 112 a_1^2.$$

We have namely from (2.1.7) and (2.2.1)

$$(2.3.2) \quad J(\chi, b) = \sum_{e^{kA} \leq n \leq e^{3kA}} \frac{\Lambda(n) R(n)}{n^{1+ib}} \chi(n).$$

Writing

$$\Lambda(n) R(n) n^{-1-ib} = e_n$$

shortly, we get

$$S = \sum_{\chi} \sum_{n_1, n_2} e_{n_1} \bar{e}_{n_2} \chi(n_1) \overline{\chi(n_2)},$$

where  $n_1$  and  $n_2$  run independently over  $[e^{kA}, e^{3kA}]$ . Changing the order of summations we obtain

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} S &= \varphi(\Delta) \sum_{(l, \Delta)=1} \left| \sum_{\substack{e^{kA} \leq n \leq e^{3kA} \\ n \equiv l \pmod{\Delta}}} e_n \right|^2 \leq \varphi(\Delta) \sum_{(l, \Delta)=1} \left( \sum_{\substack{e^{kA} \leq n \leq e^{3kA} \\ n \equiv l \pmod{\Delta}}} \frac{\Lambda(n)}{n} |R(n)| \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{7\varphi(\Delta)}{A^2 k} \sum_{(l, \Delta)=1} \left( \sum_{\substack{e^{kA} \leq n \leq e^{3kA} \\ n \equiv l \pmod{\Delta}}} \Lambda(n) g_0(n) \right)^2 = \frac{7\varphi(\Delta)}{A^2 k} \sum_{(l, \Delta)=1} \left( \int_{e^{kA}}^{e^{3kA}} g_0(x) dS_l(x) \right)^2, \end{aligned}$$

using (2.2.2) and (1.2.1). The last integral is

$$(2.3.4) \quad = [g_0(x) S_l(x)]_{e^{kA}}^{e^{3kA}} - \int_{e^{kA}}^{e^{3kA}} S_l(x) |g'_0(x)| dx.$$

One sees at once from (2.1.8) that the (non-negative)  $g_0(x)$  assumes for  $x \geq 0$  its only maximum at

$$x_0 = e^{kA \left(2 - \frac{5A}{2}\right)} < e^{kA},$$

i. e. the expression in (2.3.4)

$$(2.3.5) \quad = [g_0(x) S_l(x)]_{e^{kA}}^{e^{3kA}} + \int_{e^{kA}}^{e^{3kA}} S_l(x) |g'_0(x)| dx.$$

Since in the range of integration we have, using (2.1.5), (2.1.4) and (1.2.4b) the inequality

$$\log x \geq kA \geq \omega NA > \omega 8a_2 \log A \geq 3 \log A,$$

BRUN's estimation (1.2.1) is applicable and hence the expression in (2.3.5) is

$$\begin{aligned} &\leq [g_0(x) S_l(x)]_{e^{kA}}^{e^{3kA}} + \frac{a_1}{\varphi(\Delta)} \int_{e^{kA}}^{e^{3kA}} x |g'_0(x)| dx = [g_0(x) S_l(x)]_{e^{kA}}^{e^{3kA}} - \frac{a_1}{\varphi(\Delta)} \int_{e^{kA}}^{e^{3kA}} x g'_0(x) dx = \\ &= \left[ g_0(x) \left( S_l(x) - \frac{a_1 x}{\varphi(\Delta)} \right) \right]_{e^{kA}}^{e^{3kA}} + \frac{a_1}{\varphi(\Delta)} \int_{e^{kA}}^{e^{3kA}} g_0(x) dx < g_0(e^{kA}) \frac{a_1}{\varphi(\Delta)} e^{kA} + \\ &+ 2 \frac{a_1 kA}{\varphi(\Delta)} \int_0^\infty e^{-\frac{k}{5} t^2} dt < \frac{a_1}{\varphi(\Delta)} (1 + A \sqrt{5\pi k}) < \frac{4a_1}{\varphi(\Delta)} A \sqrt{k}. \end{aligned}$$

Putting it into (2.3.3) lemma II follows.

4. It follows from lemma II that with the  $\beta$  in (2.1.1) the inequality

$$(2.4.1) \quad |J(\chi, b)| \leq 11 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}}$$

holds for all  $\chi$ 's mod  $\Delta$ , with the exception of  $\Delta^\beta$  „bad” characters at most (which may depend upon  $b$ ). Putting, if necessary, the principal character, and the (perhaps existing) „exceptional” character among the „bad” ones, their number is

$$(2.4.2) \quad \Delta^\beta + 2$$

at most. Since as well-known

$$\left| \frac{L'}{L} \left( -\frac{1}{2} + it, \chi \right) \right| \leq b_1 \log(\Delta(1 + |t|))$$



and from the definition of  $K_1(w)$  in the left half-plane the inequality

$$(2.4.3) \quad |K_1(w)| = e^{\frac{A\sigma}{2}} \left| \frac{e^{\frac{5}{2}Aw} - e^{\frac{A}{2}w}}{2wA} \right| \leq \frac{e^{\frac{A\sigma}{2}}}{A\sqrt{\sigma^2 + t^2}}$$

follows, we have

$$(2.4.4) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\frac{3}{2})}^{L'} K_1(w)^k \frac{L'}{L}(w+1+ib, \chi) dw \right| < \\ < \frac{b_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(\Delta(1+|t|)) \cdot \frac{e^{-\frac{3}{4}kA}}{\left(\frac{9}{4} + (t+b)^2\right)^{\frac{k}{2}}} dt.$$

Owing to (2.1.5), (2.1.4), (1.2.4b), for

$$-\Delta \leq b \leq \Delta$$

the right-side expression in (2.4.4) is

$$< b_2 \frac{\log \Delta}{\Delta^{\frac{9}{4}}};$$

hence a routine application of Cauchy's integral theorem to the integral defining  $J(\chi, b)$  leads from (2.4.1) to the

**Lemma III.** For  $\Delta > d_2$  for each „b-good” characters mod  $\Delta$  (i. e. with exception of  $(\Delta^{\frac{1}{2}} + 2)$  characters at most, depending perhaps upon  $b$ ) we have

$$(2.4.5) \quad \left| \sum_{\varrho} K_1(\varrho - 1 - ib)^k \right| < 12 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}},$$

where  $\varrho$  runs over the zeros of the respective  $L(w, \chi)$  in the strip  $0 \leq \sigma < 1$ .

5. We define

$$(2.5.1) \quad \alpha_j = \frac{2j}{\omega^2 A}, \quad (j = 0, \pm 1, \dots, \pm \Delta)$$

and the squares

$$(2.5.2) \quad D_j: \quad 1 - \frac{2}{\omega^2 A} \leq \sigma \leq 1, \quad |t - \alpha_j| \leq \frac{1}{\omega^2 A}.$$

Then we assert the crucial

**Lemma IV.** Fixing any of the  $\alpha_j$ 's in (2.5.1) none of the  $L(w, \chi)$ 's belonging to an „ $\alpha_j$ -good” character can vanish in the square  $D_j$  of (2.5.2), if  $\Delta > d_3$ .

Suppose this would be false for  $j = j_0$ , and for an  $L(w, \chi')$  belonging to an „ $\alpha_{j_0}$ -good” character  $\chi'$ ,  $\varrho'$  being a zero of  $L(w, \chi')$  in  $D_{j_0}$ . In order to derive a contradiction out of this assumption we start from the inequality

(2.4.5) with  $\chi = \chi'$  and  $b = \sigma_{j_0}$ . We consider first the contribution of the  $\varrho$ 's with

$$(2.5.3) \quad \operatorname{Im} \varrho \geq \frac{2j_0}{\omega^2 A} + \frac{2}{A}.$$

We cover this part of the critical strip by the squares

$$(2.5.4) \quad P_{\mu\nu}: \quad 1 - \frac{\mu+1}{A} \leq \sigma < 1 - \frac{\mu}{A} \quad \mu = 0, 1, \dots, A-1,$$

$$\frac{2j_0}{\omega^2 A} + \frac{\nu}{A} \leq t < \frac{2j_0}{\omega^2 A} + \frac{\nu+1}{A}, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

The absolute value of each term belonging to  $P_{\mu\nu}$  cannot exceed owing to (2.4.3) the quantity

$$\nu^{-k} e^{-\frac{k\mu}{2}}$$

and the number of terms owing to (1.2.2) (applying it a bit roughly with

$$\delta = \frac{\mu+1}{A}, \quad t_1 = \frac{2j_0}{\omega^2 A} + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{A}$$

cannot exceed

$$1 + a_2 \frac{\mu+1}{A} \left\{ \log A + \log \left( 1 + \frac{2j_0}{\omega^2 A} + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{A} \right) \right\}.$$

Hence this contribution is for  $\Delta > d_4$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\mu=0}^{A-1} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^{-k} e^{-\frac{k\mu}{2}} \left( 1 + a_2 \frac{\mu+1}{A} \right) \left\{ \log A + \log \left( 1 + \frac{2j_0}{\omega^2 A} + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{A} \right) \right\} \leq \\ &\leq 2^{1-k} + a_2 \frac{\log A}{A} \cdot 2^{1-k} + \frac{a_2 \sqrt{2}}{A} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^{-k} \log(1 + \Delta + \nu) < \\ &< 2 \left( 1 + 2a_2 \frac{\log A}{A} \right) 2^{-k}. \end{aligned}$$

The same holds for the contribution of the  $\varrho$ 's with

$$\operatorname{Im} \varrho \leq \frac{2j_0}{\omega^2 A} - \frac{2}{A};$$

hence the total contribution of the  $\varrho$ 's with

$$(2.5.5) \quad \left| \operatorname{Im} \varrho - \frac{2j_0}{\omega^2 A} \right| \geq \frac{2}{A}$$

does not exceed

$$(2.5.6) \quad 4 \left( 1 + 2a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) 2^{-k}.$$

6. Next we consider the contribution of the zeros with

$$(2.6.1) \quad 0 \leq \sigma \leq 1 - \frac{4}{A}, \quad |t - \alpha_{j0}| \leq \frac{2}{A}.$$

We cover this part of the critical strip by the parallelogramms

$$(2.6.2) \quad Q_\mu: \quad 1 - \frac{\mu + 1}{A} \leq \sigma < 1 - \frac{\mu}{A}, \quad |t - \alpha_{j0}| \leq \frac{2}{A}.$$

$$(\mu = 4, 5, \dots, A - 1)$$

The absolute value of each term belonging to  $Q_\mu$  cannot exceed owing to (2.4.3) the quantity

$$\mu^{-k} e^{-\frac{k\mu}{2}}.$$

and the number of terms owing to (1.2.2) (applying it with  $\delta = \frac{\mu + 1}{A}$ ,  $t_1 = \alpha_{j0}$ ) cannot exceed

$$1 + a_2 \frac{\mu + 1}{A} \left\{ \log \Delta + \log \left( 1 + \frac{2j_0}{\omega^2 A} \right) \right\} < 1 + 2a_2 \frac{\mu + 1}{A} \log \Delta.$$

Hence the contribution of the  $Q_\mu$ -parallelogramms is at most

$$(2.6.3) \quad \sum_{\mu=4}^{\infty} \mu^{-k} e^{-\frac{k\mu}{2}} \left( 1 + 2a_2 \frac{\mu + 1}{A} \log \Delta \right) < \left( 1 + 3a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) 4^{-k}.$$

From (2.4.5), (2.5.6) and (2.6.3) we get for  $\Delta > d_5$

$$(2.6.4) \quad |\sum' K_1(\varrho - 1 - ib)^k| < 12a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} + 5 \left( 1 + 2a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) 2^{-k},$$

where the summation refers to the  $\varrho$ 's in

$$(2.6.5) \quad 1 - \frac{4}{A} \leq \sigma \leq 1, \quad |t - \alpha_{j0}| \leq \frac{2}{A}.$$

With  $\varrho$ 's in  $D_{j0}$  we can write (2.6.4) in the form

$$(2.6.6) \quad |K_1(\varrho' - 1 - i\alpha_{j0})|^k \left| \sum' \left( \frac{K_1(\varrho - 1 - i\alpha_{j0})}{K_1(\varrho' - 1 - i\alpha_{j0})} \right)^k \right| \leq$$

$$\leq 12a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} + 5 \left( 1 + 2a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) 2^{-k}.$$



Since in the domain

$$-\frac{2}{\omega^2} \leq \sigma \leq 0, \quad |t| \leq \frac{1}{\omega^2}$$

we have the estimation

$$|K(w)|^k \geq e^{-\frac{4k}{\omega^2}} \left( 1 - \frac{1}{3!} \left( \frac{3}{\omega^2} \right)^2 - \frac{1}{5!} \left( \frac{3}{\omega^2} \right)^4 - \dots \right)^k > e^{-\frac{4k}{\omega^2}} \left( 1 - \frac{2}{\omega^4} \right)^k > e^{-\frac{5k}{\omega^2}},$$

i. e. for

$$-\frac{2}{\omega^2 A} \leq \sigma \leq 0, \quad |t| \leq \frac{1}{\omega^2 A}$$

$$|K_1(w)|^k \geq e^{-\frac{4k}{\omega^2}}$$

we have

$$|K_1(\varrho' - 1 - i\alpha_{j0})|^k \geq e^{-\frac{5k}{\omega^2}}$$

and hence from (2.6.6)

$$(2.6.7) \quad \left| \sum' \left( \frac{K_1(\varrho - 1 - i\alpha_{j0})}{K_1(\varrho' - 1 - i\alpha_{j0})} \right)^k \right| \leq 12 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} e^{\frac{5k}{\omega^2}} + \left( \frac{1}{2} + a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^k$$

with the summation indicated in (2.6.5).

**7.** We want to apply to the remaining sum the theorem (1.3.2)—(1.3.3)—(1.3.4) with

$$(2.7.1) \quad m = [\omega N]$$

and

$$z_j = \frac{K_1(\varrho - 1 - i\alpha_{j0})}{K_1(\varrho' - 1 - i\alpha_{j0})}.$$

Owing to (2.1.4) and (2.6.5) we may choose

$$(2.7.2) \quad N_1 = N;$$

then the interval  $m + 1 \leq x \leq m + N_1$  is obviously contained in  $\omega N \leq x \leq (\omega + 1)N$  and thus we may choose as  $k$  the  $\nu_1$  in (1.3.3). Then (2.6.7) assumes the form

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{8e(\omega + 1)} \right)^N &\leq 12 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} e^{\frac{5\nu_1}{\omega^2}} + \left( \frac{1}{2} + a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{\nu_1} \leq \\ &\leq 12 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} e^{\frac{6N}{\omega}} + \left( \frac{1}{2} + a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{\omega N} \end{aligned}$$

or

$$1 \leq 12 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} (8 e^{1+\frac{6}{\omega}} (\omega + 1))^N + \left( \frac{1}{2} + a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) \left\{ 8e(\omega + 1) \left( \frac{2}{3} \right)^\omega \right\}^N$$

or owing to (1.2.4c)

$$(2.7.3) \quad 1 \leq 12 a_1 \Delta^{-\frac{\beta}{2}} (9e\omega)^N + \left( \frac{1}{2} + a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{N\omega^{3/4}}.$$

Using (2.1.4) it would follow

$$1 \leq (9e)^2 12 a_1 \omega^2 \Delta^{-\frac{\beta}{2} + \frac{8a_2}{A} \log(9e\omega)} + \left( \frac{1}{2} + a_2 \frac{\log \Delta}{A} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{8a_2}{A} \omega^{3/4} \log \Delta}$$

further from (2.1.2) using the abbreviation  $\beta \log \Delta = \xi$

$$(2.7.4) \quad \begin{aligned} 1 &\leq (9e)^2 12 a_1 \omega^2 e^{\xi \left( -\frac{1}{2} + \frac{9a_2 \log 9e\omega}{V\omega} \right)} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2a_2}{V\omega} \xi \right) e^{-8 \log \frac{3}{2} a_2 \omega^{1/4} \xi} < \\ &< (36\omega)^2 a_1 e^{-\frac{\xi}{4}} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2a_2}{V\omega} \xi \right) e^{-\frac{8}{3} a_2 \omega^{1/4} \xi}, \end{aligned}$$

taking in account (1.2.4d). Owing of the definition of  $\xi$  and (2.1.1) and (1.2.4e) we have

$$(2.7.5) \quad \xi \geq \frac{a_3}{2} \omega^{\frac{5}{2}} (\geq 4)$$

and hence using this, (1.2.4f) and (1.2.4g)

$$\frac{1}{2} + \frac{2a_2}{V\omega} \xi < 1 + \frac{\xi}{3} < \frac{\xi^2}{2!} \leq \frac{(\xi a_2 \omega^{1/4})^2}{2!} < e^{a_2 \omega^{1/4} \xi},$$

putting it into (2.7.4)

$$1 < (36\omega)^2 a_1 e^{-\frac{\xi}{4}} + e^{-a_2 \omega^{1/4} \xi} < (36\omega)^2 a_1 e^{-\frac{a_3}{8} \omega^{\frac{5}{2}}} + e^{-\frac{a_2 a_3}{2} \omega^{\frac{5}{2}}}$$

which contradicts to (1.2.4h). This proves lemma IV.

**8.** Consider now an arbitrary of our  $D_j$ 's in (2.5.2). Owing to lemma IV, (2.4.2) and (1.2.2) the total-number of zeros of all  $L$ -functions mod  $\Delta$  in  $D_j$  is at most

$$(2.8.1) \quad \begin{aligned} (\Delta^\beta + 2) \left\{ 1 + a_2 \frac{2}{\omega^2 A} \log \left( \Delta \left( 1 + \frac{2|j|}{\omega^2 A} \right) \right) \right\} &< (e^\xi + 2) \left( 1 + \frac{5a_2}{\omega^{5/2}} \xi \right) < \\ &< (e^\xi + 2) \left( 1 + \frac{\xi}{\omega^2} \right) < (e^\xi + 2) e^{\frac{\xi}{\omega^2}} < 2 e^{\left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \right) \xi} = 2 \Delta^\beta \left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \right), \end{aligned}$$

using also (2.1.2), (2.5.1) and (1.2.4f). Since from (2.1.2)

$$\frac{2}{\omega^2 A} \geq \frac{2}{\omega^{5/2}} \beta,$$

the estimation (2.8.1) holds a fortiori for the number of zeros of all  $L$ -functions mod  $\Delta$  in each square

$$(2.8.2) \quad 1 - \frac{2}{\omega^{\frac{5}{2}}} \beta \leq \sigma \leq 1, \quad \left| t - \frac{2j}{\omega^2 \Delta} \right| \leq \frac{\beta}{\omega^{\frac{5}{2}}} \quad (j = 0, \pm 1, \dots, \pm \Delta).$$

This is proved under the restriction (2.1.1); if

$$0 \leq \beta \leq \frac{a_3 \omega^{\frac{5}{2}}}{2 \log \Delta},$$

then the square (2.8.2) is obviously contained in the parallelogramm (1.2.3) i. e. the estimation (2.8.1) holds trivially. Since the square in our theorem can be covered for  $\Delta > d_6$  by two squares at most, both of the form (2.8.2) with

$$\beta = \frac{\omega^{\frac{5}{2}}}{2} (1 - \gamma),$$

the theorem (1.3.5)—(1.3.6)—(1.3.7) is proved.

**9.** Finally we shall deduce from (1.3.5)—(1.3.6)—1.3.7) the theorem of LINNIK in the form (1.1.4)—(1.1.5)—1.1.6). We may suppose

$$a_3 \leq \lambda \leq \frac{1}{2 \omega^{\frac{5}{2}}} \log \Delta$$

in (1.1.4) owing to (1.2.3). We can cover the parallelogramm (1.1.4) by  $2 \left( 1 + \left\lfloor \frac{e^\lambda}{\lambda} \right\rfloor \right)$  squares of the form (1.3.6) with

$$\gamma = 1 - \frac{\lambda}{\log \Delta}$$

and  $|t_2| < \Delta^{\frac{3}{4}}$ . Hence by the theorem (1.3.5)—(1.3.6)—(1.3.7) the total-number of zeros in (1.1.4) cannot exceed

$$2 \left( 1 + \frac{e^\lambda}{\lambda} \right) 4 e^{\omega^{\frac{5}{2}} \lambda} < \left( 1 + \frac{1}{e} \right) 4 \frac{e^\lambda}{\lambda} e^{\omega^{\frac{5}{2}} \lambda} < \frac{6}{a_3} e^{(\omega^{\frac{5}{2}} + 1) \lambda}.$$

Q. e. d.

(Received October 25, 1960.)



## О ТЕОРЕМЕ ПЛОТНОСТИ Ю. В. ЛИННИКА

P. TURÁN

## Резюме

В 1944-ом году Ю. В. Линник доказал, что существует такое положительное постоянное число  $b$ , что если  $(k, l) = 1$ , тогда существует простое число  $p \equiv l \pmod{k}$  такое, что  $p < k^b$ ; Это доказательство было упрощенно К. А. Родосски. Трудность в доказательстве этой глубокой теоремы состоит в доказательстве двух других теорем, первой из которых является теорема плотности указанная в заголовке. В настоящей статье дается в самом себе полное, отличное от первоначального, доказательство этой теоремы на основании теоремы (1.3.2) — (1.3.3) — (1.3.4) автора, являющейся также источником многих других результатов теории чисел, с подробностями делающими возможным эффективное определение встречающихся там существенных постоянных (1. (1.2.4)). Недавно S. Kłarowski удалось на основании этого доказательства найти также доказательство второй упомянутой теоремы.



# ON THE MINIMAL NUMBER OF VERTICES REPRESENTING THE EDGES OF A GRAPH

by

PAUL ERDŐS and TIBOR GALLAI

## Introduction

In this paper we will only consider non-directed graphs which do not contain loops and where two vertices are connected by at most one edge<sup>1</sup> (see [1] and [7]). We permit isolated points and we do not exclude the empty graph i. e. the graph without vertices and edges.  $\pi(G)$  and  $\nu(G)$  denotes the number of vertices respectively of edges of the graph  $G$ .  $G' \subseteq G$  denotes that  $G'$  is a subgraph of  $G$ . (If  $G' \subseteq G$  and  $G' \neq G$ , we write  $G' \subset G$ .)

We shall say that the vertices  $P_1, \dots, P_k (k \geq 1)$ <sup>2</sup> represent the edges  $e_1, \dots, e_j (j \geq 1)$  of  $G$  if every edge  $e_i (1 \leq i \leq j)$  contains at least one the points  $P_h (1 \leq h \leq k)$ . If the vertices  $P_1, \dots, P_k$  represent all edges of  $G$  we call  $R = \{P_1, \dots, P_k\}$  a *representing system* of  $G$  and say that  $R$  represents  $G$ . We denote by  $\mu(G)$  the minimal number of vertices representing every edge of  $G$  (i. e. we can find  $\mu(G)$  vertices in such a way that every edge of  $G$  contains at least one of these vertices, but there do not exist  $\mu(G)-1$  vertices with this property). If  $G$  has no edge, then by definition  $\mu(G) = 0$ . The chief object of this paper will be to give various estimations from above of  $\mu(G)$ .

In § 1 we shall obtain estimates for  $\mu(G)$  in terms of  $\pi(G)$ ,  $\nu(G)$  and other characteristic data of  $G$ . One of our results (Theorem (1.7)) which will be an easy consequence of a result of TURÁN states that

$$\mu(G) \leq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2}\pi(G)} + \frac{1}{\nu(G)}}, \quad \text{if } \nu(G) > 0.$$

In § 2, 3 and 4 we shall estimate  $\mu(G)$  in terms of  $\mu(G')$  where  $G'$  runs through certain subgraphs of  $G$ . Our principal results are:

If  $\mu(G') \leq p$  for all  $G' \subseteq G$  with  $\pi(G') \leq 2p + 2$ , then  $\mu(G) \leq p$ . (Theorem (3.5)).

<sup>1</sup> Every edge "contains" exactly two vertices, which are "connected" by it.

<sup>2</sup> Numbers which are denoted by letters are always assumed to be non negative integers.



Let  $h \geq 2$ ,  $p > p_0(h)$ . Assume that  $\pi(G) \geq 2p - h + 3$  and that  $G$  has no isolated vertices, further assume that for every  $G' \subseteq G$  with  $\pi(G') \leq p + h$  we have  $\mu(G') \leq p$ . Then  $\mu(G) \leq 2p - h$  (Theorem (2.2)).

In general the above results are best possible.

In § 5 we generalise our problems to „multidimensional graphs”. Instead of graphs we consider sets of  $k$ -tuples ( $k \geq 2$ ) and study the minimal number of elements which represent each of our given  $k$ -tuples.

## § 1.

(1.1) First of all we need some definitions and notations.

$G$  will always denote a graph, and if in the following it is not explicitly indicated to which graph some symbols and notations belong, we always assume that they refer to the graph denoted by  $G$ .

$\alpha(M)$  will always denote the number of elements of the finite set  $M$ .

We shall denote by  $PQ$  the edge connecting the vertices  $P$  and  $Q$ . The graph which consists of the vertices  $P$  and  $Q$  and the edge  $PQ$  will also be called an *edge*. The graph which consists of the vertices  $P_1, P_2, P_3$  and the edges  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1$  will be called a *triangle* and will be denoted by  $P_1P_2P_3$ .

If  $P$  is a vertex of  $G$ , then we call the number of edges of  $G$  which are incident to  $P$  the *valency of  $P$*  (in  $G$ ).

If any two vertices of  $G$  are connected by an edge  $G$  will be called *complete*. The graph consisting of one point will be called complete too.

If  $G$  is complete and  $\pi(G) = n$  we shall call  $G$  a *complete  $n$ -graph*.

Assume that  $G$  has at least two vertices. The *complementary graph*  $\bar{G}$  of  $G$  is defined as follows:  $\bar{G}$  has the same vertices as  $G$  and two vertices of  $\bar{G}$  are connected if and only if they are not connected in  $G$ .

For the definition of *path* and *circuit* see [7] (path = Weg, circuit = Kreis).

A graph  $G$  — having at least two vertices — is said to be *connected* if any two of its vertices are on a path of  $G$ . The graph having one vertex is called connected.

The *components* of (the non empty)  $G$  are its maximal connected subgraphs.

Denote by  $S$  the set of vertices of  $G$ . Let  $M \subseteq S$ . We denote by  $[M]$  the subgraph of  $G$  whose vertices are the elements of  $M$  and whose edges are all the edges of  $G$  which have both vertices in  $M$ .

If  $M \subseteq S$  and  $N \subseteq S$  then we call the edges one vertex of which is in  $M$  and the other in  $N$  the  *$MN$ -edges*.

$[M, N]$  denotes the subgraph of  $G$  whose vertices are the elements of  $M \cup N$  and whose edges are the  $MN$ -edges of  $G$ .

$G$  is *even* if there is an  $M$  and  $N$  for which  $M \cup N = S$ ,  $M \cap N = \emptyset$  and  $[M, N] = G$ .

Let  $P \in S$ .  $G - P$  denotes the graph which we obtain by omitting from  $G$  the vertex  $P$  and all the edges incident to  $P$ .

The vertices  $P_1, \dots, P_j (j > 1)$  of  $G$  are called *independent* (in  $G$ ) if no two of them are connected by an edge (in  $G$ ). One vertex is always called independent.  $\bar{\mu}(G)$  denotes the maximal number of the independent vertices of  $G$ . If  $G$  is empty, then by definition  $\bar{\mu}(G) = 0$ .

The edges  $e_1, \dots, e_j$  ( $j > 1$ ) are called *independent* if they have no common vertex. One edge is always called independent. The maximum number of the independent edges of  $G$  is denoted by  $\varepsilon(G)$ . If  $G$  has no edges we have by definition  $\varepsilon(G) = 0$ .

We shall call  $G$  *k-fold connected* ( $k \geq 1$ ) if in case  $k = 1$   $G$  is connected and for  $k > 1$  if  $\pi(G) \geq k + 1$  and  $G$  remains connected after the omission of any  $k-1$  of its vertices (and all the edges incident to them).

(1.2) It follows from our definitions that if  $G_1, \dots, G_j$  ( $j \geq 1$ ) are the components of  $G$  then if  $\varphi = \pi, v, \mu, \bar{\mu}$  or  $\varepsilon$

$$\varphi(G) = \sum_{i=1}^j \varphi(G_i).$$

(1.3) It is easy to see that (see [6], p. 134.)

$$(1) \quad \mu(G) + \bar{\mu}(G) = \pi(G).$$

If  $G$  is non empty then  $\bar{\mu}(G) \geq 1$ , equality here holds if and only if  $G$  is complete. From this remark and (1) we obtain

(1.4) *If  $G$  is non empty then  $\mu(G) \leq \pi(G) - 1$ . Equality holds if and only if  $G$  is complete.*

If we make special assumptions about  $G$  we can improve the above estimation. Thus the following trivial inequalities hold:

$$(1.5) \text{ If } G \text{ is even } \mu(G) \leq \frac{1}{2} \pi(G).$$

If we assume that  $G$  does not contain a triangle (or a complete  $k$ -graph ( $k > 3$ )) then the problem of giving a sharp upper bound for  $\mu(G)$  in terms of  $\pi(G)$  is difficult and will not be discussed in this paper. Because of (1.3) (1) this is really RAMSAY's problem ([8], [5]).

(1.6)  $\mu(G) \leq v(G)$  is trivial. Equality holds if and only if no two edges of  $G$  have a common vertex.

We can obtain non trivial upper estimates of  $\mu(G)$  using both  $\pi(G)$  and  $v(G)$ .

**Theorem** (1.7). *Assume that  $G$  has edges. Then*

$$\mu(G) \leq \frac{2 v(G) \pi(G)}{2 v(G) + \pi(G)}$$

or in other words:  $\mu(G)$  is less than or equal to the harmonic mean between  $\frac{1}{2} \pi(G)$  and  $v(G)$ . Equality holds if and only if  $G$  is a complete graph, or if each component of  $G$  is a complete graph each of which has the same number of vertices.

**Proof.** Our theorem is an easy consequence of a result of TURÁN. TURÁN proved ([9], p. 26.) that if  $\pi(G) = n$  and  $G$  does not contain a complete  $(j+1)$ -graph but contain a complete  $j$ -graph, then

$$(1) \quad \nu(G) \leq \frac{j-1}{2j} (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}$$

where  $n = jt + r$  ( $0 \leq r < j$ ). If  $r = 0$  equality occurs if and only if  $\bar{G}$  ( $\bar{G}$  is the complement of  $G$ ) has  $j$  components and each of them are complete  $t$ -graphs<sup>3</sup>.

Applying this theorem we obtain

$$(2) \quad \nu(\bar{G}) \geq \binom{n}{2} - \left\{ \frac{j-1}{2j} (n^2 - r^2) + \binom{r}{2} \right\} = \frac{(n-r)(n-j+r)}{2j},$$

where  $\pi(\bar{G}) = n$ ,  $\bar{\mu}(\bar{G}) = j$  and  $n = jt + r$  ( $0 \leq r < j$ ). Further if  $r = 0$  equality occurs if and only if all components of  $\bar{G}$  are complete  $t$ -graphs.

Let  $\mu(\bar{G}) = k$ . By (1.3)  $j = n - k$ , thus from (2)

$$(3) \quad \nu(\bar{G}) \geq \frac{(n-r)(k+r)}{2(n-k)}.$$

From  $0 \leq r < n - k$  we have  $k < n - r \leq n$ . Thus

$$(4) \quad (n-r)(k+r) \geq nk,$$

equality only if  $r = 0$ . From (3) and (4) we obtain, assuming that  $\nu(\bar{G}) = m > 0$

$$k \leq \frac{2}{\frac{2}{n} + \frac{1}{m}}.$$

Equality can hold only if we have equality both in (4) and in (2). This completes our proof since every graph  $G$  with  $\pi(G) \geq 2$  is the complementary graph of a certain graph.

From (1.7) we easily obtain

**Theorem (1.8)**

$$(1) \quad \mu(G) \leq \frac{\pi(G) + \nu(G)}{3}.$$

*Equality holds if and only if  $G$  is empty or if the components of  $G$  are edges and triangles.*

**Proof.** If  $G$  is empty the theorem is trivial, henceforth we shall assume  $\pi(G) > 0$ . It follows from (1.2) that it will suffice to prove our theorem for

<sup>3</sup> TURÁN gave also in the case  $r > 0$  the necessary and sufficient condition for equality in (1).



connected graphs and that equality can hold for  $G$  only if it holds for every component of  $G$ .

Henceforth we shall assume that  $G$  is connected. Put  $\pi(G) = n$ ,  $\nu(G) = m$ .

For  $n = 1$  (1) clearly holds with the sign  $<$ . Thus we can assume  $m \geq 1$ . From (1.7) we have

$$(2) \quad \mu(G) \leq \frac{2mn}{2m+n},$$

equality holds if and only if  $G$  is complete. For positive  $m$  and  $n$  the inequality  $2mn/(2m+n) \leq (m+n)/3$  is equivalent to

$$(3) \quad 0 \leq (m-n)(2m-n).$$

Therefore if  $m \geq n$ , (1) is implied by (2) and (3), further we can deduce that equality holds if and only if  $m = n$  and  $G$  is a complete  $n$ -graph. But this is possible only if  $n = 3$ .

If  $m < n$ , then since  $G$  is connected,  $m = n - 1$  and  $G$  is a tree (see [7], p. 51.). Since every tree is even, we have by (1.5)

$$\mu(G) \leq \frac{1}{2}n.$$

For  $n \geq 2$  we have  $(m+n)/3 = (2n-1)/3 \geq 1/(2n)$ , equality only for  $n = 2$ . This proves (1) for  $m < n$  and shows that equality holds if and only if  $G$  consists of a single edge. This completes the proof of our theorem.

(1.9) Next we estimate  $\mu(G)$  in terms of  $\varepsilon(G)$ .

Assume  $\nu(G) \geq 1$  and let  $P_1 P'_1, \dots, P_s P'_s$  ( $s = \varepsilon(G) \geq 1$ ) be a maximal system of independent edges of  $G$ . Clearly the vertices  $P_1, \dots, P_s, P'_1, \dots, P'_s$  represent the edges of  $G$ . On the other hand we clearly need at least  $s$  vertices for the representation of the edges of  $G$ . Thus we obtain the following trivial inequality

$$(1.10) \quad \varepsilon(G) \leq \mu(G) \leq 2\varepsilon(G).$$

(1.10) trivially holds for  $\nu(G) = 0$  too.

The following theorem which we will often use is due to KÖNIG ([7], p. 233.).

$$(1.11) \text{ (KÖNIG). For even graphs } \mu(G) = \varepsilon(G).$$

For the upper bound in (1.10) we have the following

**Theorem (1.12).**  $\mu(G) = 2\varepsilon(G)$  holds if and only if  $G$  is empty or each component  $G_i$  of  $G$  is complete and  $\pi(G_i)$  is odd.

**Proof.** The sufficiency of the above conditions is evident. To prove the necessity observe that because of (1.2) it will be sufficient to show that for a connected  $G$  satisfying  $\pi(G) \geq 2$ ,  $\mu(G) = 2\varepsilon(G)$  holds only if  $G$  is complete and  $\pi(G) = 2\varepsilon(G) + 1$ . This immediately follows from (1.4) and from the following

**Theorem (1.13).** Let  $G$  be  $k$ -fold connected ( $k \geq 1$ ). Assume  $\pi(G) > 2\varepsilon(G) + 1$ , then  $k \leq \varepsilon(G)$  and

$$\mu(G) \leq 2\varepsilon(G) - k.$$

The above bound for  $\mu(G)$  is best possible.

Our proof of theorem (1.13) uses the theory of alternating paths. The proof can be deduced easily from the properties of alternating paths stated in § 4 of [4]. We do not give the details of the proof.

We remark that one can give a simple proof of (1.12) without using (1.13).

The following example shows that the bound  $2\varepsilon(G) - k$  in theorem (1.13) is best possible: Let  $G_0$  be a complete  $k$ -graph and  $G_i$  a complete  $(2a_i + 1)$ -graph ( $k \geq 1$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $l > k + 1$ ). The graphs  $G_0$  and  $G_i$  have no common vertex. The vertices of  $G$  are the vertices of  $G_0$  and those of the  $G_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ), the edges of  $G$  are the edges of  $G_0$ , the edges of  $G_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ), and every edge which connects a vertex of  $G_0$  with a vertex of  $G_i$  ( $1 \leq i \leq l$ ). We have

$$\varepsilon(G) = k + \sum_{i=1}^l a_i, \quad \mu(G) = k + \sum_{i=1}^l 2a_i,$$

$$\pi(G) = k + \sum_{i=1}^l (2a_i + 1) = l - k + 2\varepsilon(G) > 2\varepsilon(G) + 1.$$

$G$  is  $k$ -fold connected,  $\mu(G) = 2\varepsilon(G) - k$ . Observe that in our example  $\pi(G)$  can be made arbitrarily large for given  $\varepsilon(G)$ .

**Remark.** If  $G$  satisfies  $\pi(G) > 3\varepsilon(G) - 2$  ( $\varepsilon(G) \geq 1$ ) and is connected then we can prove

$$(1) \quad \mu(G) \leq 2\varepsilon(G) - d$$

where  $d$  is the minimum of the valency of the vertices of  $G$ . If  $G$  is  $k$ -fold connected and  $\pi(G) > 1$ , then clearly  $d \geq k$ , thus (1) is a sharpening of (1.13). The proof of (1) is similar to that of (1.13) and will be suppressed.

Finally we obtain bounds for  $\mu(G)$  in terms of  $\varepsilon(G)$ ,  $\nu(G)$  and  $\pi(G)$ .

**Theorem (1.14)**

$$(1) \quad \mu(G) \leq \varepsilon(G) + \frac{\nu(G) - \varepsilon(G)}{2},$$

$$(2) \quad \mu(G) \leq \varepsilon(G) + \frac{\pi(G) - 2\varepsilon(G)}{2} + \frac{\nu(G) - \varepsilon(G)}{4}.$$

**Remarks.** These bounds are best possible. For (1) we see this by considering a graph whose components are edges and triangles, and it is not difficult to see that this is the only case of equality.

For (2) the situation is more complicated. The only connected graphs (with  $\nu(G) > 0$ ) known to us for which there is equality in (2) are: 1.) an edge,



2.) a triangle, 3.) a complete 4-graph, 4.) two triangles connected by an edge. It is possible that there are no other cases. Clearly if all the components of  $G$  are the above ones then  $G$  satisfies (2) with the sign of equality.

**Proof.** We use induction for  $\nu(G)$ . (1) and (2) are trivial if  $\nu(G) \leq 1$ . Let  $m > 1$  and assume that (1) and (2) holds for every  $G^*$  satisfying  $\nu(G^*) < m$ . In what follows assume that  $G$  is an arbitrary graph for which  $\nu(G) = m$ . We are going to show that (1) and (2) holds for  $G$  too.

We clearly can assume that  $G$  has no isolated points. If  $G$  is not connected, let its components be  $G_1, \dots, G_j$  ( $j \geq 2$ ). Clearly  $\nu(G_i) < m$  ( $i = 1, \dots, j$ ). Thus by our induction hypothesis and (1.2) it follows that  $G$  satisfies (1) and (2).

Henceforth we shall assume that  $G$  is connected.

Assume first that  $G$  has a vertex  $P$  of valency 1 and let  $PQ$  be the edge incident to  $P$ . There clearly exists another edge incident to  $Q$  say  $QQ'$  ( $Q' \neq P$ ). Omit the edge  $QQ'$  from  $G$ , and denote the graph thus obtained by  $G'$ . Let  $R$  be a representing system of  $G'$  with  $\alpha(R) = \mu(G')$ . Clearly  $R$  contains  $P$  or  $Q$ , hence we can assume  $Q \in R$ . But then  $R$  is a representing system of  $G$  too, thus  $\mu(G) = \mu(G')$ . A simple argument further shows that  $\varepsilon(G') = \varepsilon(G)$  (i. e. if a set of independent edges of  $G$  contains  $QQ'$ , we can replace  $QQ'$  by  $QP$  and obtain a set of independent edges of  $G'$ ). From this and from  $\pi(G') = \pi(G)$ ,  $\nu(G') = \nu(G) - 1$  and from the induction hypothesis we obtain (1) and (2).

Henceforth we are going to assume that the valency of every vertex of  $G$  is  $\geq 2$ .

If  $\pi(G) - 2\varepsilon(G) = 0$ , then (2) clearly implies (1). Next we show that (2) implies (1) also if  $\pi(G) - 2\varepsilon(G) = j > 0$ . Let  $P_i, P'_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ;  $s = \varepsilon(G)$ ) be a maximal system of independent edges of  $G$ . Further put  $N = \{P_1, \dots, P_s, P'_1, \dots, P'_s\}$ ,  $\bar{N} = S - N$  ( $S$  denotes the set of vertices of  $G$ ),  $[N] = G'$ . By our assumptions

$$(3) \quad 1 \leq \varepsilon(G) \leq \nu(G') < \nu(G).$$

The vertices of  $\bar{N}$  are independent (in  $G$ ) and all of them have valency  $\geq 2$ . Thus we have

$$\nu(G) \geq \nu(G') + 2j$$

and hence

$$(4) \quad \frac{j}{2} \leq \frac{\nu(G) - \nu(G')}{4} \leq \frac{\nu(G) - \varepsilon(G)}{4},$$

which shows that (2) implies (1).

Thus it will suffice to prove (2).

Assume for the time being that  $\pi(G) - 2\varepsilon(G) = j > 0$  and let us use our above notations. Clearly if  $R$  is a representing system of  $G'$  then  $R \cup \bar{N}$  represent all edges of  $G$ , thus  $\mu(G) \leq \mu(G') + j$ . Further clearly  $\varepsilon(G') = \varepsilon(G)$  and  $\pi(G) = \pi(G') + j$ . These equalities together with (3) and (4) imply (2) by the induction hypothesis.

Henceforth we can assume  $\pi(G) = 2\varepsilon(G)$ .

Assume first that  $G$  contains a path with the edges  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4$ , where  $P_2$  and  $P_3$  have valency 2 in  $G$ . Let  $G' = (G - P_2) - P_3$ . If  $G$  contains



the edge  $P_1P_4$  put  $G'' = G'$ , if not  $G''$  is obtained from  $G'$  by adding the edge  $P_1P_4$  to it. It is easy to see that

$$(5) \quad \pi(G'') = \pi(G) - 2, \quad \nu(G'') \leq \nu(G) - 2, \quad \varepsilon(G'') = \varepsilon(G) - 1, \quad \mu(G'') = \mu(G) - 1.$$

(5) and our induction hypothesis implies (2).

Henceforth assume that  $G$  does not contain a path of the above type.

Let  $P_iP'_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ;  $s = \varepsilon(G)$ ) be a maximal system of independent edges of  $G$ . By our assumptions the valency of both  $P_i$  and  $P'_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) are greater than one and by our last assumption they can not both be two. Thus without loss of generality we can assume that the valency of  $P_i$  is  $\geq 3$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Assume that for some  $i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) the sum of the valencies of  $P_i$  and  $P'_i$  is greater than 5. Put  $G^* = (G - P_i) - P'_i$ . Thus

$$(6) \quad \pi(G^*) = \pi(G) - 2, \quad \nu(G^*) \leq \nu(G) - 5, \quad \varepsilon(G^*) = \varepsilon(G) - 1, \quad \mu(G^*) \geq \mu(G) - 2.$$

(6) and our induction hypothesis proves (2).

Thus finally we can assume that the valencies of the vertices  $P_i$  are all 3 and the valencies of the vertices  $P'_i$  are all 2 ( $i = 1, \dots, s$ ). But then  $P'_i$  and  $P'_j$  ( $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $1 \leq j \leq s$ ) can not be connected by an edge, since otherwise  $G$  would contain the path with the edges  $P_iP'_i$ ,  $P'_iP'_j$ ,  $P'_jP_j$  where  $P'_i$  and  $P'_j$  having valency 2 in  $G$ , but this contradicts our assumptions.

Hence we see that the vertices  $P_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) represent all edges of  $G$ , which clearly proves (2).

Thus the proof of Theorem (1.14) is complete.

## § 2.

(2.1)  $\varepsilon(G) \leq p$  is equivalent to the statement that  $\mu(G') \leq p$  for every  $G' \subseteq G$  with  $\nu(G') \leq p + 1$ . Thus the trivial relation  $\mu(G) \leq 2\varepsilon(G)$  can be restated in the following form:

Assume that for every  $G' \subseteq G$  with  $\nu(G') \leq p + 1$  we have  $\mu(G') \leq p$ . Then  $\mu(G) \leq 2p$ .

It is now a natural question to ask: what can be said about  $\mu(G)$  if for every  $G' \subseteq G$  with  $\nu(G') \leq q$  ( $q > p + 1$ )  $\mu(G') \leq p$ ? Here we prove

**Theorem (2.2).** *Let  $h \geq 2$ . Then there exists a smallest integer  $p_0(h)$  with the following properties: If  $p > p_0(h)$  and  $G$  is a graph with  $\pi(G) \geq 2p - h + 3$  which has no isolated points, and for every  $G' \subseteq G$  with  $\nu(G') \leq p + h$  we have  $\mu(G') \leq p$ , then*

$$(1) \quad \mu(G) \leq 2p - h.$$

Before proving our theorem we make some remarks.

1.)  $2p - h$  is best possible. To show this let  $G_1$  be a complete  $(2p - h)$ -graph. The graph  $G_2$  is defined as follows: Its vertices are the vertices of  $G_1$ , another vertex  $P$ , and the vertices of a set  $M$  (which may be empty, but which does not contain  $P$  and the vertices of  $G_1$ ). The edges of  $G_2$  are the edges of  $G_1$  and every edge which connects  $P$  with a vertex of  $G_1$  or  $M$ . It is easy to see that  $\mu(G_2) = 2p - h$ . Now we show that for every  $G' \subseteq G_2$  (which does not contain an isolated vertex) satisfying  $\nu(G') \leq p + h$  we have  $\mu(G') \leq p$ . To see this observe that if  $G'$  does not contain  $P$  we have  $\pi(G') \leq$

$\leq 2p-h$  and therefore by theorem (1.8)  $\mu(G') \leq p$ . If  $G'$  contains  $P$  then the number of the not isolated vertices of  $G'-P$  is not greater than  $2p-h$ ,  $\nu(G'-P) \leq p+h-1$ . Thus from theorem (1.8)  $\mu(G'-P) \leq p-1$  or  $\mu(G') \leq p$  which completes the proof.

We remark that in our example  $2\varepsilon(G_2)$  equals one of the values  $2p-h$ ,  $2p-h+1$ ,  $2p-h+2$ . This is not an accident, since if  $2\varepsilon(G) \leq 2p-h$ , then because  $\mu(G) \leq 2\varepsilon(G)$  (1) trivially holds, equality only if  $2\varepsilon(G) = 2p-h$ . Further a simple modification of our proof of Theorem (2.2) shows that if  $2\varepsilon(G) > 2p-h+2$  we can improve  $\mu(G) \leq 2p-h$  to  $\mu(G) < 2p-l$  where  $l$  tends to infinity with  $p$  but is of much lower order than  $p$ , we can give only very rough estimates for  $l = l(p, h)$ .

2.) In (2.3) we shall show that if  $p$  is not "sufficiently large" compared to  $h$  then (1) does not always hold. More precisely we shall show that if  $c$  is an arbitrary constant and  $h > h_0(c)$  then  $p_0(h) > ch$ .

3.) If  $h = 2$  our proof could be simplified considerably, and we can show  $p_0(2) = 2$ .

**Proof.** of (2.2). (I) According to a well known theorem of RAMSAY (see [8] and [5]) to every  $k$  there exists a  $\varphi(k)$  so that every  $G$  with  $\pi(G) \geq \varphi(k)$  either contains a complete  $k$ -graph or  $G$  has  $k$  independent points (i. e.  $\bar{\mu}(G) \geq k$ ). Clearly  $\varphi(k) \geq k$ .

We are going to show that

$$(2) \quad p_0(h) < h + \varphi(\varphi(2h+4)).$$

Clearly

$$(3) \quad h + \varphi(\varphi(2h+4)) \geq 3h+4.$$

Our proof will be indirect. We are going to show that the following conditions lead to a contradiction:

- (4)  $G$  has no isolated point.
- (5)  $h \geq 2$ .
- (6)  $p > h + \varphi(\varphi(2h+4))$ .
- (7)  $\pi(G) \geq 2p-h+3$ .
- (8) If  $G' \subseteq G$  and  $\nu(G') \leq p+h$  then  $\mu(G') \leq p$ .
- (9)  $\mu(G) > 2p-h$ .

Let  $G$  satisfy the above conditions and put

$$\pi(G) = n, \quad \varepsilon(G) = s.$$

It is easy to deduce from our conditions and (3) that for every  $h \geq 2$

$$p \geq 11, \quad n \geq 21, \quad \mu(G) \geq 19, \quad s \geq 9.$$

From (8) it follows that  $s \leq p$ . Let

$$p = s + a.$$

Clearly  $a \geq 0$ . (9) implies because of  $\mu(G) \leq 2s$  that

$$(10) \quad 2a \leq h-1.$$

In the most important cases we will obtain the contradiction by showing that  $G$  contains a subgraph  $G'$  whose components are triangles and edges and for which  $\nu(G') \leq p+h$  and  $\mu(G') = p+1$  (these facts contradict (8)). Assume that such a  $G'$  has  $x+y$  components,  $x$  triangles and  $y$  edges.

Clearly

$$\nu(G') = 3x + y \leq p + h \quad \text{and} \quad \mu(G') = 2x + y = p + 1.$$

Thus

$$(11) \quad x \leq h-1.$$

Conversely if (11) is satisfied then because of (3) and  $2x + y = p + 1$  we obtain  $y > 0$ .  $G'$  further clearly satisfies

$$x + y \leq s.$$

Thus from  $y = p + 1 - 2x$

$$x \geq a + 1.$$

(From (5) and (10)  $a + 1 \leq h-1$ .)

In the following we will only use the  $G'$  for which  $x$  and  $y$  takes on the following values:

$$(12) \quad \text{In case} \quad 2a \leq h-3 \quad x = 2a + 2, \quad y = s - (3a + 3).$$

$$(13) \quad \text{In case} \quad 2a \leq h-2 \quad x = 2a + 1, \quad y = s - (3a + 1).$$

$$(14) \quad x = 2a, \quad y = s - (3a - 1).$$

$$(15) \quad x = a + 1, \quad y = s - (a + 1).$$

(II) Let  $e_i = P_i P'_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) be a maximal system of independent edges. These edges will be considered fixed during the rest of the proof. Let

$$M = \{P_1, \dots, P_s\}, \quad M' = \{P'_1, \dots, P'_s\}, \quad N = M \cup M', \quad G_\varepsilon = [N].$$

$$\bar{N} = S - N \quad (S \text{ is the set of vertices of } G.)$$

If  $\bar{N}$  is non empty (i. e.  $n > 2s$ ), then put

$$\bar{N} = \{Q_1, \dots, Q_{n-2s}\}.$$

From the fact that  $s = \varepsilon(G)$  it trivially follows that

(16) the vertices of  $\bar{N}$  are independent,

(17) the edges  $P_k Q_i$  and  $P'_k Q_j$  ( $P_k \in M$ ,  $P'_k \in M'$ ,  $i \neq j$ ,  $\{Q_i, Q_j\} \subseteq \bar{N}$ ) can not both occur in  $G$ ,

(18) if  $P_i Q_k$  and  $P_j Q_l$  are in  $G$  ( $i \neq j$ ,  $k \neq l$ ,  $\{P_i, P_j\} \subseteq M$ ,  $\{Q_k, Q_l\} \subseteq \bar{N}$ ), then  $P'_i P'_j$  is not in  $G$ .



From (4) and (16) we obtain

(19) every vertex of  $\bar{N}$  is incident to  $N\bar{N}$ -edges.

From (17) and (18) it follows that

(20) if both  $P_i$  and  $P'_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) are incident to an  $N\bar{N}$ -edge then  $P_i P'_i$  and these two  $N\bar{N}$ -edges form a triangle (this means that there can be only one  $N\bar{N}$ -edge incident to  $P_i$  and  $P'_i$ ).

(III) We prove that

$$(21) \quad \bar{\mu}(G_\varepsilon) \leq 2h - 3a - 2.$$

If  $\bar{N}$  is empty then  $G_\varepsilon = G$ ,  $n = 2s$  and because of (9)

$$(22) \quad \bar{\mu}(G_\varepsilon) = n - \mu(G) \leq 2s - (2p - h + 1) = h - 2a - 1.$$

In this case from (22), (5) and (10) follows (21).

For the rest of (III) we assume that  $\bar{N}$  is non empty. Put  $G_0 = [N, \bar{N}]$ .  $G_0$  is an even graph which, because of (19), is non empty. Thus by the theorem (1.11) of KÖNIG

$$(23) \quad \mu(G_0) = \varepsilon(G_0).$$

Let  $e'_1, \dots, e'_{s_0}$  ( $s_0 = \varepsilon(G_0)$ ) be a maximal system of independent edges of  $G_0$ . By (17) we can assume that

$$e'_i = P_i Q_i \quad (i = 1, \dots, s_0).$$

Put  $M'_1 = \{P'_1, \dots, P'_{s_0}\}$ . By (18) the vertices of  $M'_1$  are independent and because (20) if  $P'_i \in M'_1$  then the only vertex of  $\bar{N}$  with which  $P'_i$  can be connected by an edge is  $Q_i$ . Denote by  $M'_2$  the vertices of  $M'_1$  which are connected with the corresponding  $Q_i$  and put  $\alpha(M'_2) = t$ .

Assume  $t \geq a + 1$ , without loss of generality we have  $M'_2 = \{P'_1, \dots, P'_t\}$ . Let  $\Delta_i = P_i P'_i Q_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ). Then the triangles  $\Delta_i$  ( $i = 1, \dots, a + 1$ ) and the edges  $e_{a+2}, \dots, e_s$  form a subgraph  $G'$  of  $G$  whose existence because of (15) contradicts (8).

Assume next  $t \leq a$ . The vertices of  $M'_3 = M'_1 - M'_2$  are independent (assuming that  $M'_3$  is non empty) and the only edges incident to them belong to  $G_\varepsilon$ . Therefore the vertices of  $N_1 = M \cup (M' - M'_3)$  represent the edges of  $G$ . Thus

$$\mu(G) \leq \alpha(N_1) = 2s - (s_0 - t) \leq 2p - (a + s_0).$$

Thus from (9)

$$(24) \quad s_0 \leq h - a - 1.$$

Let  $R_0$  respectively  $R_\varepsilon$  be a representing system of  $G_0$  respectively  $G_\varepsilon$  having minimal number of elements.  $R_0 \cup R_\varepsilon$  clearly represents  $G$  and thus by (23)  $s_0 + \mu(G_\varepsilon) \geq \mu(G)$ . Thus from (9) and (24) we obtain  $\mu(G_\varepsilon) \geq 2p - 2h + a + 2$ . Thus by (1.3) (1) we obtain (21).

From now on the triangles  $\Delta_i$  and the sets  $M'_1, M'_2$  will not occur any more. Thus we will use these symbols and the symbols used for their vertices, for other purposes.

(IV) Now we shall show that both  $[M]$  and  $[M']$  contain suitably related complete graphs having sufficiently many vertices. From (6) and (10) we have

$$\pi([M]) = s > \varphi(\varphi(2h + 4)).$$

By  $\bar{\mu}([M]) \leq \bar{\mu}(G_e)$  we have from (21)

$$\bar{\mu}([M]) < 2h + 4 \leq \varphi(2h + 4).$$

Thus by RAMSAY's theorem there is an  $M_1 \subseteq M$  so that  $[M_1]$  is complete and

$$\pi([M_1]) = \varphi(2h + 4).$$

Let

$$M_1 = \{P_1, \dots, P_u\}, \quad M'_1 = \{P'_1, \dots, P'_u\} \quad (u = \varphi(2h + 4)).$$

By (21)  $\bar{\mu}([M'_1]) < 2h + 4$ . Thus by  $\pi([M'_1]) = \varphi(2h + 4)$  we obtain from RAMSAY's theorem that there exists an  $M'_2 \subseteq M'_1$  so that  $[M'_2]$  is complete and  $\pi([M'_2]) = 2h + 4$ . Put

$$M'_2 = \{P'_1, \dots, P'_{2h+4}\}.$$

(10) implies  $3(a + 2) < 2h + 4$ . Thus since  $[M_1]$  and  $[M'_2]$  are complete, the triangles

$$\Delta_i = P_{3i-2}P_{3i-1}P_{3i}, \quad \Delta'_i = P'_{3i-2}P'_{3i-1}P'_{3i} \quad (i = 1, \dots, a + 2)$$

are all subgraphs of  $G$ .

By (10)  $2a \leq h - 1$ . Now we distinguish three cases,  $2a \leq h - 3$ ,  $2a = h - 2$  and  $2a = h - 1$ .

(V) Assume  $2a \leq h - 3$ . Then the pairs of triangles  $(\Delta_i, \Delta'_i)$  ( $i = 1, \dots, a + 1$ ) and the edges  $e_{3a+4}, \dots, e_s$  form a subgraph of  $G$  which by (12) contradicts (8).

(VI) Assume next  $2a = h - 2$ . By (7)  $n \geq 2s + 1$ , thus  $\bar{N}$  is non empty. By (19) there are  $N\bar{N}$ -edges. Now the following statement holds:

(25) Any two vertices of  $N$  which are not incident to  $N\bar{N}$ -edges are connected by an edge.

For if two such vertices would not be connected, the other vertices of  $N$  would represent the edges of  $G$ . Thus  $n \leq 2s - 2 = 2p - h$ , which contradicts (9). Thus (25) is proved.

Assume first that there is a  $j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) so that both  $P_j$  and  $P'_j$  are incident to  $N\bar{N}$ -edges. By (20) the vertices of these  $N\bar{N}$ -edges which are in  $N$  must coincide. Denote this common vertex by  $Q_1$ . Consider the triangles  $(\Delta_i, \Delta'_i)$  ( $i = 1, \dots, a + 2$ ) defined in (IV). We can find  $a$  of these pairs in such a way that none of them should have a common vertex with  $e_j$ . These pairs of triangles together with the triangle  $P_jP'_jQ_1$  and together with all the edges  $e_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ,  $i \neq j$ ) which have no common vertex with our  $a$  triangle-pairs form a subgraph of  $G$  whose existence by (13) contradicts (8).

For the rest of part (VI) we can assume that no vertex of  $M'$  is connected (by an edge) to a vertex of  $\bar{N}$ . Thus we obtain by (25) that  $[M']$  is a complete graph. Now we prove the following statement:



(26) Assume that  $G$  contains an edge  $P_j Q_l$  ( $1 \leq j \leq s$ ,  $Q_l \in \bar{N}$ ), assume further  $k \neq j$  ( $1 \leq k \leq s$ ), then the edge  $P'_j P'_k$  is not in  $G$ .

If (26) would be false, then since  $[M']$  is complete the triangle  $P'_j P'_k P'_l$  is a subgraph of  $G$ . From the triangle-pairs  $(\Delta_i, \Delta'_i)$  ( $i = 1, \dots, a+2$ ) we can again find  $a$  of them so that none of them have a common vertex with  $e_j$  or  $e_k$ . These triangles together with the triangle  $P'_j P'_k P'_l$ , the edge  $P_j Q_l$ , and all the edges  $e_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ) which have no common vertex with our  $a$  triangle-pairs form a subgraph of  $G$  whose existence by (13) contradicts (8).

We now show that every vertex of  $M$  is incident to  $N\bar{N}$ -edges. To see this observe that if  $P_k$  ( $1 \leq k \leq s$ ) would be a vertex which is not incident to an  $N\bar{N}$ -edge, then by (25) this would be connected to every vertex of  $M'$ . Among these vertices there clearly is a vertex  $P'_j$  so that the corresponding  $P_j$  is incident to an  $N\bar{N}$ -edge, which contradicts (26).

From (18) and from the fact that  $[M']$  is complete it follows that the  $N\bar{N}$ -edges incident to the vertices of  $M$  are all incident to the same vertex  $Q_1$ . Therefore by (19)  $\bar{N} = \{Q_1\}$ . From (26) we further deduce that the only vertex of  $M'$  to which  $P_j$  can be connected is  $P'_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ).

Next we show that no two vertices of  $M$  are connected. To see this assume that  $G$  contains the edge  $P_j P_k$  ( $j \neq k$ ,  $\{P_j, P_k\} \subseteq M$ ). Choose  $a$  of the triangle-pairs  $(\Delta_i, \Delta'_i)$  ( $i = 1, \dots, a+2$ ) so that none of them contain a common vertex with the edges  $e_j$  and  $e_k$ . These triangle-pairs together with the triangle  $Q_1 P_j P_k$  and together with all the edges  $e_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ) which have no common vertex with one of our  $a$  triangle-pairs form a subgraph of  $G$  which by (13) contradicts (8).

From what has been said it follows that the set  $R = M' \cup \bar{N}$  represents  $G$ , further  $\alpha(R) = s+1 \leq 2p-h$  and this contradicts (9).

(VII) Finally assume  $2a = h-1$ . Then by (7)  $n \geq 2s+2$ , or  $\bar{N}$  contains at least two vertices. Every vertex of  $N$  is incident to  $N\bar{N}$ -edges. For if  $N$  would have a vertex which is not incident to an  $N\bar{N}$ -edge then the other vertices of  $N$  would represent  $G$ , their number is  $2s-1 = 2p-h$  which contradicts (9).

By (19) and (20) there is a  $j$  and  $k$  ( $1 \leq j \leq s$ ,  $1 \leq k \leq s$ ,  $j \neq k$ ) for which the triangles  $\Delta' = Q_1 P_j P'_j$  and  $\Delta'' = Q_2 P_k P'_k$  are subgraphs of  $G$ . We now select from the triangle-pairs  $(\Delta_i, \Delta'_i)$  ( $i = 1, \dots, a+2$ )  $a-1$  pairs so that none of them contain a common vertex with  $e_j$  or  $e_k$ . These pairs together with  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  and with all the edges  $e_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ) which have no vertex in common with the selected pairs form a subgraph of  $G$ . By (14) this contradicts (8).

This completes the proof of Theorem (2.2).

Now we show that if  $c$  ( $c > 1$ ) is any constant and  $h > h_0(c)$  then  $p_0(h) > ch$ . More precisely we shall show

**Theorem (2.3).** *Let  $c$  ( $c > 1$ ) be any constant, then there exists an  $h_0(c)$  so that for every  $h > h_0(c)$  there exists an integer  $p > ch$  and a graph  $G$  satisfying the following conditions:*

- 1.)  $G$  contains no isolated vertex.
- 2.)  $\pi(G) \geq 2p-h+3$ .



- 3.) For every  $G' \subseteq G$  which satisfies  $v(G') \leq p + h$  we have  $\mu(G') \leq p$ .  
 4.)  $\mu(G) > 2p - h$ .

**Proof.** (I) A theorem of ERDŐS ([3], p. 34. (4)) implies that to every  $c(c > 1)$  there is an  $n_0(c)$  so that for every  $n > n_0(c)$  there exists a graph  $G$ , having no isolated vertices, for which

$$(1) \quad \pi(G) = n, \quad \bar{\mu}(G) < \frac{3}{56} \cdot \frac{n}{c}$$

and for which

$$(2) \quad \text{every circuit contains more than } 28c \text{ vertices.}$$

We are going to show that

$$(3) \quad h_0(c) = \max \left( 28, \frac{n_0(c)}{c} \right)$$

satisfies the requirements of our theorem.

Let  $h > h_0(c)$ , and choose  $p$  so that

$$(4) \quad ch < p < \frac{7}{6} ch.$$

Let further  $n$  satisfy

$$(5) \quad 2p - \frac{3}{4c}p < n < 2p - \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4c}p.$$

Let  $G$  be a graph having no isolated vertices and satisfying (1) and (2) with the above choices of  $c$  and  $n$ . We shall show that  $G$  satisfies the conditions 1.), 2.), 3.) and 4.) of Theorem (2.3).

Conditions 1.), 2.) and 4.) are clearly satisfied. Thus to complete our proof we only have to show that 3.) is satisfied.

(II) Let  $G' \subseteq G$ ,  $v(G') \leq p + h$ . We shall prove that

$$(6) \quad \mu(G') \leq p.$$

To prove (6) we define by recursion for every  $k \geq 0$  a subgraph  $G_k$  of  $G'$  as follows:  $G_0 = G'$ . If  $G_k$  has no vertex of valency  $> 2$  we put  $G_{k+1} = G_k$ . If  $G_k$  has a vertex of valency  $> 2$ , let  $P_k$  such a vertex and put  $G_{k+1} = G_k - P_k$ . Since  $G$  was finite there is a smallest  $k$  say  $l$  so that  $G_{l+1} = G_l$ .  $G_l$  has no vertex of valency greater than 2, and we obtained  $G_l$  from  $G'$  by the omission of  $l$  vertices of valency  $\geq 3$ . Thus from (4), (5) and  $v(G') \leq p + h$  we obtain

$$(7) \quad \pi(G_l) = n - l < 2p - \frac{9}{14c}p - l,$$

$$(8) \quad v(G_l) = v(G') - 3l < p + \frac{p}{c} - 3l.$$

Since all vertices of  $G_l$  have valency  $\leq 2$ , the components of  $G_l$  can only be circuits, paths and isolated vertices. Assume that there are  $j$  circuits

among the components of  $G_l$ . By (2) every circuit of  $G_l$  contains more than  $28c$  vertices, thus by (7)

$$j \cdot 28c < \pi(G_l) < 2p$$

or

$$(9) \quad j < \frac{p}{14c}.$$

The edges of a circuit or path of  $k$  vertices can always be represented by  $[k/2]$  or  $[k/2] + 1$  vertices respectively. Thus from (7) and (9)

$$\mu(G_l) \leq \frac{1}{2} \pi(G_l) + j < p - \frac{p}{4c} - \frac{l}{2}.$$

The edges of  $G'$  which do not occur in  $G_l$  we represent by the  $l$  vertices which do not occur in  $G_l$ . Thus we obtain

$$\mu(G') \leq \mu(G_l) + l < p - \frac{p}{4c} + \frac{l}{2}.$$

Thus if  $p/(4c) \geq l/2$  we obtain  $\mu(G') < p$ . If  $p/(4c) < l/2$ , then by  $\mu(G_l) \leq v(G_l)$  and by (8) we have

$$\mu(G') \leq \mu(G_l) + l < p,$$

which proves 3.) and thus the proof of Theorem (2.3) is complete.

### § 3.

(3.1) In connection with the general problem raised in (2.1) the following questions can be asked:

Does there exist to every  $p$  a smallest  $f(p)$  so that if  $G$  has the property that for every  $G' \subseteq G$  with  $v(G') \leq f(p)$  we have  $\mu(G') \leq p$ , then  $\mu(G) \leq p$ ?

This question can be answered affirmatively. From the Theorem (3.5) we easily deduce

**Theorem (3.2).** Assume that for every  $G' \subseteq G$  with  $v(G') \leq \binom{2p+2}{2}$

we have  $\mu(G') \leq p$ . Then  $\mu(G) \leq p$ .

The estimate  $f(p) \leq \binom{2p+2}{2}$  seems to be a poor one.

**Conjecture (3.3).**

$$f(p) = \binom{p+2}{2}.$$

We can prove our conjecture for  $p \leq 4$  (see the remark 1. made to Theorem (3.10)). The example of the complete  $(p+2)$ -graphs shows that  $f(p) \geq \binom{p+2}{2}$ , since if  $G$  is a complete  $(p+2)$ -graph for every proper subgraph  $G'$  of it we have  $\mu(G') \leq p$  and  $v(G') \leq \binom{p+2}{2} - 1$ , but  $\mu(G) = p + 1$ .

(3.4) Now we ask the following question:

Assume that for every  $G' \subseteq G$  satisfying  $\pi(G') \leq q$  we have  $\mu(G') \leq p$  what upper bound can be given for  $\mu(G)$ ?

If  $q = 2p + 1$ ,  $\mu(G)$  can be arbitrarily large. To see this consider the following even graph  $G^*$ : The vertices of  $G^*$  are  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  and its edges are  $P_i Q_j (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ . Clearly  $\mu(G^*) = \min(m, n)$ , but a simple argument shows that for every  $G' \subseteq G^*$  with  $\pi(G') \leq 2p + 1$  we have  $\mu(G') \leq p$ . Here we have for  $m = n$   $\pi(G^*) = 2n$ ,  $\mu(G^*) = n$ . The more complicated examples given in [2] and [3] show that a graph  $G$  with  $\pi(G) = n$ ,  $\mu(G) > n - o(n)$  exists so that for every  $G' \subseteq G$  with  $\pi(G') \leq 2p + 1$  we have  $\mu(G') \leq p$ .

On the other hand we are going to prove that for  $q = 2p + 2$  we have  $\mu(G) \leq p$  (which is clearly best possible).

**Theorem (3.5).** *Assume that for every  $G' \subseteq G$  with  $\pi(G') \leq 2p + 2$  we have  $\mu(G') \leq p$ . Then  $\mu(G) \leq p$ .*

We will prove Theorem (3.5) in § 4. It is curious to observe the sharp change between  $q = 2p + 1$  and  $q = 2p + 2$ . This change can be seen also in the order of magnitude of the number of edges.

If  $q = 2p + 2$  (3.5) immediately gives

$$(1) \quad v(G) \leq p(\pi(G) - 1).$$

(1) is best possible. To see this let the vertices of  $G$  be  $P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_{n-p}$  (the set of the  $Q$ 's may be empty). The edges of  $G$  connect each of the vertices  $P_1, \dots, P_p$  with all the other vertices of  $G$ . Clearly  $\mu(G) = p$  and  $v(G) = p(n-1)$ .

If  $q = 2p + 1$  then  $G^*$  shows that  $v(G)$  can be as large as  $\left\lceil \left( \frac{\pi(G)}{2} \right)^2 \right\rceil$  (for  $m = \left\lceil \frac{\pi(G)}{2} \right\rceil$ ,  $n = \left\lceil \frac{\pi(G) + 1}{2} \right\rceil$ ). For sufficiently large values of  $\pi(G)$  this is best possible. Here we have

**Theorem (3.6).** *Let  $\pi(G) \geq 4(p + 1)$ . Assume that for every  $G' \subseteq G$  with  $\pi(G') \leq 2p + 1$ ,  $\mu(G') \leq p$ . Then*

$$v(G) \leq \left\lceil \left( \frac{\pi(G)}{2} \right)^2 \right\rceil.$$

Disregarding the condition  $\pi(G) \geq 4(p + 1)$ , for  $p = 1$  this theorem is identical with TURÁN's theorem ([9], p. 26.) for  $j = 2$ . The proof of Theorem (3.6) uses this special case of TURÁN's theorem. We suppress the details.

Perhaps we can digress for a moment and call attention to the following interesting class of problems. Let  $\pi(G) = n$  and assume that for every  $G' \subseteq G$  with  $\pi(G') \leq q$  we have  $\mu(G') \leq p$ . Denote by  $g(n, p, q)$  the maximum value of  $v(G)$ . We wish to determine or estimate  $g(n, p, q)$ . The cases  $q \leq p + 1$  are trivial since there trivially  $g(n, p, q) = \binom{n}{2}$ .  $q \geq 2p + 2$  implies by (3.5)

$g(n, p, q) = p(n-1)$ . The interesting range is  $p + 2 \leq q \leq 2p + 1$ . The case  $q = 2p + 1$  is settled by Theorem (3.6).  $q = p + 2$  means that  $G$  does not contain a complete  $(p + 2)$ -graph and is thus settled by TURÁN's theorem.



The determination of  $g(n, p, q)$  for general  $p$  and  $q$  seems to be a difficult problem and we made very little progress with it. ERDŐS can show that for sufficiently large  $n$

$$(1) \quad g(n, p, 2p) = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor - 1.$$

The methods required for the proof of (1) and Theorem (3.6) are quite different than those used in this paper.

It is easy to see that conjecture (3.3) and theorem (3.5) can be restated in the following form:

(3.7) Conjecture. If  $\mu(G) > p$  then there is a  $G' \subseteq G$  for which  $\mu(G') > p$  and  $r(G') \leq \binom{p+2}{2}$ .

(3.8) If  $\mu(G) > p$  then there is a  $G' \subseteq G$  for which  $\mu(G') > p$  and  $\pi(G') \leq 2p + 2$ .

A graph  $G$  is said to be *edge-critical* if it has edges and for every  $G' \subset G$ ,  $\mu(G') < \mu(G)$ .

$G$  is *point-critical* if it has edges and for every  $G' \subset G$  for which  $\pi(G') < \pi(G)$  we have  $\mu(G') < \mu(G)$ .

Clearly every  $G$  which has edges has subgraphs  $G'$  which are edge-, respectively point-critical and for which  $\mu(G') = \mu(G)$ .

(3.7) and (3.8) are substantially equivalent to the following statements:

**Conjecture (3.9).** For every edge-critical graph  $G$  we have  $r(G) \leq \binom{\mu(G)+1}{2}$ .

**Theorem (3.10)** For every point-critical  $G$  we have  $\pi(G) \leq 2\mu(G)$ .

The proof of the equivalence is left to the reader. The proof of (3.10) will be given in § 4.

**Remarks.** 1.) Conjecture (3.9) holds for  $\mu(G) \leq 4$ .

2.) In § 4 we shall show that in (3.10) equality can hold only if  $2\pi(G) = \pi(G)$ .

3.) From (3.10) and from the fact that an edge-critical graph is also point-critical we obtain that for an edge-critical graph  $G$  we have  $r(G) \leq \binom{2\mu(G)}{2}$ .

## § 4.

In this § we are going to prove Theorem (3.10) (and thus also Theorem (3.5)).

Our definitions trivially imply

(4.1) A point-critical graph can have no isolated vertices. If  $G$  is non-empty and not point-critical, then it has a vertex  $P$  with  $\mu(G-P) = \mu(G)$ .

(4.2) Let  $S$  be the set of vertices of  $G$ , further let

- (1)  $S_i \subseteq S$  ( $i = 1, \dots, k$ ;  $k \geq 2$ );  $S_i \cap S_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ ) and  $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$ .

Let  $R$  be a set of  $\mu(G)$  vertices which represent every edge of  $G$ . Clearly  $R \cap S_i$  represents all edges of  $G_i = [S_i]$ , thus

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k \mu(G_i) \leq \mu(G).$$

If there exists a decomposition of  $S$  into *non empty* subsets  $S_i$  satisfying (1) for which

$$\sum_{i=1}^k \mu(G_i) = \mu(G)$$

holds, then we say that  $G$  is *decomposable* and we call the set  $\{G_1, \dots, G_k\}$  a *decomposition* of  $G$ . The following two statements trivially follow from our definitions:

(4.3) If  $G$  is decomposable we have  $\pi(G) > 1$  and  $G$  has a decomposition  $\{G_1, \dots, G_k\}$  where all the  $G_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) are indecomposable.

(4.4) If (the non-empty)  $G$  is not connected, it is decomposable.

(4.5) If  $\pi(G) > 1$  and  $G$  is indecomposable, then  $G$  is point-critical.

**Proof.** If (4.5) would be false, there would exist by (4.1) a  $P \in S$  so that for  $G_1 = G - P$  we would have  $\mu(G_1) = \mu(G)$ . Clearly neither  $G_1$  nor  $G_2 = [P]$  are empty and  $\mu(G_2) = 0$ . Thus  $\mu(G_1) + \mu(G_2) = \mu(G)$ , but then  $\{G_1, G_2\}$  would be a decomposition of  $G$ .

(4.6) Let  $G$  be point-critical and  $\{G_1, \dots, G_k\}$  a decomposition of  $G$ . Then the  $G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) are also point-critical.

**Proof.** Assume say that  $G_1$  is not point-critical. Since  $G_1$  is non empty it has by (4.1) a vertex  $P$  so that  $\mu(G_1 - P) = \mu(G_1)$ . But then by (4.2) (2)

$$\mu(G - P) \geq \mu(G_1 - P) + \sum_{i=2}^k \mu(G_i) = \sum_{i=1}^k \mu(G_i) = \mu(G),$$

which is a contradiction since  $G$  was assumed to be point-critical.

**Theorem (4.7).** If  $\pi(G) > 1$  and  $G$  is indecomposable, then

$$\pi(G) \leq 2\mu(G)$$

where equality stands only if  $G$  consists of a single edge.

**Proof.** (I) Because of (4.4)  $G$  is connected and therefore it has no isolated vertex. If  $G$  consists of a single edge  $\pi(G) = 2\mu(G)$  trivially holds. Henceforth we assume  $\pi(G) > 2$ . Let  $R$  be a set of  $\mu(G) = r$  vertices which represent every edge of  $G$ . Put  $S - R = T$ . Clearly neither  $R$  nor  $T$  are empty

and the vertices of  $T$  are independent. Thus every vertex of  $T$  is incident to  $TR$ -edges.

Consider the graph  $G' = [R, T]$ . Clearly  $G'$  is even and contains edges. Put  $\mu(G') = r'$ . Clearly  $0 < r' \leq r$ .

We are going to show in (II) that the only representing system of  $G'$  with  $r'$  elements is  $T$ . This easily implies  $\pi(G) < 2\mu(G)$ , since  $R$  is a representing system of  $G'$  and therefore  $r > r'$ , or  $\pi(G) = r + r' < 2r$  as stated.

(II) Let  $R'$  be any representing system of  $G'$  which has  $r'$  elements.  $R'$  is non empty. Put

$$R' \cap R = R_1, \quad R' \cap T = T_1.$$

Assume that  $R_1$  is empty. Then from  $R' \subset T$  and from the fact that every vertex of  $T$  is incident to  $TR$ -edges it follows that  $R' = T$ .

Thus to complete our proof we only have to show that the assumption  $\alpha(R_1) = r_1 > 0$  leads to a contradiction.

By theorem (1.11) of KÖNIG  $G'$  contains  $r'$  independent edges, say  $e_i = P_i P'_i$  ( $P_i \in R$ ,  $P'_i \in T$ ,  $i = 1, \dots, r'$ ). Each of these edges is incident to exactly one vertex of  $R'$ . Denote by  $e_1, \dots, e_{r_1}$  the edges incident to the vertices of  $R_1$  and put  $\{P'_1, \dots, P'_{r_1}\} = T_2$ . We evidently have  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ . Let  $R - R_1 = \bar{R}_1$ ,  $T - T_2 = \bar{T}_2$ .  $G'$  clearly does not contain an  $\bar{R}_1 T_2$ -edge. Put

$$G_1 = [R_1 \cup T_2], \quad G_2 = [\bar{R}_1 \cup \bar{T}_2].$$

a) Assume first that  $G_2$  is empty. Then

$$r_1 = r' = r = \alpha(R) = \alpha(T).$$

Since  $\pi(G) > 2$  we have  $r > 1$ . Then if  $G_3 = [\{P_1, P'_1\}]$  and  $G_4 = [S - \{P_1, P'_1\}]$  we have  $\mu(G_3) = 1$  and  $\mu(G_4) \geq r - 1$  (since  $G_4$  contains  $e_2, \dots, e_r$ ). Thus  $\{G_3, G_4\}$  is a decomposition of  $G$  and this is a contradiction.

b) Assume now  $G_2$  non empty. The vertices of  $R_1$  represent all edges of  $G_1$  and since  $G_1$  contains the edges  $e_1, \dots, e_{r_1}$  we obtain

$$(1) \quad \mu(G_1) = r_1.$$

$\mu(G_2) \geq r - r_1$  is impossible since  $\{G_1, G_2\}$  would then be a decomposition of  $G$ . But  $\mu(G_2) < r - r_1$  is also impossible, for in this case if  $R_2$  would be a representing system of  $G_2$  having  $\mu(G_2)$  elements, then  $R_1 \cup R_2$  would represent all edges of  $G$  and thus

$$\mu(G) \leq \mu(G_1) + \mu(G_2) < r,$$

which is impossible. This completes the proof of (4.7).

Finally we prove (3.10) and our remark 2.) belonging to it.

(4.8) If  $G$  is point-critical then  $\pi(G) \leq 2\mu(G)$ , equality can hold only if  $2\varepsilon(G) = \pi(G)$ .

**Proof.** If  $G$  consists of an edge, (4.8) is trivial. We can therefore assume that  $\pi(G) > 2$ . If  $G$  is indecomposable, then by (4.7)  $\pi(G) < 2\mu(G)$ . Assume now that  $G$  is decomposable and let  $\{G_1, \dots, G_k\}$  be a decomposition of  $G$



where all the  $G_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) are indecomposable. By (4.6)  $G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) is point-critical and thus

$$\pi(G) = \sum_{i=1}^k \pi(G_i) \leq 2 \sum_{i=1}^k \mu(G_i) = 2\mu(G).$$

Equality occurs if and only if every  $G_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) consists of a single edge. In this case the edges of  $G_1, \dots, G_k$  are independent, which implies  $2\varepsilon(G) = \pi(G)$ .

## § 5.

(5.1) In this § we generalise our problems to "graphs of several dimensions" i. e. to  $k$ -tuples. Let  $S$  be a set (its elements we will call points) and  $H$  a certain finite set of  $k$ -tuples formed from the elements of  $S$ . (For  $k = 2$   $H$  was  $G$  and the points of  $S$  which occur in the 2-tuples of  $H$ , i. e. in the edges of  $G$  were called the vertices of  $G$ . This  $G$  has no isolated vertices.) Denote by  $\pi(H)$  the number of elements of  $S$  which occur in the  $k$ -tuples of  $H$  and by  $\nu(H)$  the number of  $k$ -tuples of  $H$ . If  $R \subseteq S$  and if every  $k$ -tuple of  $H$  contains at least one point of  $R$  we say that the points of  $R$  represent  $H$  or that  $R$  is a *representing system* of  $H$ . Denote by  $\mu(H)$  the minimal number of points which represent  $H$ .

Generalising the problems considered in (3.1) and (3.5) (i. e. in (3.7) and (3.8)) we wish to determine the smallest values  $f(k, p)$  and  $g(k, p)$  which satisfy the following conditions:

Every  $H$  for which  $\mu(H) > p$  contains a subset  $H'$  and a subset  $H''$  for which  $\mu(H') > p$ ,  $\mu(H'') > p$  and  $\nu(H') \leq f(k, p)$ ,  $\pi(H'') \leq g(k, p)$ .

We now obtain upper estimates for  $f(k, p)$  and  $g(k, p)$  further we determine  $f(k, 1)$  respectively  $g(k, 1)$  for every  $k \geq 2$ .

**Theorem** (5.2)

$$f(k, p) \leq \sum_{i=0}^p k^i.$$

**Proof.** For  $p = 0$  our statement is trivial. Assume henceforth  $p \geq 1$ . Let  $H$  be an arbitrary finite set of  $k$ -tuples with  $\mu(H) > p$  and let  $t_0 = \{P_1, \dots, P_k\}$  be an arbitrary element of  $H$ . Put  $H_0 = \{t_0\}$ . Since  $\mu(H) > p \geq 1$  a single element can not represent  $H$  and therefore to every  $P_{i_1}$  ( $1 \leq i_1 \leq k$ ) there is a  $t_{i_1}$  in  $H$  which does not contain  $P_{i_1}$ . Let  $t_{i_1} = \{P_{i_1,1}, \dots, P_{i_1,k}\}$  ( $i_1 = 1, \dots, k$ ) and put  $H_1 = \{t_1, \dots, t_k\}$ . If  $p \geq 2$  we need at least three points for the representation of  $H$  and therefore we can find to every pair of points  $P_{i_1}, P_{i_2}$  ( $1 \leq i_1 \leq k, 1 \leq i_2 \leq k$ ) a  $k$ -tuple  $t_{i_1, i_2} = \{P_{i_1, i_2, j} \mid j = 1, \dots, k\}$  which does not contain  $P_{i_1}$  and  $P_{i_2}$ . Put  $H_2 = \{t_{i_1, i_2} \mid i_1, i_2 = 1, \dots, k\}$ . Continuing this process for every  $j$  ( $1 \leq j \leq p$ ) we obtain the  $k$ -tuples  $t_{i_1, \dots, i_j}$  (of  $H$ ) and the points  $P_{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}}$  and the sets of  $k$ -tuples  $H_j$  ( $i_1, \dots, i_j, i_{j+1} = 1, \dots, k$ ). Put

$$H' = \bigcup_{j=0}^p H_j.$$

Since  $\nu(H_j) \leq k^j$  we have  $\nu(H') \leq \sum_{j=0}^p k^j$ . Now we show  $\mu(H') > p$ . To see this let  $R$  be a representing system of  $H'$ .  $R$  must contain an element of  $t_0$  say  $P_1$ . By our construction  $P_1 \notin t_1$ , thus  $R$  must contain an element of  $t_1$  say  $P_{12}$ . If  $p > 2$  then  $P_1$  and  $P_{12}$  are not contained in  $t_{12}$  and  $R$  must contain an element  $P_{123}$  of  $t_{12}$ . This process can be continued  $(p+1)$  times and we obtain that  $R$  contains the elements  $P_1, P_{12}, \dots, P_{12 \dots p+1}$  or  $\alpha(R) > p$  as stated.

**Theorem (5.3)**  $f(k, 1) = k + 1$  ( $k \geq 2$ ).

**Proof.** By (5.2)  $f(k, 1) \leq k + 1$ . The following example shows  $f(k, 1) = k + 1$ . Let  $S = \{P_0, \dots, P_k\}$ .  $H$  consists of the  $(k+1)$   $k$ -tuples formed from  $S$ . Here  $\mu(H) > 1$  but for every  $H' \subset H$   $\mu(H') = 1$ .

(5.4) In general we know little about the value of  $f(k, p)$ . Conjecture (3.7) states that  $f(2, p) = \binom{p+2}{2}$ . This and (5.3) might permit us to conjecture  $f(k, p) = \binom{p+k}{k}$ . In any case  $f(k, p) \geq \binom{p+k}{k}$ . To see this let  $H$  consists of all the  $\binom{p+k}{k}$   $k$ -tuples formed from  $p+k$  elements. Clearly  $\mu(H) = p+1$ , but a simple argument shows that for every  $H' \subset H$   $\mu(H') \leq p$ , which proves  $f(k, p) \geq \binom{p+k}{k}$ .

A trivial argument shows that  $g(k, p) \leq kf(k, p)$ . Thus we have

**Theorem (5.5).**  $g(k, p) \leq \sum_{i=1}^{p+1} k^i$  ( $k \geq 2$ ).

We know only a little more about  $g(k, p)$  than about  $f(k, p)$ . (3.8) states that  $g(2, p) = 2p + 2$ . Further we have

**Theorem (5.6).**  $g(k, 1) = \left\lceil \frac{(k+2)^2}{4} \right\rceil$  ( $k \geq 2$ ).

**Proof.** (I) First we show  $g(k, 1) \leq \lceil (k+2)^2/4 \rceil$ . To see this let  $H$  be a set of  $k$ -tuples for which  $\mu(H) > 1$ , let further  $t'$  and  $t''$  be two  $k$ -tuples of  $H$  for which  $\alpha(t' \cap t'') = a$  is minimal.

If  $a = 0$ , then putting  $H' = \{t', t''\}$  we have  $\mu(H') > 1$  and  $\pi(H') = 2k \leq \lceil (k+2)^2/4 \rceil$ . Thus we can assume  $a > 0$ . Put  $t' \cap t'' = \{P_1, \dots, P_a\}$ . To every  $P_i$  ( $1 \leq i \leq a$ ) we can find a  $t_i$  of  $H$  which does not contain  $P_i$ . Put  $H' = \{t', t'', t_1, \dots, t_a\}$ . Clearly  $\mu(H') > 1$ . Further for every  $i$  ( $1 \leq i \leq a$ )

$$(1) \quad \alpha(t' \cap t_i) \geq a, \quad \alpha(t'' \cap t_i) \geq a, \quad \alpha(t' \cap t'' \cap t_i) \leq a - 1.$$

Denote by  $a_i$  the number of elements of  $t_i$  which do not belong to  $t' \cap t''$ . We have by (1)

$$a_i = \alpha(t_i) - \alpha(t' \cap t_i) - \alpha(t'' \cap t_i) + \alpha(t' \cap t'' \cap t_i) \leq k - a - 1.$$

Thus

$$\begin{aligned}\pi(H') &\leq \alpha(t' \cup t'') + \sum_{i=1}^a a_i \leq 2k - a + a(k - a - 1) = \\ &= 2k + a(k - 2 - a) \leq 2k + \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 = \frac{(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

which proves our assertion.

(II) To show  $g(k, 1) \geq [(k+2)^2/4]$  put  $[k/2] = l$  and  $M = \{P_1, \dots, P_q\}$  where  $q = l + 1$  if  $k$  is even and  $q = l + 2$  if  $k$  is odd. Let further

$$M_i = M - \{P_{ij}\}, \quad M'_i = \{P_{i1}, \dots, P_{il}\}, \quad t_i = M_i \cup M'_i \quad (i = 1, \dots, q),$$

and

$$H = \{t_1, \dots, t_{l+1}\},$$

(the  $P$ 's with different indices denote different points).

Here we have  $\alpha(t_i) = k$  ( $i = 1, \dots, l + 1$ ) and

$$\pi(H) = q + ql = \left\lfloor \frac{(k+2)^2}{4} \right\rfloor.$$

Clearly  $\mu(H) > 1$ , but for  $H_i = H - \{t_i\}$  ( $i = 1, \dots, l + 1$ ) we have  $\mu(H_i) = 1$  since  $P_i$  clearly represents  $H_i$ . This completes our proof.

(Received November 25, 1960.)

#### REFERENCES

- [1] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*. Paris, 1958.
- [2] ERDŐS, P.: "Remarks on a theorem of Ramsey." *Bull. Research Council of Israel* Section F **7** (1957) 21–24.
- [3] ERDŐS, P.: "Graph theory and probability." *Canadian Journal of Mathematics* **11** (1959) 34–38.
- [4] ERDŐS, P.—GALLAI, T.: "On maximal paths and circuits of graphs." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959) 337–357.
- [5] ERDŐS, P.—SZEKERES, G.: "A combinatorial problem in geometry." *Compositio Math.* **2** (1935) 463–470.
- [6] GALLAI, T.: "Über extreme Punkt- und Kantenmengen." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **2** (1959) 133–138.
- [7] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.
- [8] RAMSAY, F. P.: *Collected papers*. 82–111.
- [9] TURÁN, P.: "On the theory of graphs". *Colloquium Mathematicum* **3** (1954) 19–30.



# О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК, РЕПРЕЗЕНТИРУЮЩИХ РЕБРА ГРАФА

P. ERDŐS и T. GALLAI

## Резюме

В работе фигурируют лишь такие конечные ненаправленные графы, которые не содержат петель и в которых две точки связаны не более чем одним ребром. Число точек графа  $G$  обозначается через  $\pi(G)$ , а число его ребер через  $\nu(G)$ .

Если  $e_1, \dots, e_j (j \geq 1)$  ребра графа  $G$  и  $P_1, \dots, P_k (k \geq 1)$  такие точки  $G$ , что любое  $e_i (1 \leq i \leq j)$  содержит хотя бы одну из них, то мы говорим, что  $P_1, \dots, P_k$  репрезентируют ребра  $e_1, \dots, e_j$ . Обозначим через  $\mu(G)$  минимальное число точек, репрезентирующих все ребра  $G$ . Если  $G$  не содержит ребер, то полагаем  $\mu(G) = 0$ . Цель работы дать верхние грани для  $\mu(G)$ , используя различные данные и свойства  $G$ . Основные результаты:

Если  $G$  содержит ребро, то  $\mu(G)$  не превосходит гармоническое среднее от  $\frac{1}{2}\pi(G)$  и  $\nu(G)$ . Равенство имеет место лишь в том случае, если  $G$  полный граф, или если каждая компонента  $G$  есть полный граф с одним и тем же числом точек. (**Теорема (1.7).**)

Если  $p$  «достаточно велико» относительно  $h (h \geq 2)$  и для графа  $G$ , не содержащего изолированных точек,  $\pi(G) \geq 2p - h + 3$ , то, если для всех подграфов  $G'$  графа  $G$ , содержащих не более  $p + h$  ребер,  $\mu(G') \leq p$ , то  $\mu(G) \leq 2p - h$ . (**Теорема (2.2.).**)

Если для всех подграфов  $G'$  графа  $G$ , содержащих не более  $2p + 2$  точек,  $\mu(G') \leq p$ , то  $\mu(G) \leq p$ . (**Теорема (3.5.).**)

Границы, фигурирующие в этих теоремах, не могут быть улучшены без дальнейших предположений.

§ 5 занимается «многомерным» обобщением проблем. Здесь вместо графов фигурируют  $k$ -атомы, образуемые из любых элементов ( $k \geq 2$ ).



# SOME REMARKS ON THE RANDOM ERGODIC THEOREM, II.

by

P. RÉVÉSZ

## Introduction

Let  $\mathcal{T}$  be a measurable space of measure preserving transformations each of which is defined on a measure space  $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$ . Let further  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$  be a sequence of probability measures defined on  $\mathcal{T}$ . We denote the product space

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \dots \quad (\mathcal{T}_i = \mathcal{T}; i = 1, 2, \dots)$$

by  $\mathcal{T}^*$  and the product measure

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots$$

defined on  $\mathcal{T}^*$  by  $\mathbf{P}^*$ .  $(T_1, T_2, \dots)$  ( $T_i \in \mathcal{T}_i$ ) means a point of  $\mathcal{T}^*$ .

Let  $H_1$  denote the space of those measurable functions defined on  $X$  for which

$$\int_X f^2(x) d\mu < \infty \quad \int_X f(x) d\mu = 0.$$

We assume in this paper that the function  $f(T_k T_{k-1} \dots T_1 x)$  is measurable and integrable on the space  $\mathcal{T}^* \times X$  for every  $f \in H_1$ .

In [1] the following theorem is proved.

## Statistical random ergodic theorem. I<sup>1</sup>

$$\left\| \int_{T \in \mathcal{T}} f(Tx) d\mathbf{P}_i \right\| = \|\mathbf{M}_{\mathbf{P}_i} f(Tx)\| \leq m_i \|f(x)\|$$

for every  $f(x) \in H_1$  where

$$m_i = 1 - \frac{C}{i^{1-\varepsilon}}$$

$C$  is an arbitrary positive constant and  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Then for every  $f(x) \in H_1$  we have

$$\mathbf{P}^* \left\{ \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \right\| \rightarrow 0 \right\} = 1.$$

<sup>1</sup> Here and in what follows  $\|g\|^2 = \int_X g^2(x) d\mu$ .



In § [1] we give some conditions under which the sequence  $f(T_k \dots T_1 x)$  forms a Markov chain. In § 2. an individual random ergodic theorem is proved and in § 3. as an application of our results we obtain a strong law of large numbers for those Markov chain which can be represented in the form  $f(T_k \dots T_1 x)$ .

### § 1. The probabilistic behaviour of the sequence $f(T_k \dots T_1 x)$ .

A natural question is the following: Is the sequence  $f(T_k \dots T_1 x)$  a Markov chain for every (or almost every)  $x$ ? We shall show in an example that generally  $f(T_k \dots T_1 x)$  is not a Markov chain.

Let  $X$  be the space of the numbers 0, 1, 2, 3, 4. We define the measure  $\mu$ , the function  $f$  and the measure preserving transformations  $T^{(1)}, T^{(2)}$  on  $X$  as follows

$$\begin{aligned}\mu(0) &= \mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = \mu(4) = 1; \\ f(0) &= 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = f(4) = 3; \\ T^{(1)} 0 &= 1, \quad T^{(1)} 1 = 3, \quad T^{(1)} 2 = 0 \\ T^{(1)} 3 &= 4, \quad T^{(1)} 4 = 2; \\ T^{(2)} 0 &= 2, \quad T^{(2)} 1 = 3, \quad T^{(2)} 2 = 4 \\ T^{(2)} 3 &= 0, \quad T^{(2)} 4 = 1.\end{aligned}$$

On the set  $\mathcal{T} = \{T^{(1)}, T^{(2)}\}$  we define the probability measure  $\mathbf{P}$  by

$$\mathbf{P}(T^{(1)}) = \mathbf{P}(T^{(2)}) = 1/2.$$

Now, it is easy to see that

$$\mathbf{P}\{f(T_3 T_2 T_1 0) = 2 \mid f(T_2 T_1 0) = 3\} > 0,$$

but

$$\mathbf{P}\{f(T_3 T_2 T_1 0) = 2 \mid f(T_2 T_1 0) = 3, f(T_1 0) = 1\} = 0.$$

which proves that  $\{f(T_n \dots T_1 0)\}$  is not a Markov chain.

The following theorem holds.

**Theorem 1.** Let  $f(x)$  a measurable function defined on  $X$ ,  $\mathcal{A}$  the smallest  $\sigma$ -algebra of those subsets of  $X$  with regards to which  $f(x)$  is measurable. If for every  $A \in \mathcal{A}$  and  $T \in \mathcal{T}$  we have

$$TA \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad T^{-1}A \in \mathcal{A}.$$

Then for almost every  $x$  the sequence  $f(T_k \dots T_1 x)$  is a Markov chain.

For the proof of the above theorem we need the following

**Lemma.** Suppose that  $f(x)$  and  $\mathcal{T}$  satisfy the conditions of Theorem 1. If for a pair  $x, y$  of elements of  $X$

$$f(x) = f(y)$$

then for every  $T \in \mathcal{T}$  we have

$$f(Tx) = f(Ty).$$

**Proof.** For the sake of simplicity we denote by  $\alpha$  the common value of  $f(x)$  and  $f(y)$ ,  $\alpha = f(x) = f(y)$ . Introduce furthermore the notations

$$f^{-1}(\alpha) = A \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Since  $TA \in \mathcal{A}$  there exists a Borel set  $\mathfrak{B}$  on the real line such that

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = TA.$$

In order to prove the lemma it is sufficient to show that  $\mathfrak{B}$  has only one element. In contradiction of our statement suppose that  $\mathfrak{B}$  has more than one point. Let  $\mathfrak{C}$  be a point of  $\mathfrak{B}$  then  $C = f^{-1}(\mathfrak{C})$  is a proper subset of  $B$  and  $A \subset T^{-1}C$  which is a contradiction.

**Proof of Theorem 1.** Obviously our lemma implies that the conditional probabilities

$$\mathbf{P}\{f(T_n \dots T_1 x) \in \mathfrak{B} \mid f(T_{n-1} \dots T_1 x) = a_{n-1}, \dots, f(T_1 x) = a_1\},$$

$$\mathbf{P}\{f(T_n \dots T_1 x) \in \mathfrak{B} \mid f(T_{n-1}, \dots T_1 x) = a_{n-1}\}$$

both are the  $\mathbf{P}_n$  measures of those transformations  $T \in \mathcal{T}_n$  which map the set  $f^{-1}(a_{n-1})$  into the set  $f^{-1}(\mathfrak{B})$  which proves the theorem.

The following question arises: given a Markov chain of real valued random variables  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  what is the condition which we have to impose on the transition probability functions that makes possible the construction of a measure space  $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$  a measurable function  $f(x)$  defined on  $X$ , a measurable set  $\mathcal{T}$  of the measures preserving transformations defined on  $X$  and a sequence  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$  of probability measures defined on  $\mathcal{T}$  such that

$$(1) \quad \mathbf{P}^*\{f(T_n \dots T_1 x) \in \mathfrak{B} \mid f(T_{n-1} \dots T_1 x) = a_{n-1}, \dots, f(T_1 x) = a_1\} =$$

$$\mathbf{P}^*\{\zeta_n \in \mathfrak{B} \mid \zeta_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \zeta_1 = a_1\}$$

for a special  $x$  and for every  $n$  and for every sequence  $a_1, a_2, \dots$  of real numbers. If the above construction is possible then we say that the Markov chain  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  can be represented in the form  $f(T_k \dots T_1 x)$ . In the sequel we shall give a sufficient condition ensuring the representation in the form  $\{f(T_k \dots T_1 x)\}$  of a Markov chain. First we mention some definitions and two theorems.

1) A matrix  $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$  is called doubly stochastic if

$$a_{ik} \geq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

2) A matrix  $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$  is called weakly doubly stochastic (WDS) if

$$a_{ik} \geq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

3) A matrix  $\Pi$  having only zeros and ones as elements is called a permutation matrix (resp. weak permutation matrix) if it is a doubly stochastic matrix (resp. WDS matrix). We denote the set of all permutation matrices (resp. weak permutation matrices) by  $\Omega$  (resp. by  $\Omega^*$ ).

4) Let  $\Omega_{ik}$  (resp.  $\Omega_{ik}^*$ ) be the subset of those elements of  $\Omega$  (resp.  $\Omega^*$ ) in which the  $k$ -th element of the  $i$ -th row is 1.

The following theorems are proved in [2].

**Theorem 2.** Let  $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^\infty$  be a WDS matrix. Then we can find a  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{S}^*$  of subsets of  $\Omega^*$  and a probability measure  $\mathbf{P}^*$  on  $\mathcal{S}^*$  such that  $\Omega_{ik}^* \in \mathcal{S}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$ ) and  $\mathbf{P}^*(\Omega_{ik}^*) = a_{ik}$ .

**Theorem 3.** Let  $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^\infty$  be a doubly stochastic matrix. Then we can find a  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{S}$  of subsets of  $\Omega$  and a probability measure  $\mathbf{P}$  on  $\mathcal{S}$  such that  $\Omega_{ik} \in \mathcal{S}$  ( $i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$ ) and  $\mathbf{P}(\Omega_{ik}) = a_{ik}$ .

These two theorems together imply the following

**Consequence.** Let  $x \in l^2$  the  $i$ -th coordinate of which is denoted by  $x|_i$ . Consider every doubly stochastic (WDS) matrix as a linear bounded operator in the space  $l^2$ . Then  $\Pi x|_i$  ( $\Pi \in \Omega$ ). (resp.  $\Pi \in \Omega^*$ ) is a measurable function defined on the measurable space  $\{\Omega, \mathcal{S}\}$  (resp.  $\{\Omega^*, \mathcal{S}^*\}$ ). Now, if  $A$  is a doubly stochastic (WDS) matrix, then we can find a probability measure  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}^*$ ) on the  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}^*$ ) satisfying.

$$Ax|_i = \mathbf{M}(\Pi x|_i) = \int_{\Pi \in \Omega} \Pi x|_i d\mathbf{P}$$

resp.

$$Ax|_i = \mathbf{M}(\Pi x|_i) = \int_{\Pi \in \Omega^*} \Pi x|_i d\mathbf{P}^*.$$

These formulae can be written in the concise form

$$Ax = \mathbf{M}(\Pi x).$$

Applying these results we prove the following two theorems

**Theorem 4.** Let  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  be a discrete Markov chain having  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  as possible values. Suppose that the matrix

$$A_n = \{a_{ik}^{(n)}\}_{i,k=1}^\infty, \quad a_{ik}^{(n)} = \mathbf{P}\{\zeta_n = \alpha_k | \zeta_{n-1} = \alpha_i\}$$

is doubly stochastic. Under these conditions the Markov chain  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  can be represented in the form  $f(T_k \dots T_1 x)$ .

**Proof.** Let  $X$  be the set of the positive integers,  $\mathcal{S}$  the set of all subsets of  $X$ . We define the function  $f(x)$  and the measure  $\mu$  on  $X$  as follows

$$\begin{aligned} f(i) &= \sigma_i & (i = 1, 2, \dots) \\ \mu(i) &= 1. \end{aligned}$$

Let further  $\mathcal{T}$  denote the set of all measure preserving transformations defined on  $X$ . Every  $T \in \mathcal{T}$  there can be found a permutation matrix  $\Pi_T$  as follows if

$$Ti = k_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

( $k_i$  is a permutation of the positive integers) then

$$\Pi_T = \{\pi_{ik}\}_{i,k=1}^\infty \quad \pi_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = k_i \\ 0 & \text{if } k \neq k_i. \end{cases}$$

In the space  $\mathcal{T}$  we define a sequence  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$  of probability measures as follows:



The  $\mathbf{P}_1$  measure of the set  $T \in \mathcal{T}$  transforming the point 1 into the point  $i$  equals  $\mathbf{P}\{\zeta_1 = i\}$

The  $\mathbf{P}_n$  measure of the set  $T \in \mathcal{T}$  transforming the point  $i$  into the point  $k$  equals  $a_{ik}^{(n)}$ . (Theorem 3. states that we can define a measure in this way).

It is easy to see that for the sequences  $f(T_k \dots T_1 x)$  and  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  formula (1) holds.

**Theorem 5.** *Let  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  be a discrete Markov chain. Let the values of  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  be the real numbers  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Suppose that the matrix*

$$A_n = \{a_{ik}^{(n)}\}_{i,k=1}^\infty \quad a_{ik}^{(n)} = \mathbf{P}\{\zeta_n = k \mid \zeta_{n-1} = i\}$$

*is a WDS matrix. Then there exists a measurable set  $\mathcal{T}$  of measurable transformations defined on the positive integers and a sequence  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$  of probability measures defined on  $\mathcal{T}$  such that*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* \{f(T_k \dots T_1 1) = \alpha_{j_k} \mid f(T_{k-1} \dots T_1 1) = \alpha_{j_{k-1}}, \dots, f(T_1 1) = \alpha_{j_1}\} = \\ = \mathbf{P}\{\zeta_k = \alpha_{j_k} \mid \zeta_{k-1} = \alpha_{j_{k-1}}, \dots, \zeta_1 = \alpha_{j_1}\} \end{aligned}$$

and

$$\mu(T^{-1}E) < C\mu(E) \quad (C > 0)$$

for every  $T \in \mathcal{T}$  where  $f(x)$  is the function

$$f(i) = \alpha_i.$$

The proof of this theorem is similar to the proof of Theorem 4. the only one change is the application of Theorem 2. instead of Theorem 3.

## § 2. An individual random ergodic theorem

Let  $H_1^*$  be the space of those bounded measurable functions defined on  $X$  for which

$$\int_X f^2(x) d\mu < \infty; \quad \int_X |f(x)| d\mu < \infty; \quad \int_X f(x) d\mu = 0.$$

In this section we prove the following

**Individual random ergodic theorem.** *If for every  $f(x) \in H_1^*$*

$$(1) \quad \left\| \int f(Tx) d\mathbf{P}_i \right\| = \|\mathbf{M}_{\mathbf{P}_i} f(Tx)\| \leq m_i \|f(x)\|$$

$T \in \mathcal{T}$

where

$$m_i = 1 - \frac{C}{i^{1-\varepsilon}}.$$

$C$  is an arbitrary positive constant and  $0 < \varepsilon \leq 1$  then

$$(2) \quad \mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \rightarrow 0 \text{ for almost every } x \right\} = 1$$

for every  $f(x) \in H_1^*$ .

**Proof.** In [1] it is proved that

$$(3) \quad \int_X \mathbf{M}[(S_n f)^2] d\mu = O(1/n^{1/\alpha})$$

where  $S_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x)$  and  $\alpha = [1/\varepsilon] + 1$ . (3) implies that

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{M}[(S_{n^{2\alpha}} f)^2] d\mu < \infty.$$

By (4) and the Beppo-Levi theorem

$$\mathbf{P}^* \{S_{n^{2\alpha}} f \rightarrow 0 \text{ for almost every } x\} = 1.$$

If  $n$  is an arbitrary positive integer then there exists a  $k$  such that

$$k^{2\alpha} \leq n < (k+1)^{2\alpha}.$$

Using this fact we can write

$$\begin{aligned} |S_n f| \leq & \left| \frac{f(T_1 x) + f(T_2 T_1 x) + \dots + f(T_{k^{2\alpha}} \dots T_1 x)}{k^{2\alpha}} \right| + \\ & + \left| \frac{f(T_{k^{2\alpha}+1} \dots T_1 x) + \dots + f(T_n \dots T_1 x)}{k^{2\alpha}} \right|. \end{aligned}$$

By supposition there exists a  $K$  for which  $|f(x)| \leq K$ . Thus

$$|S_n f| \leq |S_{k^{2\alpha}} f| + \frac{K}{k}$$

and the theorem follows.

**Remark 1.** It is worth while to mention that Theorem states the validity of (2) for every  $f(x) \in H_1^*$ . If we want to prove the validity of (2) only for a special function  $f(x) \in H_1^*$  then it is enough to assume that Condition (1) holds for the functions

$$g_k(x) = \mathbf{M}\{f(T_k \dots T_1 x)\} = \int_{\mathcal{T}_k} \dots \int_{\mathcal{T}_1} f(T_k \dots T_1 x) d(\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots \times \mathbf{P}_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

**Remark 2.** In our theorem we can substitute the assumption that the elements of  $\mathcal{T}$  are measure preserving transformations by the following ones.

1) for every sequence  $T_1, T_2, \dots$  of elements of  $\mathcal{T}$  and for every  $E \in \mathcal{S}$  the inequality

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu(T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_k^{-1} E) \leq C \mu(E)$$

holds.

2) the condition (1) is fulfilled for the functions

$$g_k(x) = \mathbf{M}(f(T_k \dots T_1 x))$$

We omit the proofs of these remarks, because they can be proved in similar way to the proof of the Individual random ergodic theorem.

### § 3. An example

In this § a strong law of large numbers for a special class of the inhomogeneous Markov chains is proved.

**Theorem 6.** Let  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  be a discrete Markov chain with the state space  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ . We introduce the following conditions

$$1) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty.$$

2) The matrices

$$A_n = \{a_{ik}^{(n)}\}_{i,k=1}^{\infty} \quad a_{ik}^{(n)} = \mathbf{P}\{\zeta_n = \alpha_k | \zeta_{n-1} = \alpha_i\}$$

are WDS matrices.

3) There exists a  $C > 0$  and a  $0 < \varepsilon \leq 1$  such that for every  $n$

$$(5) \quad \|A_n\| \leq 1 - \frac{C}{n^{1-\varepsilon}}$$

where the norm of a matrix  $A$  is defined by

$$\|A\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

and  $H_1$  contains those points  $x = (x_1, x_2, \dots)$  of the space  $\ell^2$  for which  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0$

and  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ .

Under these conditions

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n} \rightarrow 0\right\} = 1.$$

**Proof.** We can represent the Markov chain  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  in the same way in the form  $f(T_k \dots T_1 x)$  as it has been made in the proof of Theorem 5. due to Condition 2. The corollary of Theorem 4 shows that (5) implies (1) Hence follows the theorem.

**Remark 3.** We show by an example that if instead of (5) we suppose only that

$$\|A_n\| \leq 1 - \frac{1}{n}$$

then the strong law in general does not hold.

$$\mathbf{P}\{\zeta_1 = +1\} = \mathbf{P}\{\zeta_1 = -1\} = 1/2$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 - 1/2n & 1/2n \\ 1/2n & 1 - 1/2n \end{pmatrix} = (a_{ik}^{(n)})_{i,k=1}^2 a_{ik}^{(n)} = \mathbf{P}\{\zeta_n = \alpha_k | \zeta_{n-1} = \alpha_i\}.$$



It is easy to see that

$$\|A_n\| = 1 - 1/n$$

and

$$\mathbf{M} \left[ \left( \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n}{n} \right)^2 \right] \rightarrow 0.$$

The variables  $\zeta_n$  are bounded hence the arithmetic mean of  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  is also bounded. This implies that

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n} \rightarrow 0 \right\} < 1.$$

(Received January 20, 1961.)

#### REFERENCES

- [1] Révész, P.: "Some remarks on the random ergodic theorems, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató intézetének Közleményei* **5** (1960) A, 375–380.
- [2] Révész, P.: "A probabilistic solution of problem 111. of G. Birkhoff" in print.

### НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СЛУЧАЙНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

P. RÉVÉSZ

#### Резюме

Пусть  $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$  есть измеримое пространство,  $\mathcal{T}$  — множество определенных на пространстве  $X$  измеримых и не изменяющих меру преобразований. Обозначим через  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$  последовательность определенных на  $\mathcal{T}$  вероятностных мер. Пусть, далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^* &= \mathcal{T} \times \mathcal{T}_2 \times \dots \quad (\mathcal{T}_i = \mathcal{T}) \\ \mathbf{P}^* &= \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \dots \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

и, наконец, через  $H_1^*$  обозначим множество тех определенных на пространстве  $X$  ограниченных интегрируемых с квадратом функций, для которых

$$\int_X f(x) d\mu = 0.$$

Предположим, что для всех  $f(x) \in H_1^*$  функции  $f(T_k \dots T_1 x)$  измеримы на пространстве  $\mathcal{T}^* \times X$ , где  $(T_1, T_2, \dots)$  обозначает некоторую точку пространства  $\mathcal{T}^*$ . В работе доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  определенная на пространстве  $X$  измеримая функция. Обозначим через  $\mathcal{A}$  наиболее узкую  $\sigma$ -алгебру, для которой  $f(x)$  измерима. Предположим, что для всех  $A \in \mathcal{A}$  и  $T \in \mathcal{T}$

$$TA \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad T^{-1}A \in \mathcal{A}.$$

Тогда почти для всех фиксированных  $X$  последовательность случайных величин  $\{f(T_n \dots T_1 x)\}$  образует цепь Маркова.

**Теорема 2.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  есть дискретная цепь Маркова, предположим, что одношаговые матрицы вероятности перехода дубльстохастичны. Тогда можно найти пространство  $\{X, \mathcal{S}, \mu\}$ , пространство  $\mathcal{T}$  определенных на нем удерживающих меру преобразований, определенная на  $X$  измеримая функция  $f(x)$  и последовательность  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$  определенных на  $\mathcal{T}$  вероятностных мер так, что для некоторого  $X$   $n$  — мерные функции распределения последовательности случайных величин  $\{f(T_n \dots T_1 x)\}$  совпадают с соответствующими  $n$  — мерными распределениями цепи Маркова  $\xi_1, \xi_2, \dots$ .

**Теорема 3.** Если для всех  $f(x) \in H^*$

$$\left\| \int_{T \in \mathcal{T}} f(Tx) d\mathbf{P}_i \right\| = \|\mathbf{M}_{\mathbf{P}_i} f(Tx)\| \leq m_i \|f(x)\|,$$

где

$$m_i = 1 - \frac{C}{i^{1-\varepsilon}}.$$

( $C$  любая положительная постоянная,  $0 < \varepsilon \leq 1$ ), тогда

$$\mathbf{P}^* \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T_k \dots T_1 x) \rightarrow 0 \text{ почти для всех } x \right\} = 1 \text{ для всех } f(x) \in H_1^*.$$

В § 3 работы с помощью теорем 2 и 3 доказывается одна теорема больших чисел относительно неоднородных цепей Маркова.





# ON A CLASSICAL PROBLEM OF PROBABILITY THEORY

by

P. ERDŐS and A. RÉNYI

We consider the following classical "urn-problem". Suppose that there are  $n$  urns given, and that balls are placed at random in these urns one after the other. Let us suppose that the urns are labelled with the numbers  $1, 2, \dots, n$  and let  $\xi_j$  be equal to  $k$  if the  $j$ -th ball is placed into the  $k$ -th urn. We suppose that the random variables  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \dots$  are independent, and  $\mathbf{P}(\xi_j = k) = \frac{1}{n}$  for  $j = 1, 2, \dots$  and  $k = 1, 2, \dots, n$ . By other words each ball may be placed in any of the urns with the same probability and the choices of the urns for the different balls are independent. We continue this process so long till there are at least  $m$  balls in every urn ( $m = 1, 2, \dots$ ). What can be said about the number of balls which are needed to achieve this goal?

We denote the number in question (which is of course a random variable) by  $v_m(n)$ . The "dixie cup"-problem considered in [1] is clearly equivalent with the above problem. In [1] the mean value  $\mathbf{M}(v_m(n))$  of  $v_m(n)$  has been evaluated (here and in what follows  $\mathbf{M}(\cdot)$  denotes the mean value of the random variable in the brackets) and it has been shown that

$$(1) \quad \mathbf{M}(v_m(n)) = n \log n + (m-1) n \log \log n + n \cdot C_m + o(n)$$

where  $C_m$  is a constant, depending on  $m$ . (The value of  $C_m$  is not given in [1]).

In the present note we shall go a step further and determine asymptotically the probability distribution of  $v_m(n)$ ; we shall prove that for every real  $x$  we have

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{v_m(n)}{n} < \log n + (m-1) \log \log n + x\right) = \exp\left(-\frac{e^{-x}}{(m-1)!}\right).$$

(Here and in what follows  $\mathbf{P}(\cdot)$  denotes the probability of the event in the brackets.)

(1) can be deduced from (2); moreover we obtain from (2)

$$(3) \quad C_m = c - \log(m-1)! \quad (m = 1, 2, \dots)$$

where  $c$  is Euler's constant, that is

$$(4) \quad c = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0,5772 \dots$$

To prove (2) we shall consider the following related problem: Let  $x_k(n, N)$ , denote the number of balls in the  $k$ -th urn ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) after distributing  $N$  balls among the urns that is, we put  $x_k(n, N) = \sum_{\substack{\xi_j = k \\ 1 \leq j \leq N}} 1$ . Let us put

$$(5) \quad \mu(n, N) = \min_{1 \leq k \leq n} x_k(n, N).$$

We have evidently

$$(6) \quad \mathbf{P}(v_m(n) > N) = \mathbf{P}(\mu(n, N) < m).$$

Thus to prove (2) it is sufficient to show that putting

$$(7) \quad N(n) = n \log n + (m-1) n \log \log n + xn + o(n)$$

(where  $o(n)$  is an arbitrary function of  $n$  which is of smaller order of magnitude than  $n$  and is such that  $N(n)$  is a positive integer for all  $n$ ) we have

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\mu(n, N(n)) < m) = 1 - \exp \left( - \frac{e^{-x}}{(m-1)!} \right).$$

Now clearly we have for  $j \leq m-2$

$$(9) \quad \mathbf{P}(\mu(n, N(n)) = j) \leq n \binom{N(n)}{j} \frac{1}{n^j} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{N(n)-j} = O \left( \frac{1}{(\log n)^{m-1-j}} \right)$$

and thus

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\mu(n, N(n)) < m-1) = 0.$$

Denoting by  $A_m(n)$  the event that there is at least one  $k$  for which  $x_k(n, N(n)) = m-1$ , we have clearly

$$|\mathbf{P}(\mu(n, N(n)) < m) - \mathbf{P}(A_m(n))| \leq \mathbf{P}(\mu(n, N(n)) < m-1).$$

Thus to prove (8) it suffices to show that

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_m(n)) = 1 - \exp \left( - \frac{e^{-x}}{(m-1)!} \right).$$

But clearly

$$(12) \quad \mathbf{P}(A_m(n)) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} W_k(n)$$

where  $W_k(n)$  is the probability of the event that  $k$  prescribed urns contain exactly  $m-1$  balls. Now evidently

$$(13) \quad W_k(n) = \frac{N(n)!}{[(m-1)!]^k (N(n) - (m-1)k)!} \cdot \frac{1}{n^{(m-1)k}} \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^{N(n) - (m-1)k}$$

and therefore

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} W_k(n) = \frac{\left( \frac{e^{-x}}{(m-1)!} \right)^k}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

It is easy to see that if we stop after taking an odd resp. even number of terms on the right of (12), we get a number which is greater resp. smaller than the left hand side of (12). It follows therefore from (14) that (11) holds. As mentioned above, with respect to (10) this implies (8) and taking (6) into account (2) follows.

To deduce (3) we note first that putting

$$(15) \quad F_m(x) = \exp \left( -\frac{e^{-x}}{(m-1)!} \right).$$

we have, with respect to (4),

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_m(x) = c - \log(m-1)!.$$

Now it is easy to show that in the present case the limit of the mean value is equal to the mean value of the limiting distribution that is

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{M} \left( \frac{v_m(n)}{n} - \log n - (m-1) \log \log n \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_m(x),$$

which proves (3).

Let us mention that in view of (3), (2) can be written also in the form

$$(2') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \frac{v_m(n) - \mathbf{M}(v_m(n))}{n} < x \right) = e^{-e^{-x-t}},$$

which shows that the limit distribution of  $\frac{v_m(n) - \mathbf{M}(v_m(n))}{n}$  does not depend on  $m$ .

It should be mentioned that for the special case  $m = 1$  (2) can be deduced in an other, more straightforward way, namely by the method by which the explicit formula

$$(18) \quad \mathbf{M}(v_1(n)) = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

is proved in [2]. Let us denote by  $v_1(n, k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) the number of balls which are necessary in order that exactly  $k$  urns should contain at least one ball. Clearly  $v_1(n, 1) = 1$ ,  $v_1(n, n) = v_1(n)$  and the random variables

$$(19) \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_k = v_1(n, k) - v_1(n, k-1) \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

are independent. We have further

$$(20) \quad \mathbf{P}(\delta_k = j) = p_k(1 - p_k)^{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

where

$$p_k = \frac{n - k + 1}{n} \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$



Thus it follows that the characteristic function  $\varphi_n(t)$  of

$$\eta_n = \frac{v_1(n) - n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{n} = \frac{\delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n - n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}{n}$$

is given by

$$(21) \quad \varphi_n(t) = \mathbf{M}(e^{it\eta_n}) = \frac{1}{\prod_{h=1}^n e^{\frac{it}{h}} \left(1 + \frac{n}{h} \left(e^{-\frac{it}{n}} - 1\right)\right)}$$

and thus

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \frac{1}{\prod_{h=1}^{\infty} e^{\frac{it}{h}} \left(1 - \frac{it}{h}\right)}.$$

By the classical product representation of the gamma function it follows that

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \Gamma(1 - it) e^{-itc}$$

where  $c$  is again Euler's constant. As however by the integral representations of the gamma function we have

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dF_1(x) = \Gamma(1 - it)$$

where  $F_1(x)$  is defined by (15), it follows that

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \frac{v_1(n) - n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - c\right)}{n} < x \right) = F_1(x) = e^{-e^{-x}},$$

and as it is well known that

$$(26) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + c + o(1)$$

we obtain

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \frac{v_1(n) - n \log n}{n} < x \right) = e^{-e^{-x}}.$$

Thus we obtained a second proof of (2) for  $m = 1$ .

Finally we consider the following problem: Let  $\omega_k(n, N)$  denote the number of urns containing exactly  $k$  balls, if we place at random  $N$  balls into  $n$  urns. Let us investigate the asymptotic distribution of  $\omega_{m-1}(n, N(n))$  where  $N(n)$  is given by (7). (By other words we take so many balls that the

probability that there should be less than  $m - 1$  balls in any of the urns should tend to 0). By using the well known formula of CH. JORDAN [3] we have

$$(28) \quad \mathbf{P}(\omega_{m-1}(n, N(n)) = k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j W_{k+j}(n) \binom{k+j}{k} \binom{n}{k+j}.$$

Thus it follows from (14) that

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\omega_{m-1}(n, N(n)) = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

where

$$(30) \quad \lambda = \frac{e^{-x}}{(m-1)!}.$$

Thus the number of urns containing exactly  $(m-1)$  balls will be in the limit distributed according to Poisson's law with mean value  $\frac{e^{-x}}{(m-1)!}$ .

In the special case  $m = 1$  this result states that if we distribute  $n \log n + n + o(n)$  balls among  $n$  urns then the number  $\omega_0(n, N(n))$  of empty urns will for  $n \rightarrow \infty$  in the limit be distributed according to Poisson's law with mean value  $e^{-x}$ . This special case was mentioned already by S. BERNSTEIN [4] (see also [5] Ch. IV. Problem No. 8.).

It is an interesting problem to investigate the limiting distribution of  $v_m(n)$  when  $m$  increases together with  $n$ , but we can not go into this question here.

Finally we mention that the problem treated above is analogous to a problem concerning random graphs which we considered recently (see [6]).

(Received February 7, 1961.)

#### REFERENCES

- [1] NEWMAN, D. J.—SHEPP, L.: "The double dixie cup problem." *The American Mathematical Monthly* **67** (1960), 58—61.
- [2] FELLER, W.: *Introduction to Probability Theory*, Vol. I. New York, 1950. p. 213.
- [3] JORDAN, CH.: «Le théoreme de probabilité de Poincaré generalisé au cas de plusieurs variables indépendantes.» *Acta Sci. Math. (Szeged)* **7** (1934) 103—111.
- [4] BERNSTEIN, S. N.: *Teoria Veroiatnostei*. (In Russian) Moscow, 1945. p. 75—76.
- [5] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás* (Textbook of probability theory, in Hungarian) Budapest, 1954. p. 134.
- [6] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the strength of connectedness of a random graph." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 261—267.

## ОБ ОДНОМ КЛАССИЧЕСКОМ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

## Резюме

В  $n$  ящиков брошено наудачу  $N$  дробинok. Пусть в ящике номера  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) попадает  $x_k(n, N)$  дробинok. Положим

$$\mu(n, N) = \min_{1 \leq k \leq n} x_k(n, N).$$

Доказывается что если

$$N(n) = n \log n + (m - 1) n \log \log n + xn + o(n),$$

где  $m$  целое положительное число, то имеет место

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\mu(n, N(n)) < m) = 1 - \exp \left( - \frac{e^{-x}}{(m-1)!} \right).$$



## UNSOLVED PROBLEMS

We start with this number a new section of this journal: that of unsolved problems. In this section unsolved problems will be proposed, at the same time some information about previous results in the direction of the problem in question will be given. Problems for this section as well as comments on published problems should be sent to G. ALEXITS, editor of the section, to the address of the redaction of the journal (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.).

## НЕРАЗРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Начиная с настоящего номера помещается новый раздел в нашем журнале: неразрешенные проблемы. В этом разделе мы публикуем неразрешенные проблемы и одновременно указываем на более ранние результаты, связанные с данной проблемой. Проблемы, предназначенные для этого раздела, а также замечания, связанные с сообщаемыми проблемами просим направить по адресу редакции журнала (Budapest, V. Reáltanoda utca 13—15.) для редактора раздела G. ALEXITS.

### SOME UNSOLVED PROBLEMS

by

PAUL ERDŐS

In this paper I shall discuss some unsolved problems in number theory, combinatorial analysis, set theory, elementary geometry, analysis and probability. The choice of problems is purely subjective, I discuss problems on which I worked myself or which interested me and it is certainly not claimed that all or most of the problems discussed here are very important, but I hope the reader will find them challenging and amusing; most of them will have a combinatorial character. Classical and wellknown problems are avoided as much as possible.

I gave several talks on unsolved problems at various places (Moscow, Leningrad, Peking, Singapore, Adelaide). In the autumn of 1959 I gave a series of talks on unsolved problems at the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences and most of the problems discussed here were discussed in my lectures.

My first talk on unsolved problems was given on November 16, 1957 at Assumption University Windsor, Ontario, Canada, a paper on this talk appeared in the *Michigan Mathematical Journal* 4 (1957), 291—300, and there is a considerable overlap between this paper and the present one.

$c, c_1, c_2, \dots, C$  will denote positive absolute constants. i. o. is an abbreviation for infinitely often.

### I. Problems in number theory

First some problems on prime numbers.

1) Denote by  $\pi(x)$  the number of primes not exceeding  $x$ . It has been conjectured that

$$(I. 1.1) \quad \pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y).$$

It is easy to verify (I. 1.1) for small values of  $y$  (P. UNGÁR informed me that he verified it for  $y \leq 41$ ). For  $x > x_0$ ,  $x = y$  (I. 1.1) was proved by

LANDAU, HARDY and LITTLEWOOD proved by BRUN's method that

$$(I. 1.2) \quad \pi(x+y) - \pi(x) < \frac{cy}{\log y}$$

and A. SELBERG proved that

$$(I. 1.3) \quad \pi(x+y) - \pi(x) < 2 \frac{y}{\log y} + O\left(\frac{y \log \log y}{(\log y)^2}\right).$$

A conjecture weaker than (I. 1.1) but stronger than (I. 1.3) would be: To every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $y_0$  so that for  $y > y_0$

$$(I. 1.4) \quad \pi(x+y) - \pi(x) < (1 + \varepsilon) \frac{y}{\log y}.$$

The replacement in (I. 1.3) of 2 by a smaller constant would be of great importance.

Instead of considering  $\pi(x+y) - \pi(x)$  one could define  $f(x, y)$  as the greatest integer  $k$  so that there exist  $k$  integers  $x < a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq x+y$  satisfying  $(a_i, a_j) = 1$ . The proof of HARDY and LITTLEWOOD gives  $f(x, y) < cy/\log y$  (trivially  $f(x, y) \geq \pi(x+y) - \pi(x)$ ) and one could conjecture that  $f(x, y) \leq \pi(y)$  or that  $f(x, y) < (1 + \varepsilon) \frac{y}{\log y}$  for  $y > y_0$ .

Following HARDY and LITTLEWOOD put

$$\varrho(y) = \limsup_{x=\infty} (\pi(x+y) - \pi(x)).$$

One would conjecture that  $\lim_{y=\infty} \varrho(y) = \infty$  and perhaps even

$$\varrho(y) > (1 - \varepsilon) y/\log y \text{ for } y > y_0,$$

but it is not even known that  $\varrho(y) \geq 2$  for  $y > y_0$ .

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD: "Some problems of partitio numerorum." *Acta Mathematica* **44** (1923) 1-70.

E. LANDAU: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Vol. 1.

A. SELBERG: "On elementary methods in prime number theory and their limitations." Den 11-te Skandinaviske Matematikerkongress (1952) 13-22.

2) Denote by  $2 = p_1 < p_2 < \dots$  the sequence of prime numbers. Put  $d_n = p_{n+1} - p_n$ . TURÁN and I proved that for infinitely many  $n$  and  $m$ ,  $d_n > d_{n+1}$  and  $d_{m+1} > d_m$ . It is not known if  $d_n = d_{n+1}$  holds i. o. We could not prove that i. o.  $d_n > d_{n+1} > d_{n+2}$ , in fact we could not even prove that i. o. either  $d_n > d_{n+1} > d_{n+2}$  or  $d_n < d_{n+1} < d_{n+2}$ .

It seems very likely that the sequence  $d_n/\log n$  is everywhere dense and that it has a distribution function (in other words the density of integers  $n$  satisfying  $d_n/\log n < c$  exists and if we denote it by  $f(c)$  then  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = 1$ ). RICCI and I proved that the set of limit points of  $d_n/\log n$  has positive measure, but  $\infty$  is the only known limit point (theorem of WESTZYNTHIUS). Analogous questions can be asked about  $d_n/d_{n+1}$ .

P. ERDŐS and P. TURÁN: "On some sequences of integers." *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 371–378.

P. ERDŐS: "On the difference of consecutive primes." *Ibid.* 885–889.

P. ERDŐS and A. RÉNYI: "Some problems and results on consecutive primes." *Simon Stevin* **27** (1950) 115–125.

G. RICCI: "Recherches sur l'allure de la suite  $p_{n+1} - p_n / \log p_n$ ." *Colloque sur la Théorie des nombres, Bruxelles* (1955) 93–106.

E. WESTZYNTHIUS: "Über die Verteilung der Zahlen die zu den ersten Primzahlen teilerfremd sind." *Commentationes Phys.-mat. Soc. Sci. fenn.* **5**, Nr. 25, 1–37.

3) Sharpening the result of WESTZYNTHIUS I proved that i. o.

$$(I. 3.1) \quad d_n > c \frac{\log n \log \log n}{(\log \log \log n)^2}$$

and RANKIN proved that i. o.

$$(I. 3.2) \quad d_n > c \frac{\log n \log \log n \log \log \log \log n}{(\log \log \log n)^2}.$$

It seems to be very difficult to improve (I. 3.2).

INGHAM proved  $d_n < n^{5/8}$  ( $d_n < n^{1-\varepsilon}$  was first proved by HOHEISEL for  $\varepsilon = 32999/33000$ ) and the Riemann hypothesis would imply  $d_n < n^{1/2+\varepsilon}$ . CRAMER conjectured that

$$(I. 3.3) \quad \limsup d_n / (\log n)^2 = 1.$$

The old conjecture on prime twins states that i. o.  $d_n = 2$ , but it is not even known that

$$(I. 3.4) \quad \liminf d_n / \log n = 0.$$

I proved using BRUN's method that

$$(I. 3.5) \quad \liminf d_n / \log n < 1.$$

I further proved that

$$(I. 3.6) \quad \limsup \min(d_n, d_{n+1}) / \log n = \infty,$$

but I can not prove that

$$(I. 3.7) \quad \liminf \max(d_n, d_{n+1}) / \log n < 1 \text{ or } \limsup \min \frac{(d_n, d_{n+1}, d_{n+2})}{\log n} = \infty,$$

also I can not prove

$$\lim \frac{d_n + d_{n+1} + \dots + d_{n+k-1}}{k \log n} < 1 - c$$

where  $c$  does not depend on  $n$ .

P. ERDŐS: "On the difference of consecutive primes." *Quarterly Journal of Math.* **6** (1935) 124–128. See also T. H. CHANG: "Über aufeinanderfolgende Zahlen, von denen jede mindestens einer von  $n$  linearen Kongruenzen genügt, deren Moduln die ersten  $n$  Primzahlen sind." *Schriften Math. Sem. u. Inst. Angew. Math. Univ.* **4** (1938) 35–55.

R. A. RANKIN: "The difference between consecutive prime number." *Journal London Math. Soc.* **13** (1938) 242–247.



A. E. INGHAM: "On the difference between consecutive primes." *Quarterly Journal of Math.* **8** (1937) 255–266.

H. CRAMER: "On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers." *Acta Arithmetica* **2** (1936) 23–46.

G. HOHEISEL: „Primzahlprobleme in der Analysis." Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss. phys. Math. Klasse, (1930), 580–588.

P. ERDŐS: "The difference of consecutive primes," *Duke Math. Journal* **6** (1940) 438–441.

R. A. RANKIN, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950) 143–150.

P. ERDŐS: "Problems and results on the differences of consecutive primes." *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 37–39.

4) RÉNYI and I proved by BRUN's method that to every  $c_1$  there exists a  $c_2$  so that there exists  $r > c_2 \log n$   $d$ 's  $d_k, \dots, d_{k+r}$  satisfying

$$(I. 4.1) \quad k < n, \quad d_{k+i} > c_1, \quad 0 \leq i \leq r,$$

but we can not prove that (I. 4.1) holds for every  $c_1$  and  $c_2$  if  $n > n_0(c_1, c_2)$ .

Denote by  $a_1 < a_2 < \dots$  the sequence of integers having not more than two prime factors. I proved that

$$(I. 4.2) \quad \limsup (a_{k+1} - a_k) / \log k > c_1$$

but can not prove that the lim sup in (I. 4.2) is infinite, I can not prove that the limit in (I. 4.2) is positive if the  $a$ 's are the integers having not more than three prime factors. (ERDŐS—RÉNYI, see problem 2.) (I. 4.2) was a problem in *Elemente der Mathematik*, 1955.

5) CRAMER (see problem 3) proved, assuming the Riemann hypothesis that

$$(I. 5.1) \quad \sum_{p_k < x} (p_{k+1} - p_k)^2 < cx(\log x)^3.$$

It is possible that

$$(I. 5.2) \quad \sum_{p_k < x} (p_{k+1} - p_k)^2 < cx \log x$$

holds. (Perhaps even  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \log x} \sum_{p_k < x} (p_{k+1} - p_k)^2$  exists). (I. 5.2) seems hopeless at present, but perhaps the following conjecture of mine can be attacked. Let  $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)}$  be the integers relatively prime to  $n$ . Then

$$(I. 5.3) \quad \sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} (a_{k+1} - a_k)^2 < C \frac{n^2}{\varphi(n)}.$$

I can not even prove that

$$(I. 5.4) \quad \sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} (a_{k+1} - a_k)^2 < C n (\log \log n)^{c_1}$$

((I. 5.4) follows easily by BRUN's method with  $n (\log n)^{c_2}$ ).

SIVASANKARANARAYANA PILLAI conjectured that

$$(I. 5.5) \quad \sum_{\substack{k=0(\bmod 2) \\ k < n}} d_k = \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) p_n.$$

(I. 5.5) seems very difficult but again one can conjecture that

$$(I. 5.6) \quad \sum_{\substack{k=0(\bmod 2) \\ k < \varphi(n)}} (a_{k+1} - a_k) = \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) n.$$

We mentioned already (the probably hopeless) conjecture that  $d_n/\log n$  has a distribution function. Let  $n_i$  be the product of the first  $i$  primes. Denote by  $f(c, i)$  the number of solutions of  $a_{k+1}^{(i)} - a_k^{(i)} < \frac{c n_i}{\varphi(n_i)}$  ( $a_k^{(i)}, 1 \leq k \leq \varphi(n_i)$  are the integers  $\leq n_i$  relatively prime to  $n_i$ ). Is it true that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(c, i)/\varphi(n_i) = g(c)$$

exists? It is not difficult to show that the numbers

$$\frac{a_{k+1}^{(i)} - a_k^{(i)}}{n_i/\varphi(n_i)}, 1 \leq k < \varphi(n_i), 1 \leq i < \infty$$

are everywhere dense in  $(0, \infty)$ .

6) Let  $f(n)$  be a real valued multiplicative function, i.e.  $f(a.b) = f(a) \cdot f(b)$  if  $(a, b) = 1$ . Assume  $|f(n)| = 1$ . Is it true that

$$(I. 6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k)$$

always exists? It is easy to prove that if

$$(I. 6.2) \quad \sum_{f(p)=-1} \frac{1}{p} < \infty,$$

then the limit (I. 6.1) always exists and is different from 0. It can be conjectured that if (I. 6.2) diverges, then (I. 6.1) is 0. If  $f(p^a) = -1$ , then the conjecture is equivalent with the prime number theorem. I conjectured (I. 6.1) about 20 years ago, but quite possibly the conjecture is much older.

WINTNER observed that if  $|f(n)| = 1$  can be complex valued, the limit (I. 6.1) does not have to exist.

A WINTNER: "The theory of measure in arithmetical semigroups. Baltimore, 1944. See also N. G. TCHUDAKOFF: "Theory of the characters of number semigroups." *Journal Indian Math. Soc.* **20** (1956) 11-15.

7) OSTMANN conjectured that there do not exist two sequences of integers  $a_1 < a_2 < \dots$ ;  $b_1 < b_2 < \dots$  each having at least two elements so that all but a finite number of primes are of the form  $a_i + b_j$  and there are only a finite number of composite numbers of this form.

HORNFECK proved, using BRUN's method that both sequences must be infinite.

It seems certain that OSTMANN's conjecture is true, but the proof may well be difficult.

8) A. WINTNER once asked me if I can prove the existence of an infinite sequence of primes  $p_i$ ,  $1 \leq i < \infty$  so that if  $a_1 < a_2 < \dots$  are the integers composed of the  $p$ 's, then  $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_{i+1} - a_i) = \infty$ . I was unable to prove the existence of such a sequence of primes. A well-known theorem of Pólya states that if the  $a$ 's are all composed of  $p_1, p_2, \dots, p_k$  then  $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_{i+1} - a_i) = \infty$ .

For several problems and conjectures on prime numbers see A. SCHINZEL and W. SIERPINSKI: "Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers." *Acta Arithmetica* 4 (1958) 185–207.

Now we consider some problems on additive number theory.

9) Can one give  $k + 2$  integers  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{k+2} \leq 2^k$  so that the sums  $\sum_{i=1}^{k+2} \varepsilon_i a_i$ ,  $\varepsilon_i = 0$  or 1, are all distinct? The sequence  $2^i$ ,  $0 \leq i \leq k$  shows that one can give  $k + 1$  such integers and 3, 5, 6, 7 shows that  $a_{k+1} < 2^k$  is possible. Very recently CONWAY and GUY answered this question affirmatively, independently of each other. The problem, whether one can find  $k + 3$  such integers  $\leq 2^k$  remains open.

More generally one can ask what is the maximum number of integers  $a_1 < a_2 < \dots < a_{k_x} < x$  so that the sums  $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i$ ,  $\varepsilon_i = 0$  should be all different? MOSER and I proved that

$$(I. 9.1) \quad k_x \leq \frac{\log x}{\log 2} + (1 + \varepsilon) \frac{\log \log x}{2 \log 2}.$$

Probably (I. 9.1) is very far from being best possible,  $k_x = \frac{\log x}{\log 2} + O(1)$  is quite possibly true.

P. ERDŐS: "Problems and results in additive number theory." Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles (1955) 136–137.

10) Denote by  $f(n)$  the maximum number of positive integers  $a_1 < a_2 < \dots$  not exceeding  $n$  for which the sums  $a_i + a_j$  are all different. SIDON asked to estimate  $f(n)$ . TURÁN and I proved that

$$(I. 10.1) \quad f(n) < n^{1/2} + n^{1/4},$$

and SINGER proved that for infinitely many  $n$

$$(I. 10.2) \quad f(n) > n^{1/2}.$$

It is possible that  $f(n) = n^{1/2} + O(1)$ .

SINGER's proof is based on his construction of a perfect difference set i.e. a set of residues  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \pmod{n}$  so that every residue mod  $n$  except 0 can be uniquely represented in the form  $a_i - a_j$ . Clearly a perfect difference set is only possible if  $n = k^2 + k + 1$  and SINGER proved that a perfect difference set exists if  $k$  is a power of a prime. It has been conjectured



if  $k$  is not the power of a prime a perfect set can not exist. Special cases of this conjecture have been proved by BRUCK and RYSER. The case  $k = 10$  is not yet decided.

From (I. 10.1) and SINGER's result one can in fact deduce

$$(I. 10.3) \quad f(n) = (1 + o(1))n^{1/2}.$$

Denote by  $f_3(n)$  the maximum number of  $a$ 's not exceeding  $n$  so that all the sums  $a_i + a_j + a_l$  are all distinct. BOSE recently asked me if I can prove analogously to (I. 10.1) and (I. 10.3)

$$(I.10.4) \quad f_3(n) = (1 + o(1))n^{1/3}$$

The proof of (I.10.4) seems difficult, the method we used in the proof of (I.10.1) does not work.

SIDON also asked what can be said about an infinite sequence for which the sums  $a_i + a_j$  are all different. TURÁN and I proved that for such a sequence

$$(I.10.5) \quad \limsup a_k/k^2 = \infty \quad (\text{or } \liminf f(n)/\sqrt{n} = 0),$$

but we constructed a sequence for which  $\liminf a_k/k^2 < \infty$ .

One can show that there exists such a sequence for which

$$(I.10.6) \quad a_k < ck^3 \quad \text{for all } k.$$

There is a considerable gap between (I.10.5) and (I.10.6), which at present I can not fill.

RÉNYI and I proved by using probabilistic methods that to every  $\varepsilon$  there exists an  $l = l(\varepsilon)$  and a sequence  $a_1 < a_2 < \dots$  for which  $a_k < k^{2+\varepsilon}$  and the number of solutions of  $n = a_i + a_j$  is less than  $l$ .

ERDŐS—TURÁN: "On the problem of Sidon in additive number theory and on some related problems." *Journal London Math. Soc.* **16** (1941) 212—215.

J. SINGER: "A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory." *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938) 377—385.

R. H. BRUCK and H. J. RYSER: "The nonexistence of certain finite projective planes." *Canadian Journal of Math.* **1** (1949) 88—93.

P. ERDŐS and A. RÉNYI: "Additive properties of random sequences of positive integers." *Acta Arithmetica* **6** (1940) 83—110.

For the problems considered in 10. and 11. see also A. STÖHR "Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, I. and II." *Journal für die reine und angewandte Math.* **194** (1955) 40—65 and 111—140, many interesting problems can be found in this paper.

Of the many problems discussed in STÖHR's paper I just wish to mention the following problem of ROHRBACH: What is the smallest number of integers  $a_1 < a_2 < \dots < a_{k_n}$  so that every integer  $\leq n$  should be of the form  $a_i + a_j$ . The estimate  $k_n > \sqrt{2n}$  is trivial and ROHRBACH improves this to  $(1 + \varepsilon)\sqrt{2n}$  for a fixed  $\varepsilon > 0$ . Recently MOSER obtained a better value for  $\varepsilon$  (L. MOSER, *Acta Arithmetica* **6** (1960) 11—13). Trivially  $k_n \leq 2\sqrt{n}$  and perhaps  $k_n = 2\sqrt{n} + O(1)$ .

For a review of additive number theory see H. H. OSTMANN: *Additive Zahlentheorie*, Ergebnisse der Math. Heft 7. (two volumes).

11) Another problem of SIDON asked if there exists an infinite sequence of integers so that if  $g(n)$  denotes the number of solutions of  $n = a_i + a_j$ ,

then to every  $\varepsilon > 0$  there exists an  $n_0$  so that for  $n > n_0$

$$(I.11.1) \quad 0 < g(n) < n^\varepsilon.$$

I proved by probabilistic arguments that such a sequence exists, in fact I proved the existence of a sequence with

$$(I.11.2) \quad c_1 \log n < g(n) < c_2 \log n.$$

The existence of a sequence with  $g(n)/\log n = c > 0$  is an open problem. An older conjecture of TURÁN and myself stated that if  $g(n) > 0$  for all  $n > n_0$  then  $\limsup g(n) = \infty$  (perhaps even  $g(n) > c \log n$  for infinitely many  $n$ , which would show that (I.11.2) is best possible). Our conjecture seems rather difficult. A stronger conjecture would be: if  $a_k < ck^2$  for all  $k$  then  $\limsup g(n) = \infty$ . This would imply our original conjecture, but is perhaps easier to attack; all we can show is that  $\limsup g(n) > 1$  (see STÖHR's paper quoted in 10.1).

TURÁN and I conjectured that if  $a_1 < a_2 < \dots$  is any infinite sequence of integers then

$$(I.11.3) \quad \sum_{k=1}^n g(k) = cn + O(1)$$

is impossible. FUCHS and I proved the following stronger theorem:

$$(I.11.4) \quad \sum_{k=1}^n g(k) = cn + o\left(\frac{n^{1/4}}{(\log n)^{1/2}}\right)$$

is impossible for  $c > 0$ . In the case  $a_k = k^2$  HARDY and LANDAU proved that

$$(I.11.5) \quad \sum_{k=1}^n g(k) - \frac{\pi}{4}n \neq o((n \log n)^{1/4}).$$

In the case  $a_k = k^2$  (this is the classical problem of the lattice points in the circle) it has been conjectured that for every  $\varepsilon > 0$

$$(I.11.6) \quad \sum_{k=1}^n g(k) = \frac{\pi}{4}n + O(n^{1/4+\varepsilon}).$$

(I.11.6) is very deep. It is very likely that (I.11.4) is very close to being best possible, but we have not been able to prove this. Very recently JURKAT improved the error term in (I.11.4) to  $o(n^{1/4})$ .

It would be of interest to show that the number of solutions of  $a_i + a_j + \dots + a_r \leq n$  can not be of the form  $cn + O(1)$ , but this, and possible generalizations in the direction of (I.11.4) have not yet been done.

Very recently H. E. RICHERT proved the following result:

Let  $a_1 < a_2 < \dots$  be any sequence. Then

$$(I.11.5) \quad \sum_{kl \leq n} a_k a_l = n \log n + cn + O(n^a)$$

and

$$(I.11.6) \quad \sum_{k=1}^n a_k = n + O(n^a)$$



can not both hold if  $\alpha < \frac{1}{4}$ . Perhaps the condition (I.11.6) is superfluous [perhaps the error term in (I.11.5) has to be changed].

P. ERDŐS: "On a problem of Sidon in additive number theory," *Acta Szeged* **11** (1954) 255–259, see also the paper quoted in I. 9).

P. ERDŐS and W. H. J. FUCHS: "On a problem of additive number theory." *Journal London Math. Soc.* **31** (1956) 67–73.

E. LANDAU: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Vol. 2.

12) LORENZ proved the following conjecture of STRAUS and myself: to every infinite sequence of integers  $a_1 < a_2 < \dots$  there exists a sequence of density 0,  $b_1 < b_2 < \dots$  so that every sufficiently large integer can be expressed in the form  $a_i + b_j$ . In particular he proved that if the  $a$ 's are the primes then the  $b$ 's can be chosen so that  $B(x) < c(\log x)^3$ . I improved this to  $B(x) < c(\log x)^2$  ( $B(x) = \sum_{b_i \leq x} 1$ ). Perhaps such a sequence exists satisfying  $B(x) < c \log x$ . From the prime number theorem  $c \geq 1$ . I can not prove that  $c > 1$ . This would follow from the following general conjecture of H. HANANI (oral communication): Let  $a_1 < a_2 < \dots$ ;  $b_1 < b_2 < \dots$  be two infinite sequences of integers so that every sufficiently large  $n$  can be written in the form  $a_i + b_j$ . Then

$$(I. 12.1) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} A(x) B(x)/x > 1.$$

Does there exist a sequence  $b_1 < b_2 < \dots$  satisfying  $B(x) < \frac{cx}{\log x}$  so that every sufficiently large integer can be written in the form  $2^k + b_i$ ? Lorenz's result only gives  $B(x) < cx \log \log x / \log x$ .

G. G. LORENZ: "On a problem of additive number theory." *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954) 838–841.

P. ERDŐS: "Some results on additive number theory." Ibid. 847–853., see also my paper quoted in I. 9).

W. NARKIEWICZ: "Remarks on a conjecture of Hanani in number theory." *Coll. Math* **7** (1960) 161–165.

13) A sequence  $b_1 < b_2 < \dots$  was called by KHINTCHINE an essential component if for every  $a_1 < a_2 < \dots$  of positive density  $\alpha$  the SCHNIRELMANN sum of the two sequences has density greater than  $\alpha$ . By density we mean here SCHNIRELMANN density i.e. the greatest lower bound of  $A(n)/n$ ,  $1 \leq n < \infty$ . The SCHNIRELMANN sum of  $a_i$  and  $b_j$ ,  $1 \leq i, j < \infty$  is the set of integers of the form  $\{a_i, b_j, a_i + b_j\}$ . I proved, extending previous results of KHINTCHINE and BUCHSTAB, that every basis is an essential component, a sequence  $b_1 < b_2 < \dots$  is called a basis if there exists an integer  $k$  so that every integer is the sum of  $k$  or fewer  $b$ 's. LINNIK proved that an essential component does not have to be a basis, in fact he constructed an essential component for which  $B(x) = o(x^\varepsilon)$  for every  $\varepsilon > 0$ . Linnik informed me that he can construct an essential component satisfying  $B(x) < \exp[(\log x)^{1-c}]$ . It seems to me that if  $b_{i+1}/b_i > c > 1$  then the sequence  $b_i$  can not be an essential component, but I have not been able to show this (it is easy to show this for  $b_i = 2^i$ ). Perhaps  $B(x)/\log x \rightarrow \infty$  holds for every essential component.

Does there exist an essential component  $b_i$  for which there does not exist a function  $f(\alpha)$ , satisfying  $f(\alpha) > 0$  for  $0 < \alpha < 1$ , so that if  $a_i$  has SCHNIRELMANN density  $\alpha$  the SCHNIRELMANN sum of the two sequences



has density  $\geq \alpha + f(\alpha)$ ? (I was recently informed by E. WIRSING that he proved in his unpublished dissertation 10 years ago that such an essential component does not exist).

P. ERDŐS: "On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers." *Acta Arithmetica* **1** (1936) 197–200.

U. V. LINNIK: "On Erdős's theorem on the addition of numerical sequences." *Mat. Sbornik* **10** (1942) 67–78, see also A. STÖHR and E. WIRSING: "Beispiele von wesentlichen Komponenten die keine Basen sind." *Journal reine und angewandte Math.* **196** (1956) 96–98.

14) ROMANOFF proved that for every integer  $a > 1$  the density of integers of the form  $p + a^k$  is positive ( $p$  runs through the primes). L. KÁLMÁR asked me a few years ago if for every  $A > 1$  the density of integers of the form  $p + [A^k]$  is  $> 0$ . The answer no doubt is affirmative, but I have not been able to prove it.

I proved that if  $g(n)$  denotes the number of solutions of  $p + 2^k = n$ , then  $\limsup g(n) = \infty$ , in fact  $g(n) > c \log \log n$  i. o. It seems that 105 is the largest integer  $n$  for which all the integers  $n - 2^k$ ,  $2 \leq 2^k < n$  are primes.

Let now  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$  be a sequence of integers satisfying  $A(x) > c \log x$ . Denote by  $g(n)$  the number of solutions of  $a_i + p = n$ . Is it true that  $\limsup g(n) = \infty$ ? Clearly analogous questions could be asked if the primes are replaced by other sequences.

N. P. ROMANOFF: »Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie.« *Math. Annalen* **109** (1934) 668–678.

P. ERDŐS: "On integers of the form  $2r + p$  and some related problems." *Summa Brasil. Math.* **2** (1947–51) 113–123.

15) Denote by  $A_2(x)$  the number of distinct integers not exceeding  $x$  which are of the form  $a_i + a_j$ . I conjectured that if  $\lim A(x)/x = 0$  then

$$(I.15.1) \quad \limsup A_2(x)/A(x) \geq 3.$$

It is easy to see that (I.15.1) holds with 2 instead of 3 and that if (I.15.1) is true it is best possible.

H. MANN: "A refinement of the fundamental theorem on the density of the sum of two sets of integers." *Pacific Journal of Math.* **10** (1960) 909–915.

16) ROTH conjectured that there exists an absolute constant  $c$  so that to every  $k$  there exists an  $n_0 = n_0(k)$  which has the following property: Let  $n > n_0$ , split the integers not exceeding  $n$  into  $k$  classes  $\{a_i^{(j)}\}$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Then the number of distinct integers not exceeding  $n$  which for some  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$  can be written in the form  $a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)}$  is greater than  $cn$ .

17) Let  $(a, b) = 1$ . I conjectured and BIRCH proved that every sufficiently large integer can be expressed as the sum of distinct integers of the form  $a^k b^l$ ,  $0 \leq k, l < \infty$ .

Let  $a_1 < a_2 < \dots$  be an infinite sequence satisfying  $a_{i+1}/a_i \rightarrow 1$ , I conjectured that if every arithmetic progression contains infinitely many integers which are the sum of distinct  $a$ 's then every sufficiently large integer is the sum of distinct  $a$ 's. This was disproved by CASSELS, who also proved a weaker sufficient condition that every integer should be the sum of distinct  $a$ 's.

CASSELS's beautiful work (which incidentally contains BIRCH's result as a special case) leads one to the following conjecture: Let  $a_1 < a_2 < \dots$

be an infinite sequence of integers satisfying

$$(I. 17.1) \quad A(2x) - A(x) \rightarrow \infty \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \alpha\} = \infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

where  $\{n\alpha\}$  is the distance of  $\alpha$  from the nearest integer. Then every sufficiently large integer is the sum of distinct  $a$ 's. CASSELS proved this under the assumption of ( $c$  sufficiently large)

$$(I. 17.2) \quad \frac{A(2x) - A(x)}{\log \log x} > C, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \alpha\}^2 = \infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

I conjectured that for every  $\beta$ ,  $1 < \beta < 2$  every sufficiently large integer is the sum of distinct integers of the form  $[\beta^k]$ . CASSELS observed that this fails to be true if  $[\beta^k]$  gets replaced by the nearest integer to  $\beta^k$ .

B. J. BIRCH: „Note on a problem of Erdős.” *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **55** (1959) 370–373.

J. W. S. CASSELS: „On the representation of integers as the sums of distinct summands taken from a fixed set.” *Acta Szeged* **21** (1960) 111–124.

18) Let  $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$  be  $n$  arbitrary integers. Denote by  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$  the other integers  $\leq 2n$ . Denote by  $M_k$  the number of solutions of  $a_i - b_j = k$ . Put

$$M = \min \max_{-2n \leq k < 2n} M_k$$

where the minimum is taken over all sequences  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

I proved  $M > \frac{n}{4}$ , SCHERK improved this to  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)n$  and SWIERCZKOWSKI proved  $\frac{4 - \sqrt{6}}{5}n$ .

MOSER proved in a very simple and ingenious way that

$$M > \frac{\sqrt{2}}{4}(n - 1)$$

and by more complicated arguments he can prove

$$M > \sqrt{4 - \sqrt{15}}(n - 1) > 0.3570(n - 1).$$

SELFIDGE MOTZKIN and RALSTON showed that  $M < \frac{2}{5}n$ , which disproved

my conjecture  $M = \frac{n}{2}$ . The problem of determining the exact value of  $M$  is open.

P. ERDŐS: “Some results in number theory.” (In Hebrew) *Riveon Lematematika* **9** (1955) 48.

S. SWIERCZKOWSKI: “On the intersection of a linear set with the translation of its complement.” *Coll. Math.* **5** (1957) 185–197.

L. MOSER: “On the minimal overlap problem of Erdős.” *Acta Arith.* **5** (1959) 117–119.



T. S. MOTZKIN, K. E. RALSTON and J. L. SELFIDGE: "Minimal overlap under translation." *Abstract. Bull. Amer. Math. Soc.* **62** (1956) 558.

Now I state various problems on different topics of number theory.  
19) Denote by  $r_k(n)$  the maximum number of integers not exceeding  $n$  which do not contain an arithmetical progression of  $k$  terms. The first publication on  $r_k(n)$  is due to TURÁN and myself where the conjecture  $r_k(n) < n^{1-\varepsilon_k}$  was enunciated (the problem may be older but I can not definitely trace it. SCHUR gave it to HILDEGARD ILLE around 1930).

SALEM and SPENCER disproved  $r_k(n) < n^{1-\varepsilon_k}$ . In fact they showed

$$(I. 19.1) \quad r_3(n) > n^{1-c/\log \log n}.$$

BEHREND improved this to

$$(I. 19.2) \quad r_3(n) > n^{1-c/\sqrt{\log n}}.$$

and MOSER constructed an infinite sequence which satisfies (I.19.2) for every  $n$ . ROTH proved  $r_3(n) = o(n)$ , more precisely he showed

$$(I. 19.3) \quad r_3(n) < cn/\log \log n.$$

For  $k > 3$  the plausible conjecture  $r_k(n) = o(n)$  is still open.

The inequality,  $r_k(n) < (1-\varepsilon)n/\log n$ ,  $1 \leq k < \infty$ ,  $n > n_0(k)$ , would imply that for every  $k$  there are  $k$  primes in an arithmetic progression. Recently W. A. GOLUBIEFF observed that  $23143 + l \cdot 30030$  is a prime for  $0 \leq l \leq 11$ . CHOWLA proved that there are infinitely many triplets of primes in an arithmetic progression.

VAN der WAERDEN proved that to every  $k$  there exists an  $f(k)$  so that if we split the integers  $\leq f(k)$  into two classes at least one of them contains an arithmetic progression of  $k$  terms. If we could show that for some  $n$

$r_k(n) < \frac{n}{2}$ , we clearly would have  $f(k) \leq n$ , and in fact this observation

led TURÁN and myself to the problem of estimating  $r_k(n)$ . VAN der WAERDEN's upper estimate for  $f(k)$  is very bad, and unfortunately nobody succeeded in

giving a better one. RADO and I proved that  $f(k) > ((k-1)2^k)^{1/2}$  (W. Schmidt just showed  $f(k) > 2^{k-ck^{1/2}\log k}$ , see *Am. Math. Soc. Notices* June 1961 p. 261.)

P. ERDŐS and P. TURÁN: „On some sequences of integers.” *Journal London Math. Soc.* **11** (1936). 261–264.

R. SALEM and D. C. SPENCER: “On sets of integers which contain no three terms in an arithmetic progression.” *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **28** (1942) 561–563.

F. A. BEHREND: “On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression.” *Ibid.* **32** (1946) 331–332.

L. MOSER: “On non-averaging set of integers.” *Canadian Journal of Math.* **5** (1953) 245–252.

S. CHOWLA: “There exists an infinity of 3-combinations of primes in A. P.,” *Proc. Lahore Philos. Soc.* **6** (1944) no. 2 15–16.

B. L. VAN DER WAERDEN: “Beweis einer Baudet'schen Vermutung.” *Nieuw Archief Wiskunde* (2) **15** (1928) 212–216.

P. ERDŐS and R. RADO: “Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set.” *Proc. London Math. Soc.* (3) **2** (1952) 438–439.

20) SCHUR proved that if we split the integers  $< en!$  into  $n$  classes the equation  $x + y = z$  is always solvable in integers of the same class.



Denote by  $f(n)$  the smallest integer with this property. It seems likely that  $f(n)$  is very much less than  $en!$ , in fact it has been conjectured that  $f(n) < c^n$  and  $f(n)^{1/n} \rightarrow C$ .

TURÁN proved (unpublished) that if one splits the integers  $n < k \leq 5n + 3$  into two classes then in at least one of them the equation  $x + y = z$ ,  $x \neq y$  is solvable, and that this is not true for  $n < k \leq 5n + 2$ . The analogous problem for three classes is not yet solved.

I. SCHUR: *Jahresbericht der Deutschen Math. Ver.* **25** (1916) 114.

R. RADO: "Studien zur Kombinatorik" *Math. Z.* **36** (1933) 424–480.

In his interesting paper Rado considers very much more general problems.

21) Let  $f(n)$  be an arbitrary number theoretic function which only assumes the values  $\pm 1$ . Is it true that to every  $c_1$  there exists a  $d$  and an  $m$  so that

$$(I. 21.1) \quad g(m, d) = \left| \sum_{k=1}^m f(kd) \right| > c_1 ?$$

It is perhaps even true that

$$(I. 21.2) \quad \max_{\substack{d, m \\ dm \leq n}} g(m, d) > c_2 \log n.$$

If we assume that  $f(a \cdot b) = f(a)f(b)$  then (I.21.1) would imply

$$(I. 21.3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n f(k) \right| = \infty.$$

This conjecture is similar to the conjecture of VAN DER CORPUT on the discrepancy of sequences. Let  $|z_k| = 1$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ . Denote by  $N(n; a, b)$  the number of  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  on the arc  $(a, b)$ . The discrepancy  $D(z_1, z_2, \dots, z_n)$  is defined as follows:

$$D(z_1, z_2, \dots, z_n) = \max \left| N(n; a, b) - \frac{b-a}{2\pi} n \right|,$$

where the maximum is taken over all the arcs  $(a, b)$  of the unit circle.

VAN DER CORPUT conjectured and Mrs. VAN AARDENNE—EHRENFEST proved that for every infinite sequence  $z_i$ ;  $1 \leq i \leq \infty$ ,  $|z_i| = 1$

$$(I. 21.4) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} D(z_1, z_2, \dots, z_n) = \infty.$$

(in fact she proved that  $D(z_1, z_2, \dots, z_n) > c \log \log n / \log \log \log n$  i. o.). ROTH proved that i. o.

$$(I. 21.5) \quad D(z_1, z_2, \dots, z_n) > c_1 (\log n)^{1/2}.$$

It is easy to see that there exists an infinite sequence for which

$$D(z_1, z_2, \dots, z_n) < c_2 \log n$$

for every  $n$  and it seems possible that in (I.21.5)  $c_1 (\log n)^{1/2}$  can be replaced by  $c_3 \log n$ .

As far as I know the following two problems are still unsolved: Let  $|z_i| = 1$ ,  $1 \leq i < \infty$  be any infinite sequence. Does there exist a fixed arc  $(a, b)$  of the unit circle so that

$$(I. 21.6) \quad \limsup \left| N(n; a, b) - \frac{b-a}{2\pi} n \right| = \infty?$$

Is it true that

$$(I. 21.7) \quad \limsup_{n=\infty} \max_{|z|=1} \prod_{i=1}^n |z - z_i| = \infty?$$

If (I.21.7) and (I.21.6) hold one could try to determine how fast the left sides tend to infinity.

N. G. TCHUDAKOFF, quoted in problem 6.

VAN AARDENNE—EHRENFEST: "On the impossibility of a just distribution." *Indag. Math.* **11** (1949) 264–269.

K. F. ROTH: "On irregularities of distribution." *Matematika* **1** (1954) 73–79.

22) Let  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  be  $n$  arbitrary integers. Denote:

$$M(a_1, \dots, a_n) = \max_{|z|=1} \left| \prod_{i=1}^n (1 - z^{a_i}) \right|, f(n) = \min M(a_1, \dots, a_n)$$

where the minimum is to be taken over all sequences  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . SZEKERES and I proved that

$$I.22.1) \quad \lim f(n)^{1/n} = 1, f(n) > \sqrt{2n}.$$

Recently I proved (unpublished) that for some  $c_1 > 0$

$$(I.22.2) \quad f(n) < \exp(n^{1-c_1}).$$

It is quite possible that for some  $c_2$   $f(n) > \exp(n^{1-c_2})$ , but we were not even able to prove that  $f(n) > n^k$  for every  $k$  if  $n > n_0(k)$ .

My proof of (I.22.2) used probabilistic arguments. Very recently ATKINSON proved  $f(n) > \exp(cn^{1/2} \log n)$  in a surprisingly simple way, in fact he proved that

$$\max_{|z|=1} \left| \prod_{k=1}^n (1 - z^k)^{n-k+1} \right| < \exp(cn \log n).$$

P. ERDŐS and G. SZEKERES: "On the product  $\prod_{k=1}^n (1 - Z^{a_k})$ ." *Acad. Serbe des Sci.* **13** (1959). 29–34.

F. V. ATKINSON: "On a problem of Erdős and Szekeres". *Can. Math. Bull.* **4** (1961) 7–12.

23) Denote by  $f(k)$  the minimum number of terms in the square of a polynomial  $\sum_{i=1}^k a_i z^{n_i}$ . Sharpening a result of RÉNYI and RÉDEI I proved that  $f(k) < k^{1-c}$  for a suitable  $c > 0$ . RÉNYI and I conjectured that  $f(k) \rightarrow \infty$  as  $k \rightarrow \infty$ . This seems most plausible, but we have not yet been able to prove it.

A. RÉNYI, *Hungarica Acta Math.* **1** (1947) 30–34.

P. ERDŐS: "On the number of terms of the square of a polynomial." *Nieuw Arch. Wiskunde* (1949). 63–65.

W. VERDENIUS: "On the number of terms of the square and cube of polynomials." *Indag. Math.* **11** (1949) 459–465.

24) Does there exist to every  $c$  a system of congruences

$$(I.24.1) \quad a_i \pmod{n_i}, \quad c < n_1 < n_2 < \dots < n_k \quad (k = k(c))$$

so that every integer satisfies at least one of them? DEAN SWIFT and SELF-RIDGE constructed such congruences for  $c < 8$ .

Similarly one can ask if a system (I.24.1) exists where all the  $n_i$  are  $> 1$  and odd (or not divisible by the first  $r$  primes)?

STEIN and I asked the following question: What is the maximum number of congruences  $a_i \pmod{n_i}$ ,  $n_1 < n_2 < \dots < n_{k_x} \leq x$  so that no integer should satisfy two of them (i. e. the arithmetic progressions  $a_i + ln_i$ ,  $1 \leq i \leq k_x$  should be disjoint). We proved (unpublished)  $k_x > x^{1-\varepsilon}$  for every  $\varepsilon > 0$  if  $x > x_0(\varepsilon)$ . We conjecture  $k_x = o(x)$ .

P. ERDŐS: "On a problem on systems of congruences". (In Hungarian) *Matematikai Lapok* **4** (1952) 122–128.

25) Let  $1 < a_1 < a_2 < \dots$  be an infinite sequence of real numbers satisfying

$$(I.25.1) \quad |ka_i - a_j| \geq 1$$

for every  $k$  and  $i \neq j$ . Is it then true that

$$(I.25.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i} = 0,$$

and

$$(I.25.3) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i \log a_i} < \infty?$$

If the  $a$ 's are integers (I.25.1) means that no  $a$  divides any other, in this case (I.25.2) was proved by BEHREND and (I.25.3) by me.

F. BEHREND: "On sequences of numbers not divisible one by another." *London Math. Soc. Journal* **10** (1935) 42–45.

P. ERDŐS: "Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other." *Ibid.* 126–128.

26) Let  $a_1 < a_2 < \dots$  be an infinite sequence of integers, denote by  $b_1 < b_2 < \dots$  the sequence of integers no one of which is a multiple of any of the  $a$ 's. BESICOVITCH constructed a sequence  $a_i$  for which the  $b$ 's do not have a density. DAVENPORT and I proved that the  $b$ 's always have a logarithmic density, i. e. that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{b_i < x} \frac{1}{b_i}$$

always exists.



Make correspond to each  $a_i$  a set of residues  $u_j^{(i)}$ ,  $1 \leq j \leq i_r$ . Denote now by  $b_1 < b_2 < \dots$  the integers which do not satisfy for any  $i$

$$(I. 26.1) \quad b \equiv u_j^{(i)} (\text{mod } a_i), \quad 1 \leq j \leq i_r, \quad b \geq a_i.$$

Is it then true that

$$(I. 26.2) \quad \lim \frac{1}{\log x} \sum_{b_i < x} \frac{1}{b_i}$$

exists? (I.26.2) if true is a generalization of (I.26.1), ( $i_r = 1$ ,  $u_1^{(i)} = 0$  for all  $i$ ).

DAVENPORT and I also proved that if  $a_1, a_2, \dots$  is a sequence of positive density, we can select an infinite subsequence  $a_{i_k}$  ( $1 \leq k < \infty$ ) satisfying  $a_{i_k} | a_{i_{k+1}}$ . It is an open problem if three distinct  $a$ 's exist satisfying  $[a_i, a_j] = a_l$ .

A. S. BESICOVITCH: "On the density of certain sequences of integers." *Math. Annalen* **110** (1934) 336–341.

H. DAVENPORT and P. ERDŐS: "On sequences of positive integers." *Acta Arithmetica* **2** (1937) 147–151, see also *Indian Journal of Math.* **15** (1951) 19–24.

P. ERDŐS: "Density of some sequences of integers." *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1948) 685–692.

27) Is it true that the density of integers having two divisors  $d_1$  and  $d_2$  for which  $d_1 < d_2 < 2d_1$  is 1? In my paper just quoted in 26) I prove that this density exists, but I can not show that it is 1.

Let  $a_1 < a_2 < \dots \leq n$  be any sequence of integers,  $b_1 < b_2 < \dots$  the integers no one of which is a multiple of any  $a$ .  $B(x) = \sum_{b_i \leq x} 1$ . Is it true that for every  $m > n$

$$(I. 27.1) \quad \frac{B(m)}{m} < \frac{2 B(n)}{n} ?$$

It is easy to see that in (I.27.1) 2 can not be replaced by any smaller constant, to see this let the  $a$ 's consist of  $a_1$ ,  $n = 2a_1 - 1$ ,  $m = 2a_1$ .

28) BAMBAH and CHOWLA proved that for sufficiently large  $C$  the interval  $(n, n + Cn^{1/4})$  always contains an integer of the form  $x^2 + y^2$ . It has been often conjectured but never proved that this holds every  $C$  if  $n > n_0(C)$ . In fact it seems likely that for every  $\varepsilon > 0$  the interval  $(n, n + n^\varepsilon)$  contains an integer of the form  $x^2 + y^2$ . I proved that for a suitable  $c > 0$  and infinitely many  $n$  the interval  $(n, n + c \log n / (\log \log n)^{1/2})$  does not contain any integers of the form  $x^2 + y^2$ .

Denote by  $s_1, s_2, \dots$  the squarefree integers. It is easy to prove (I do not know who did it first) that i. o.

$$(I. 28.1) \quad s_{i+1} - s_i > (1 + o(1)) \pi^2 / 6 \log s_i / \log \log s_i.$$

The question if  $(1 + o(1))$  in (I.28.1) can be replaced by  $1 + c$  has not yet been decided. I proved that

$$(I. 28.2) \quad \lim \frac{1}{n} \sum_{s_i < n} (s_{i+1} - s_i)^2$$

exists. More generally one could ask the following question: Let  $a_1 < a_2 < \dots$  be any sequence of integers satisfying  $a_k/k^2 \rightarrow \infty$  and denote by  $b_1 < b_2 < \dots$  the sequence of integers no one of which is a multiple of any of the  $a_i$ 's. Is it then true that

$$(I. 28.3) \quad \lim \frac{1}{n} \sum_{b_i < n} (b_{i+1} - b_i)^2$$

exists and is finite (in (I.28.2)  $a_i = p_i^2$ )? It is easy to see that if we only require  $a_k < ck^2$  then (I.28.3) does not hold in general.

R. P. BAMBAH and S. CHOWLA: "On numbers which can be expressed as a sum of two squares." *Proc. Nat. Inst. Sci. India* **13** (1947) 101–103.

P. ERDŐS: "Some problems and results in elementary number theory." *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951–52) 103–109.

As far as I know the best upper bound for  $s_{i+1} - s_i$  is due to RICHERT, who improved a previous result of K. F. ROTH. RICHERT proved  $s_{i+1} - s_i < c s_i^{2/9} \log s_i$ .

H. E. RICHERT: "On the difference between consecutive squarefree numbers." *London math. Soc. Journal* **29** (1954) 16–20.

29) Denote by  $A(n)$  the number of integers not exceeding  $n$  which are the product of two integers not exceeding  $n^{1/2}$ . I proved that for every  $\varepsilon > 0$  if  $n > n_0(\varepsilon)$

$$(I. 29.1) \quad (\log n)^{-\varepsilon} \frac{n}{\log n} (e \log 2)^{\log \log n / \log 2} < A(n) < (\log n)^{\varepsilon} \frac{n}{\log n} (e \log 2)^{\log \log n / \log 2}.$$

Let  $a_1 < a_2 < \dots < a_x < \sqrt{n}$ ;  $b_1 < b_2 < \dots < b_y < \sqrt{n}$  be two sequences of integers so that all the products  $a_i b_j$  are distinct. Is it then true that  $xy < c \frac{n}{\log n}$ ? This if true is certainly best possible, to see this choose the

$a$ 's to be the integers not exceeding  $\frac{1}{2} n^{1/2}$  and the  $b$ 's the primes in  $\left(\frac{1}{2} n^{1/2}, n^{1/2}\right)$ .

P. ERDŐS: „Об одном асимптотическом неравенстве в теории чисел.” *Вестник Ленинградского университета* **3** (1960) 41–49; for a weaker result see P. ERDŐS: „Some remarks in number theory” (In Hebrew.) *Riveon Lematematika* (1955) 45–48.

30) Let  $f(n)$  be an additive function, i. e.  $f(ab) = f(a) + f(b)$  if  $(a, b) = 1$ . Assume that  $|f(n+1) - f(n)| < c_1$ . Is it true that  $f(n) = c_2 \log n + g(n)$ , where  $|g(n)| < c_3$ . I proved that if  $f(n+1) - f(n) \rightarrow 0$  or if  $f(n+1) \geq f(n)$  then  $f(n) = c \log n$ .

P. ERDŐS: "On the distribution function of additive functions." *Annals of Math.* **47** (1946) 1–20. My proofs of the above theorems were unnecessarily complicated and have been simplified by various authors.

Many interesting problems and results on additive functions can be found in the following three papers:

M. КАС: "Probability methods in some problems of analysis and number theory." *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 641–665.

KUBILJUS, *Uspehi Matem. Nauk.* **11** (1956) 31–66.

P. ERDŐS, *Proc. International Congress of Math. Amsterdam* (1954) Vol. **3**, 13–19.



31) The following problem is due to W. LE VEQUE: Let  $a_1 < a_2 < \dots$  be an infinite sequence tending to infinity satisfying  $a_{i+1}/a_i \rightarrow 1$ . Let  $a_i \leq x_n < a_{i+1}$ , put  $y_n = \frac{x_n - a_i}{a_{i+1} - a_i}$ ,  $0 \leq y_n < 1$ . We say that the sequence  $x_n$ ,  $1 \leq n < \infty$  is uniformly distributed mod  $a_1, a_2, \dots$  if  $y_n$ ,  $1 \leq n < \infty$  is uniformly distributed. Is it true that for almost all  $\alpha$  the sequence  $n\alpha$ ,  $1 \leq n < \infty$  is uniformly distributed mod  $a_1, a_2, \dots$ ? LE VEQUE proved this in some special cases.

W. J. LE VEQUE: "On uniform distribution modulo a subdivision." *Pacific J. of Math.* **3** (1953) 757-771.

32) STRAUS and I conjectured that for every integer  $n > 1$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

is solvable in positive integers  $x, y, z$ . SCHINZEL conjectured that for every  $a > 0$  if  $n > n_0(a)$   $\frac{a}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  is solvable in positive integers  $x, y, z$ .

SCHINZEL conjectured that there exists a  $k$  so that every sufficiently large integer can be written in the form  $(a_i \text{ are integers})$

$$\prod_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^k a_i, \quad a_i \geq 2, \quad 1 \leq i \leq k.$$

33) Problem of SELFRIDGE and STRAUS. Let  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  be  $n$  complex numbers,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\binom{n}{k}}$  are the products of  $Z$ 's taken  $k$  at a time. The authors prove that if  $k = 2$ ,  $n \neq 2^l$  and the  $\sigma$ 's are given, there can be at most one set of  $Z_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  which generate them. For  $n = 2^l$  this is not true, here they conjecture that there can be at most two sets of  $Z$ 's which generate the  $\sigma$ 's.

If  $k > 2$  they conjecture the  $Z$ 's (if they exist) are determined uniquely by the  $\sigma$ 's and they prove this in many cases, but the general problem is unsolved.

J. L. SELFRIDGE and E. Straus: "On the determination of numbers by their sums of a fixed order." *Pacific Journal of Math.* **8** (1958). 847-856.

34) Problem of LITTLEWOOD. Let  $\alpha$  and  $\beta$  be two real numbers. Is it true that

$$(I. 34.1) \quad \liminf n(n\alpha)(n\beta) = 0$$

where  $(n\alpha)$  denotes the distance of  $n\alpha$  from the nearest integer? (I.34.1) is trivial except if both  $\alpha$  and  $\beta$  have bounded partial quotients in their continued fraction development. (I.34.1) seems very deep, even if  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\beta = \sqrt{3}$  say.

Another very difficult problem in the theory of diophantine approximation is the following one: DAVENPORT and HEILBRONN proved the inequality

$$(I. 34.2) \quad \left| \sum_{k=1}^5 a_k n_k^2 \right| < \varepsilon$$



is solvable for every  $\varepsilon > 0$  in positive integers  $n_k$  if not all the  $\alpha_k$  are of the same sign and at least two of them have irrational ratios.

It is not known if for every irrational  $\alpha$  and  $\varepsilon > 0$  the inequalities

$$|(x^2 + y^2)\alpha - z^2| < \varepsilon \quad \text{and} \quad |x^2 + y^2 - z^2\alpha| < \varepsilon$$

are solvable in integers. The case  $\alpha = \sqrt{2}$  is also undecided.

H. DAVENPORT and H. HEILBRONN: "On indefinite quadratic forms in five variables," *London Math. Soc. Journal* **21** (1946) 185—193.

Several unsolved arithmetical problems are stated in a recent paper of SIERPINSKI *L'Enseignement Mathématique* 5 (1960) 221—235, an English version appeared in *Scripta Math.* 25 (1960) 125—136.

## II. Problems in combinatorial analysis and set theory

1) Let  $a_1, a_2, \dots, a_k$  be  $n$  elements.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  are  $k$  sets formed from the  $a$ 's so that no  $A$  can contain any other. SPERNER proved that

$$(II.1.1) \quad \max k = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

(II.1.1) has several applications in number theory, e. g. BEHREND's result (I.25.1) is proved by using (II.1.1).

The question has been considered that in how many ways can one select sets  $A_i$  so that no  $A$  should contain any other. Denote this number by  $A(n)$ . From (II.1.1) we have

$$2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} < A(n) < \binom{2^n}{T_n}, \quad \text{where } T_n = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

It seems that  $A(n) < \exp(c T_n)$ , perhaps  $c$  can be chosen to be  $(1 + \varepsilon) \log 2$  for every  $\varepsilon > 0$  if  $n > n_0(\varepsilon)$ .

How many sets  $A_1, A_2, \dots, A_l$  can one give so that the union of two of them never equals a third? (all three sets are supposed to be distinct i. e.  $A_i \subset A_j$ ,  $A_i \cup A_j = A_j$  is not permitted). I conjectured for a long time that  $l = o(2^n)$ . If I could prove this the following result in number theory would follow: Let  $a_1 < a_2 < \dots$  be an infinite sequence of positive density, then there are infinitely many triplets of distinct integers  $a_i, a_j, a_k$  satisfying  $[a_i, a_j] = a_k$  (see problem I 26).

It is possible that  $l < (1 + o(1)) T_n$ .

Several other problems can be asked e. g. How many sets can one give so that the union of any two of them never contains a third? How many sets

$A_i$  can one give so that the symmetric difference of any two sets should contain at least  $r$  elements?

E. SPERNER: »Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge.« *Math. Zeitschrift* **27** (1928) 544—548.

2) As far as I know R. PELTESOHN and SUTHERLAND (unpublished) were the first to construct an infinite sequence formed from the symbols 0, 1, 2 where no two consecutive blocks were identical. It is easy to see that in a sequence of length four formed from the symbols 0 and 1 two consecutive blocks will be identical, I understand that EUWE proved that in an infinite sequence formed from 0 and 1 there will be arbitrarily large identical consecutive blocks, but that there do not have to be three consecutive identical blocks.

Let us now call two consecutive blocks „identical” if each symbol occurs the same number of times in both of them (i.e. we disregard order). I conjectured that in a sequence of length  $2^k - 1$  formed from  $k$  symbols there must be two “identical” blocks. This is true for  $k \leq 3$ , but for  $k = 4$  de BRUIJN and I disproved it and perhaps an infinite sequence of four symbols can be formed without consecutive “identical” blocks.

3) LITTLEWOOD and OFFORD proved the following result: Let  $Z_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  be  $n$  complex numbers. Then there exists an absolute constant  $c$  so that the number of sums

$$(II. 3.1) \quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Z_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

which fall into the interior of an arbitrary circle of radius 1 is less than  $c \frac{2^n \log n}{n^{1/2}}$ . I proved that if  $Z_i \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  (i. e. the  $Z_i$ 's are real) then

the number of sums (II.3.1) which fall into the interior of any interval of length two is at most  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  and this estimation is best possible. The proof

uses the theorem of SPERNER (see problem II.1.). I do not know if this inequality remains true if the  $Z_i$  are complex numbers (my proof gives for complex  $z$   $c 2^n / \sqrt{n}$ ), or more generally vectors of Hilbert space of norm  $\geq 1$ . In this case I can only prove that the number of summands (II.3.1) falling into an arbitrary unit sphere is  $o(2^n)$ .

J. E. LITTLEWOOD and C. OFFORD, *Mat. Sbornik*. **12** (1943) 277—285.

P. ERDŐS: “On a Lemma of Littlewood and Offord.” *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 898—902.

4) RAMSAY proved that there exists a function  $f(i, k, l)$  so that if we split the  $i$ -tuples of a set of  $f(i, k, l)$  elements into two classes then either there are  $k$  elements all whose  $i$ -tuples are in the first class or  $l$  elements all whose  $i$ -tuples are in the second class. SZEKERES and I proved that

$$(II. 4.1) \quad 2^{k^2} < f(2, k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1}; \quad f(2, k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

The best estimation for  $f(i, k, k)$ ,  $i > 2$  is due to RADO and myself.



It would be interesting to determine  $f(i, k, l)$  explicitly, this seems very difficult even for  $i = 2$ . I have not even been able to prove that  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(2, k, k)^{1/k}$  exists. I can prove that

$$(II. 4.2) \quad f(2, 3, k) > ck^2/(\log k)^2$$

but could not decide whether  $f(2, 3, k) > c_2 k^2$  is true.

I do not wish to mention here the many problems connected with the generalisations of RAMSAY's theorem to cardinal and ordinal numbers and just state one of the simplest unsolved problems in this subject.

Let  $\varphi$  be a well ordered set of ordinal number  $\omega^\alpha$ ,  $\alpha < \Omega$ . Split the pairs  $a \in \varphi$ ,  $b \in \varphi$  into two classes so that there is no triplet all whose pairs are in the first class. Does there then exist a set  $\varphi' \subset \varphi$  of type  $\omega^\alpha$  all whose pairs are in the second class?

For  $\alpha = 2$  this was proved by SPECKER, for  $2 < \alpha < \omega$  it was disproved by him, for  $\alpha \geq \omega$  the problem is open. The most interesting unsolved case is  $\alpha = \omega$ .

E. P. RAMSAY: "On a problem of formal logic." Collected papers, 82–111. See also T. H. SKOLEM: »Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem.« *Fund. Math.* **20** (1933) 254–261.

P. ERDŐS and G. SZEKERES: "A Combinatorial Problem in geometry." *Compositio Math.* **2** (1935) 463–470.

P. ERDŐS: "Remarks on a theorem of Ramsay." *Bull. Res. Council. Israel* (1957) 21–24. See also "Graph theory and probability." *Can. Journal of Math.* I and II, **11** (1959) 34–38, **13** (1961) 346–352.

E. SPECKER: »Teilmengen von Mengen mit Relationen.« *Comm. Math. Helv.* **31** (1956–57) 302–314.

P. ERDŐS and R. RADO: „A partition calculus in set theory." *Bull. Amer. Math. Soc.* **62** (1956) 427–489. (See also the forthcoming triple paper of ERDŐS–HAJNAL–RADO.)

5) Let  $a_1, a_2, \dots, a_n$  be  $n$  elements  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ,  $k > 1$  sets whose elements are the  $a$ 's. Assume that each pair  $(a_i, a_j)$  is contained in one and only one  $A$ . Then  $k \geq n$ . This is a result of de BRUIJN and myself (also proved by SZEKERES and HANANI). We can not determine the smallest  $l$  so that there should exist sets  $A_1, A_2, \dots, A_l$ ,  $l > 1$  so that every triplet  $(a_i, a_j, a_r)$  is contained in one and only one  $A$ .

N. G. DE BRUIJN and P. ERDŐS: "On a combinatorial problem." *Ind. Math.* (1948) 421–423.

C. STEINER conjectured that if  $n = 6k + 1$  or  $6k + 3$  there exists a system of triplets of  $n$  elements so that every pair is contained in one and only one triplet (if  $n$  is not of the above form it is easy to see that such a system can not exist). STEINER's conjecture was first proved by REISS and later independently by MOORE.

Let now  $2 \leq r < s$  be any two integers. For which  $n$  is there a system of combinations taken  $s$  at a time formed from  $n$  elements so that all  $r$  tuples should be contained in one and only one  $s$  tuple. The case  $r = 2$ ,  $s = 3$  is STEINER's. The only other case which has been settled is  $r = 3$ ,  $s = 4$  H. HANANI recently proved that such a system exists if and only if  $n \equiv 2$  or  $4 \pmod{6}$ . (Very recently HANANI settled the cases  $r = 2$ ,  $s = 4$  and  $r = 2$ ,  $s = 5$ ).

It has been known for a long time that if  $n = p^{2l} + p^l + 1$  ( $p$  prime),  $r = 2$ ,  $s = p^l + 1$ , then there exist  $n$   $(p^l + 1)$ -tuples so that every pair is contained in one and only one  $(p^l + 1)$ -tuple. If  $n = k^2 + k + 1$ ,  $k \neq p^a$



it has been conjectured that such a system of  $(k+1)$ -tuplets does not exist. Special cases of this conjecture have been proved by BRUCK and RYSER, the first unsettled case is  $k=10$  (see I.10).

Connected with this problem is the following conjecture of SYLVESTER: For every  $n \equiv 0 \pmod{4}$  there exists an orthogonal matrix of order  $n$  all whose elements are  $\pm 1$  (it is easy to see that if  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$  such a matrix does not exist.) If  $n=2^k$  SYLVESTER showed that such a matrix exists, if  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . PALEY proved that such a matrix exists for  $p+1$ , the general case is still unsolved.

Denote by  $M_n$  the maximum value of an  $n$  by  $n$  determinant whose elements are  $\pm 1$ . From HADAMARD's theorem it follows that  $M_n \leq n^{n/2}$  and if a SYLVESTER matrix exists  $M_n = n^{n/2}$ . It follows easily from the prime number theorem for arithmetic progressions that for every  $n > n_0(\varepsilon)$

$$(II.6.1) \quad M_n > (1-\varepsilon)^n n^{n/2}.$$

COLUCCI and BARBA proved that if  $n \not\equiv 0 \pmod{4}$  then

$$(II.6.2) \quad M_n < (2n-1)^{1/2} (n-1)^{(n-1)/2} = (1+o(1)) \left(\frac{2}{e}\right)^{1/2} n^{n/2}.$$

M. REISS: »Über eine Steinersche kombinatorische Aufgabe.« *J. reine und angewandte Math.* **56** (1859) 326–344.

E. H. MOORE: "Concerning triple systems." *Math. Annalen* **43** (1893) 271–285. See also „Practical memoranda." *Amer. J. Math.* **18** (1896) 264–303.

H. HANANI: "On quadruple systems." *Can. J. Math.* **12** (1960) 145–157.

J. H. SYLVESTER: "Thoughts on inverse orthogonal matrices." *Phil. Mag.* (4) **24** (1867) 461–475.

R. E. A. C. PALEY: "On orthogonal matrices." *Journal of Math. and Phys* (1933) 311–320.

COLUCCI: «Sui valori massimi dei determinanti ad elementi  $\pm 1$ .» *Gior. di Matem. di Battaglini* **54**. See also G. BARBA *ibid.* 71.

See also G. SZEKERES and P. TURÁN: „An extremal problem in the theory of determinants." (In Hungarian, German summary) *Sitzungsber. III. Klasse Ung. Akad.* **54** (1937) 796–806.

7) Problem of VAN der WAERDEN: Let  $|a_{i,k}|$  be an  $n$  by  $n$  doubly stochastic matrix (i. e.  $a_{i,k} \geq 0$  and  $\sum_{i=1}^n a_{i,k} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$  for every  $i$  and  $k$ ).

Then the value of the permanent is  $\geq \frac{n!}{n^n}$ , equality only for  $a_{i,k} = \frac{1}{n}$ . The permanent (a terminology of SYLVESTER) is the sum of the expansion terms of the determinant. The fact that the permanent of a doubly stochastic matrix can not be 0 is a theorem of FROBENIUS—KÖNIG. VAN der WAERDEN's problem seems to be difficult.

I made the following two weaker conjectures: The value of at least one term of the permanent is  $\geq \frac{1}{n^n}$ , and the still weaker one: There is at least one non-zero expansion term of the permanent where the sum the factors is  $\geq 1$ . This was proved by R. REE and S. MARCUS (in fact they prove

that the sum is  $\geq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{i,k}^2$ ).

R. REE and S. MARCUS: „Diagonals of doubly stochastic matrices.” *Quarterly Journal of Math.* **10** (1959) 296–301.

8) A special case of a theorem of TURÁN states that if in a graph of  $n$  vertices the number of edges is greater than  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)$ , then the graph always contains a triangle. He points out that the following analogous problem is unsolved: Let there be given  $n$  elements what is the smallest number  $f(n)$  so that to every system  $\varphi$  of  $f(n)$  triplets formed from the  $n$  elements there are always four elements all four triplets of which occur in  $\varphi$ .

P. TURÁN: “On the theory of graphs.” *Coll. Math.* **3** (1954) 19–30.

D. KÖNIG: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*.

9) HAJNAL and I proved the following theorem: To every real  $x$  make correspond a bounded set of real numbers  $f(x)$  whose outer measure is less than 1. Then for every finite  $k$  there exists an independent set of  $k$  elements (i. e. a set  $x_1, x_2, \dots, x_k$  so that for every  $1 \leq i, j \leq k, i \neq j, x_i \notin f(x_j)$ ). We can not prove that there always exists an infinite independent set (not even if we also assume that the sets  $f(x)$  are compact.)

If we assume that the sets  $f(x)$  are closed and of measure  $< 1$ , we can not even prove that there are two independent points. (Recently GLADYSZ proved in a very ingenious way the existence of two independent points. The existence of an independent triplet is open).

P. ERDŐS and A. HAJNAL: „Some remarks on set theory, VIII.” *Michigan Math Journal* **7** (1960) 187–191, for further problems in this direction see P. ERDŐS and A. HAJNAL: “On the structure of set mappings. *Acta Math. Hung.* **9** (1958) 111–131. and P. ERDŐS: “Some remarks on set theory.” **3** (1953) 51–57.

### III. Problems in elementary geometry

1) Let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  be  $n$  points in the plane. Denote by  $M_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  the number of distinct distances between any two of the points. Put

$$f(n) = \min M_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

where  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ranges over all sets of  $n$  distinct points of the plane. It seems to be difficult to get a good estimate for  $f(n)$ , the best results (due to MOSER and myself are)

$$(III. 1.) \quad c_1 n^{2/3} < f(n) < c_2 n / \sqrt{\log n}.$$

I would guess that the upper bound is the right one and perhaps even the following result holds: There is one point  $x_i$  so that amongst the distances  $(x_j, x_i)$  there are at least  $c_3 n / \sqrt{\log n}$  distinct ones.

If the set  $x_1, x_2, \dots, x_n$  is convex it seems that  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ; despite its seeming simplicity I have not been able to prove this. A somewhat stronger conjecture is: In every convex polygon there is a vertex which has no three vertices equidistant from it.

How often can the same distance occur between  $n$  points of the plane? Denote this maximum by  $g(n)$ . I proved

$$n^{1+c/\log \log n} < g(n) < n^{3/2}.$$

I believe that the lower bound is close to being the correct one.



COXETER asked me how many points does one have to have in  $n$ -dimensional space so that one should be sure to have more than two distinct distances between them. I stated that for  $c_5$  sufficiently large  $n^{c_5}$  points suffice, but my proof was wrong and if corrected it only gave  $\exp(n^{1-\epsilon})$ .

One can show that from 7 points in the plane one can always find three of them which do not determine an isosceles triangle, it is easy to see that this is false for 6 points. How many points does one have to have in  $n$ -dimensional space to be sure that one can find three of them which do not determine an isosceles triangle? This is not even known for  $n = 3$ .

P. ERDŐS: "On sets of distances of  $n$  points." *Amer. Math. Monthly*, **54** (1946) 248–250.

L. MOSER: "On the different distances determined by  $n$  points." *Ibid.* **59** (1952) 85–91.

P. ERDŐS: "On some problems in geometry." (In Hungarian) *Mat. Lapok* (1954) 86–92. Many further problems are stated in this paper.

2) BLUMENTHAL's problem. Let there be given  $n$  points in the plane, denote by  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  the largest angle ( $\leq \pi$ ) determined by the  $n$  points, and define

$$\alpha_n = \inf A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

where the minimum is taken over all sets of  $n$  points. SZEKERES proved that  $\alpha_{2^n+1} > \pi \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2^n+1)^2}\right)$  and that for every  $\epsilon > 0$ ,  $2^n$  points can be given with  $A(x_1, x_2, \dots, x_{2^n}) > \pi \left(1 - \frac{1}{n} + \epsilon\right)$  (this implies  $\alpha_{2^n} \leq \pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ).

SZEKERES and I recently proved that  $\alpha_{2^n} = \pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  and in fact for every  $2^n$  points  $A(x_1, x_2, \dots, x_{2^n}) > \pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , we also showed  $\alpha_{2^n-1} = \pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

Let there be given  $2^n + 1$  points in  $n$  dimensional space. I conjectured that there are always three of them which determine an angle  $> \frac{\pi}{2}$ . This is trivial for  $n = 2$ , for  $n = 3$  it was proved by (unpublished) N. H. KAIPER and A. H. BOERDIJK. For  $n > 3$  the problem is open. (Recently this conjecture was proved by L. DANZER and G. GRÜNBAUM in a simple and ingenious way.)

G. SZEKERES: "On an extremum problem in the plane." *Amer. Journal of Math.* **53** (1941) 208–210. Our paper with SZEKERES will appear in the *Annales of the Univ. of Budapest* **3** (1961).

3) BORSUK's problem. Is it true that every set of diameter one in  $n$  dimensional space is the union of  $n + 1$  sets of diameter  $< 1$ ? This is trivial for  $n = 1$ , easy for  $n = 2$ . For  $n = 3$  it was first proved by Eggleston and later simultaneously and independently GRÜNBAUM and HEPPES found a considerably simpler proof. The problem is open for  $n > 3$ .

BORSUK and ULAM proved that the  $n$  dimensional sphere is not the union of  $n$  sets of smaller diameter.



K. BORSUK: »Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre.« *Fundamenta Math.* **20** (1933) 177–190.

H. G. EGGLESTON: "Covering a three dimensional set with sets of smaller diameter." *Journal of Lond. Math. Soc.* **30** (1955) 11–24.

B. GRÜNBAUM: „A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions." *Proc. of Cambridge Phil. Soc.* **53** (1957) 776–778.

A. HEPPES—P. RÉVÉSZ: »Zum Borsukschen Zerteilungsproblem." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 159–162.

A. HEPPES: „Térbeli pontthalmazok felosztása kisebb ármérőjű részhalmazok összegére." *MTA III. Oszk. Közl.* **7** (1957) 413–416.

H. HADWIGER: »Über die Zerstückung eines Eikörpers.« *Math. Zeitschr.* **51** (1949) 161–165.

H. LENZ: "Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers." *Arch. Math.* **6** (1955) 413–416.

4) SYLVESTER conjectured and GALLAI first proved that if we have  $n$  points, not all on a line then there is at least one line which goes through exactly two of the points. Denote by  $G_n$  the minimum number of such lines, de BRUIJN and I conjectured that  $G_n \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$ . This was proved by MOTZKIN (his paper contains many more problems and results in this direction). MOSER and KELLY proved that  $G_n \geq \left\lfloor \frac{3n}{7} \right\rfloor$  and this is best possible for  $n = 7$ . For  $n > n_0$  perhaps  $G_n = n - 1$ . For large  $n$  perhaps there always is a triangle all whose lines goes through only two of our points (except if  $n-1$  of them are on a line).

SYLVESTER asked: Let there be given  $n$  points no four on a line. What is the maximum number of lines which goes through three of them? He proved that this maximum is greater than  $\frac{1}{3} \binom{n}{2} - cn$  on the other hand the maximum

$$\text{is } < \frac{1}{3} \binom{n}{2}.$$

Let there be given  $n$  points not all on a line I observed that it easily follows from GALLAI's result that these points determine at least  $n$  lines (see also II.5). G. DIRAC conjectured that there always exists a point which is connected with the other points by more than  $cn$  lines.

Let there be given  $n$  points not all on a circle. What is the minimum number of circles these points determine? This problem is unsolved (see also II.5).

T. H. MOTZKIN: "The lines and planes connecting the points of a finite set." *Trans. Amer. Math. Soc.* **70** (1951) 451–464. This paper contains many more problems and results and also the history of this problem and many references to the literature.

5) Miss KLEIN asked: Does there exist for every  $n$  an  $f(n)$  so that if  $f(n)$  points in the plane are given no three on a line then there always exist  $n$  of them which are the vertices of a convex polygon. She proved  $f(4) = 5$  and MAKAI and TURÁN proved that  $f(5) = 9$ . SZEKERES conjectured  $f(n) = 2^{n-2} + 1$ . He and I proved

$$(III. 5.1.) \quad 2^{n-2} \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}.$$

P. ERDŐS and G. SZEKERES: "A combinatorial problem in geometry", *Compositio Math.* 2 (1935) 463—470. The proof of the lower bound in (III. 5. 1) will appear in the *Annales of the Univ. of Budapest*.

6) HEILBRONN's problem. Let there be given  $n$  points in the unit circle. Denote by  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  the smallest area of all the triangles determined by the  $x_i$ . Estimate  $\max A(x_1, \dots, x_n)$  where the maximum is taken over all the  $x_i$  in the unit circle.  $A_n < c_1/n$  is trivial. ROTH proved  $A_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , more precisely

$$A_n < c_2/n(\log \log n)^{1/2},$$

and I observed that  $A_n > c_3/n^2$ . It seems to be a difficult and interesting problem to improve these inequalities for  $A_n$ .

K. F. ROTH: "On a problem of Heilbronn." *London Math. Soc. Journal* 26 (1951) 198—209.

7) Recently it was asked if the plane can be split into four sets  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  so that no  $\varphi_i$  should contain two points whose distance is 1. Several mathematicians observed that this certainly can not be done with three sets. (I can not trace the origin of this problem.)

8) ANNING and I proved that if in an infinite set of points in the plane all the distances between the points are integers then the points all are on a line. On the other hand it is known that one can give an infinite set of points, not all on a line so that all the distances should be rational. ULAM asked: Does there exist a set  $\varphi$  dense in the plane so that all the distances between points of  $\varphi$  are rational? I think the answer is no, but the question seems very difficult. SCHOENBERG asked if to every polygon and every  $\varepsilon$  there exists a polygon whose vertices are at distance  $< \varepsilon$  from the corresponding vertices of the original polygon and all whose sides and diagonals have rational length. Clearly if ULAM's problem has an affirmative answer, then the same holds for SCHOENBERG's problem. BESICOVITCH dealt with some special cases of this problem.

P. ERDŐS and A. ANNING: "Integral distances." *Bull. Amer. Math. Soc.* (1945) 598—600 and 996.

A. S. BESICOVITCH: "Rational polygons." *Mathematika* 6 (1959). 98.

Further literature on these similar problems and results: L. FEJES TÓTH: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*. Berlin, 1953 and H. HADWIGER and H. DEBRUNNER: »Kombinatorische Geometrie in der Ebene.« *L'Enseignement Math.* 1 (1955) 56—67. The paper also appeared in French a more detailed version of this paper recently appeared in book form *Monographies de L'Enseignement Mathématique* No 2. See also a forthcoming book of HADWIGER on these subjects.

#### IV. Problems in analysis

1) Let  $z^n + \dots$  be a polynomial of degree  $n$ . H. CARTAN proved that the set  $|f(z)| \leq 1$  (which we will call  $E_f^{(n)}$ ) can be covered by a set of circles the sum of whose radii is  $< 2e$ . It seems likely that  $2e$  can be replaced by 2 (which if true is known to be best possible). If  $E_f^{(n)}$  is connected this was proved by POMMERENKE, and in the general case he recently proved this with 2.59 instead of 2.



Assume that  $E_f^{(n)}$  is connected. Is it true that

$$(IV. 1.1) \quad \max_{z \in E_f^{(n)}} |f'(z)| < \frac{n^2}{2} ?$$

POMMERENKE proved this with  $\frac{e}{2}n^2$ . (IV.1.1) if true is best possible as is shown by the  $n$ -th TCHEBICHEFF polynomial  $T_n(z)$ .

Is it true that to every  $c > 0$  there exists an  $A(c)$  independent of  $n$  so that  $E_f^{(n)}$  can have at most  $A(c)$  components of diameter  $> 1 + c^2$ ,

Is it true that the length of the curve  $|f_n(z)| = 1$  is maximal for  $f_n(z) = z^n - 1$ .

Let  $|z_i| \leq 1$ . Estimate from below the area of  $E_f^{(n)}$ . HERZOG, PIRANIAN and I prove that for every  $\varepsilon$  there exists an  $n_0$  so that for  $n > n_0(\varepsilon)$  the area of  $E_f^{(n)}$  can be made to be  $< \varepsilon$ , but we have not succeeded in getting an a good estimate of the area from below.

Let  $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ . Is it true that the measure of the set on the real line for which  $|f(x)| \leq 1$  is  $\leq 2\sqrt{2}$ ? (We can prove that the diameter of this set is less than 3). Most of these problems are discussed in our paper with Herzog and Piranian.

P. ERDÖS, F. HERZOG and G. PIRANIAN: "Metric properties of polynomials." *Journal d'Analyse Math.* **6** (1958) 125—148.

CHRISTIAN POMMERENKE: "On some problems of Erdős, Herzog and Piranian." *Michigan Math. Journal* **6** (1959) 221—225; „On the derivative of a polynomial." *Ibid.* 373—375; "On some metric properties of polynomials with real zeros." *Ibid.* 377—380; »Einige Sätze über die Kapazität ebener Mengen.« *Math. Annalen* **141** (1960) 143—152.

2) Littlewood conjectured that for every sequence of integers  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$

$$(IV. 2. 1) \quad \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^k \cos n_i x \right| dx > c \log k$$

$n_i = i$  shows that if true this is best possible. It was not even known that the integral (IV.2.1) tends to infinity with  $k$ . Recently P. COHEN proved (IV.2.1) with  $c (\log k / \log \log k)^{1/8}$  and DAVENPORT improved this to  $c (\log k / \log \log k)^{1/4}$ .

ANKENY and CHOWLA conjectured that to every  $c > 0$  there exists a  $k$  so that for

$$(IV. 2.2) \quad \min_{0 \leq x < 2\pi} \sum_{i=1}^k \cos n_i x < -c.$$

(IV.2.2) immediately follows from the result of COHEN.

CHOWLA observed that if  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  is a sequence for which

the sums  $n_i \pm n_j$  are all distinct then (i. e.  $\left( \sum_{i=1}^k \cos n_i x \right)^2$ )

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} \cos(n_i \pm n_j) x$$



gives a trigonometric polynomial of  $k^2 - k$  terms whose minimum is  $\geq -\sqrt{k}$ . He then asked: is it true that the minimum of (IV.2.2) is less than  $-c\sqrt{k}$  for a suitable absolute constant  $c > 0$ ?

PAUL COHEN: "On a conjecture of Littlewood and idempotent measures." *Amer. Journal of Math.* **82** (1960) 190–212.

H. DAVENPORT: „On a theorem of P. J. Cohen." *Mathematika* **7** (1960) 93–97.

3) Let  $f_n(\theta)$  be a trigonometric polynomial of degree  $n$  all whose roots are real. Is it true that

$$(IV. 3.1) \quad \int_0^{2\pi} |f_n(\theta)| \leq 4.$$

$f_n(\theta) = \cos n\theta$  shows that if (IV.3.1) is true, it certainly is best possible

For similar problems see P. ERDŐS: "Note on some elementary properties of polynomials." *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940) 954–958.

4) It is known that there exists a polynomial  $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k z^k$ ,  $\varepsilon_k = \pm 1$  for which

$$(IV. 4.1) \quad \max_{|z|=1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z^k \right| < c_1 \sqrt{n}.$$

As far as I know it is not known if there exists a polynomial of the above form which besides (IV.4.1) also satisfies

$$(IV. 4.2) \quad \min_{|z|=1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z^k \right| > c_2 \sqrt{n}.$$

In fact it is (as far as I know) not known if a polynomial satisfying (IV.4.2) exists.

Does there exist an absolute constant  $c > 0$  so that

$$(IV. 4.3) \quad \max_{|z|=1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z^k \right| > (1+c) \sqrt{n}?$$

(IV.4.3) is trivial for  $c = 0$  (PARSEVAL's inequality).

I can prove (my paper will appear in *Annales Polonici Math.*) the analogous inequality for trigonometric polynomials i. e.

$$(IV. 4.4) \quad \max_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cos k\theta \right| > \frac{1+c}{\sqrt{2}} \sqrt{n}.$$

A generalisation of (IV.4.3) would be

$$(IV. 4.5) \quad \max_{|z|=1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z^{n_k} \right| > (1+c) \sqrt{n}.$$

Here I can not even prove

$$(IV. 4.6) \quad \max_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cos n_k \theta \right| > \frac{1+c}{\sqrt{2}} \sqrt{n}.$$

J. CLUNIE: "The minimum modulus of a polynomial on the unit circle." *Quarterly Journal of Math.* **10** (1959) 95—98.

5) Let  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  be an entire function

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad m(r) = \max |a_n r^n|.$$

Is it true that if  $\lim_{r \rightarrow \infty} m(r)/M(r)$  exists it must be 0? CLUNIE (unpublished) proved this if  $a_n \geq 0$ . Determine

$$\max_f \lim_{r \rightarrow \infty} m(r)/M(r) = c.$$

$\frac{1}{2} \leq c < 1$  is trivial. KÖVÁRI observed  $c > \frac{1}{2}$ , but the exact value of  $c$  is not known.

S. M. SHAH: "The behavior of entire and a conjecture of Erdős" *Amer. Math. Monthly* **68** (1961) 419—425.

6) Let  $f(z)$  be an entire function. I conjectured and BOAS proved (unpublished) that there exists a path  $L$  so that for every  $n$

$$(IV. 6.1) \quad \lim |f(z)/z^n| \rightarrow \infty$$

where  $z \rightarrow \infty$  on  $L$ . Can one estimate the length of this path in terms of  $M(r)$ ? Does there exist a path along of which  $|f(z)|$  tends to  $\infty$  faster than a fixed function of  $M(r)$  e. g.  $M(r)^e$ ?

HUBER proved the following theorem: Let  $f(z)$  be an entire function, not a polynomial. Then to every  $\lambda > 0$  there exists a locally rectifiable path  $C_\lambda$  tending to infinity, such that

$$(IV. 6.2) \quad \int_{C_\lambda} |f(z)|^{-\lambda} |dz| < \infty.$$

Does there exist a path  $C$  independent of  $\lambda$  so that for every  $\lambda > 0$

$$(IV. (6.3) \quad \int_C |f(z)|^{-\lambda} |dz| < \infty?$$

A. HUBER: "On subharmonic functions and differential geometry in the large." *Comment. Math. Helv.* **32** (1957) 13—72.

7) Pólya's problem. Let  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$  be an entire function of finite order. Assume that  $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k/k = \infty$ . Does it then follow that

$$(IV. 7.1) \quad \overline{\lim} \log m(r)/\log M(r) = 1?$$

PÓLYA remarks that WIMAN's results (*Acta Math.* **37** (1914) 305—326, and **41** (1916) 1—28) imply that if

$$(IV. 7.2) \quad \log(n_{k+1} - n_k)/\log n_k > 1/2,$$

then

$$(IV. 7.3) \quad \overline{\lim} m(r)/M(r) = 1$$

holds (also for functions of infinite order). MACINTYRE and I proved that if  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1} - n_k} < \infty$  then (IV.7.3) holds and that if  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1} - n_k} = \infty$  there always exists an entire function  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$  for which

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r)/M(r) = 0.$$

$$\left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1} - n_k} < \infty \text{ implies (IV.7.2)} \right).$$

G. PÓLYA: "Lücken und Singularitäten der Potenzreihen." *Math. Zeitschrift* **29** (1929) 549–640.

P. ERDŐS and A. J. MACINTYRE: "Integral functions with gap power series." *Edinburgh Math. Proc. Ser. 2*, **10** (1954) 62–70.

8) FEJÉR proved that if  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k < \infty$  then the entire function  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$  assumes every value at least once and BIERNACKI proved that it assumes every value infinitely often. FEJÉR and PÓLYA conjectured that if  $n_k/k \rightarrow \infty$  then  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$  assumes every value infinitely often.

L. FEJÉR: "Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung." *Math. Annalen* **65** (1908) 413–423.

M. BIERNACKI: "Sur les equations algébriques contenant des parametres arbitraires." *Thèse*, Paris, 1928.

9) Let  $\varphi_k$ ,  $1 \leq k < \infty$  be a set of complex numbers which has no limit point in the finite part of the plane. Does there exist an entire function  $f(z)$  and a sequence  $n_1 < n_2 < \dots$  so that for every  $z \in \varphi_k$ ,  $f^{(n_k)}(z) = 0$ ,  $1 \leq k < \infty$  (i. e. the set of zeros of  $f^{(n_k)}(z)$  contains  $\varphi_k$ ?)

10) HANANI and I proved (unpublished) that if  $|a_n| > c > 0$ ,  $\lim |a_n|/\sqrt{n} = 0$ ,  $a_n$  real, then to every real  $\alpha$  there exists a sequence  $\varepsilon_n = \pm 1$  so that the series  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$  is  $C_1$ -summable to  $\alpha$ . It is easy to see that  $|a_n|/\sqrt{n} \rightarrow 0$  can not be replaced by  $|a_n| < \varepsilon \sqrt{n}$ . But we conjectured that if  $|a_n| > c > 0$  and the series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is  $C_1$ -summable to a finite number then the conclusion of our result remains true. We were unable to prove this, even if we assume  $|a_n| < \varepsilon \sqrt{n}$ .

Let  $a_n$ ,  $1 \leq n < \infty$  be a sequence of real numbers. Assume that  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is  $C_1$ -summable. Denote by  $\varphi$  the set of values to which some rearrangement of  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is  $C$ -summable. BAGEMIHL and I proved that  $\varphi$  either consists of a single number, or is the whole real axis or is the set of all numbers



$\alpha + \nu\beta$ ,  $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . It would be interesting to extend this for  $C_k$  summability and for series with complex terms.

P. ERDŐS and F. BAGEMIHLE, "Rearrangements of  $C_1$ -summable Series." *Acta Math.* **92** (1954) 35–53. The problem has been considered previously by S. MAZUR, *Soc. Sav. Sci. Lett. Łowów* **4** (1929) 411–424. See also K. ZELLER and G. G. LORENTZ: "Series rearrangements and analytic sets." *Acta Math.* **100** (1958) 144–169.

11) TURÁN's problem. Let  $z_1 = 1, z_2, \dots, z_n$  be any complex numbers. Put  $s_k = \sum_{i=1}^n z_i^k$ . TURÁN conjectured that there exists an absolute constant  $c$  so that

$$(IV. 11.1) \quad \max_{1 \leq k \leq n} |s_k| > c.$$

About 20 years ago TURÁN proved  $\max_{1 \leq k \leq n} |s_k| > \frac{c_1}{n}$ , this was improved by me to  $\frac{1}{2 \log n}$ , by TURÁN to  $\log 2 / \log n$  and by de BRUIJN and UCHIJAMA to  $c_2 \log \log n / \log n$ . Very recently ATKINSON proved TURÁN's conjecture with  $c = \frac{1}{6}$ . The best value of  $c$  is unknown.

For problems of this type and their application see P. TURÁN's book: *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*. The book also appeared in Hungarian and there is a Chinese edition which contains new material. A new American edition of the book will appear soon. I would like to mention just one problem I proved (see TURÁN's book) that one can find  $n$  complex numbers  $z_1 = 1, |z_i| \leq 1, 2 \leq i \leq n$  for which

$$(IV. 11.2) \quad \max_{2 \leq k \leq n+1} |s_k| < (1 + c_3)^{-n}$$

where  $c_3 > 0$  is an absolute constant. Can one find  $n$  complex numbers  $z_i$  satisfying (IV.11.2) and  $|z_i| \geq 1, 1 \leq i \leq n$ ?

F. V. ATKINSON: "On sums of powers of complex numbers." *Acta Math. Hung.* **12** (1961) 185–188.

## V. Problems on probability

1) Let  $r_n(t)$  be the sequence of Rademacher functions i. e.  $r_n(t) = \pm 1$  with probability  $\frac{1}{2}$  and the  $r_n(t)$  are independent functions. The well known law of the iterated logarithm states that for almost all  $t$

$$(V. 1.1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r_k(t) / \sqrt{2n \log \log n} = 1.$$

Assume now that  $\varphi_p(t)$  ( $p$  prime) is a sequence of independent functions  $\varphi_p(t) = \pm 1$  with probability  $\frac{1}{2}$ . Further assume that for  $n = a \cdot b$ ,  $\varphi_n(t) = \varphi_a(t) \varphi_b(t)$ . Thus if the  $\varphi$ 's are defined for all primes they are defined for

all integers. WINTNER proved that for all  $\varepsilon$  and almost all  $t$

$$(V.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) / n^{1/2+\varepsilon} = 0,$$

and I improved this (unpublished) to

$$(V.1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) / n^{1/2} (\log n)^c = 0.$$

It would be interesting to prove a result analogous to (V.1.1). I can not even prove that

$$(V.1.4) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) / n^{1/2} = \infty.$$

I was unable to locate the paper of WINTNER.

The next few questions deal with random polynomials and power series.

2) Let  $\varepsilon_k = \pm 1$ . Completing previous results of LITTLEWOOD, OFFORD and KAC, OFFORD and I proved that if we neglect  $o\left(\frac{2^n}{(\log \log n)^{1/2}}\right)$  polynomials  $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k z^k$  the number of real roots of the remaining polynomials is of the form  $\frac{2}{\pi} \log n + o((\log n)^{2/3} \log \log n)$ .

Our result was not quite strong enough to prove the following conjecture (which as far as I know is still open): Put  $0 < t < 1$ , let the binary expansion of  $t$  be  $t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{2^k}$ . Denote by  $R_n(t)$  the number of real roots of the  $n$ -th partial sum of  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(t) z^k$ . Then for almost all  $t$

$$(V.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) / \frac{2}{\pi} \log n = 1.$$

Denote by  $R'_n(t)$  the number of roots in the unit circle of the  $n$ -th partial sum of  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(t) z^k$ . Is it true that

$$(V.2.2) \quad R'_n(t) / n \rightarrow \frac{1}{2}$$

for almost all  $t$ ? Here I can not even prove that for all but  $o(2^n)$  polynomials

$\sum_{k=0}^n \varepsilon_k z^k$  the number of roots in  $|z| < 1$  is  $\frac{n}{2} + o(n)$ .

J. E. LITTLEWOOD and C. OFFORD, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **35** (1939) 133–148.

M. KAC, *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943) 314–320 and 938, see also *Proc. London Math. Soc.* **50** (1948) 390–408.

P. ERDŐS and C. OFFORD: "On the number of real roots of a random algebraic equation." *Proc. London Math. Soc.* 139–160.

3) SALEM and ZYGMUND proved the following theorem: For almost all  $t$  and  $n > n_0(t)$

$$(V.3.1) \quad c_1(n \log n)^{1/2} < \max_{|z|=1} \left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k(t) z^k \right| < c_2(n \log n)^{1/2}.$$

The proof of the upper bound in (V.3.1) is easy, the difficult part was the proof of the lower bound. One would expect that for almost all  $t$

$$(V.3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|z|=1} \frac{\left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k(t) z^k \right|}{n^{1/2} (\log n)^{1/2}} = C$$

where  $C$  does not depend on  $t$ . The following weaker statement has also not been proved so far: For every  $\varepsilon$  if we neglect  $o(2^n)$  polynomials  $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k z^k$  we have

$$(V.3.3) \quad (C - \varepsilon)(n \log n)^{1/2} < \max_{|z|=1} \left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k z^k \right| < (C + \varepsilon)(n \log n)^{1/2}.$$

Denote

$$M_n(t) = \max_{1 \leq x \leq 1} \left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k(t) x^k \right|.$$

The upper bound for  $M_n(t)$  is given by the law of the iterated logarithm, but the lower bound is much more difficult. I proved (unpublished) that for almost all  $t$  and every  $\varepsilon > 0$

$$(V.3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t)/n^{1/2-\varepsilon} = \infty.$$

A theorem of CHUNG implies that for almost all  $t$  there are infinitely many  $n$  for which

$$(V.3.5) \quad M_n(t) < c \left( \frac{n}{\log \log n} \right)^{1/2}.$$

The exact lower bound for  $M_n(t)$  seems very difficult (the problem is due to SALEM and ZYGMUND).

Is it true that for all but  $o(2^n)$  polynomials  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k z^k$ .

$$(V.3.6) \quad \min_{|z|=1} \left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k z^k \right| < 1?$$

or more precisely how can one estimate the minimum (V.3.6) as accurately as possible.

R. SALEM and A. ZYGMUND: "Some properties of trigonometric series whose terms have random signs." *Acta Math* **91** (1954) 245–301.

4) DVORETZKY's problem. Let

$$(V.4.1) \quad a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Place on the circle of circumference 1 at random arcs of length  $a_n$ . It is easy to see that if (V.4.1) is satisfied then with probability one almost all



points of the unit circle are covered by the arcs. DVORETZKY showed that for suitable choice of  $a_n$  all points of the unit circle are covered for almost all choices of the arcs of length  $a_n$  (satisfying (V.4.1)), and that for suitable choice of the  $a_n$  for almost all choices of the arcs there are points not covered by them. The first case we shall call the case of covering, the second of not covering.  $a_n = \frac{1+c}{n}$  where  $c > 0$  was shown by KAHANE to be in the case of covering. I proved (unpublished) that  $a_n = \frac{1}{n}$  is in the case of covering but  $a_n = \frac{1-c}{n}$  in the case of not covering. At present no necessary and sufficient condition for the case of covering is known.

Let  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \infty$ . It is well known that for almost all choices of  $\varepsilon_n = \pm 1$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_n b_n z^n$  diverges for almost all points of the unit circle. Sharpening previous results of DVORETZKY, he and I proved that if  $|b_n| > \frac{c}{\sqrt{n}}$ , then for almost all choices of  $\varepsilon_n = \pm 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_n z^n$  diverges for all points  $|z| = 1$ . We have an example of a series  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \infty$ ,  $|b_{n+1}| \leq |b_n|$  so that for almost all choices of  $\varepsilon_n = \pm 1$  there exists a  $z_0$ ,  $|z_0| = 1$ , ( $z_0$  depends on the sequence  $\varepsilon_n$ ) so that  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_n z_0^n$  converges. Perhaps every series satisfying  $n^{1/2} |b_n| \rightarrow 0$  has this property.

A. DVORETZKY: "On the covering of the circle by randomly placed arcs." *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42** (1956) 199–203.

J. P. KAHANE: "Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard." *Comptes rendus* **248** (1959) 184–186.

A. DVORETZKY and P. ERDŐS: "Divergence of random power series." *Michigan Math. Journal* **6** (1959) 343–347.

5) Denote by  $f(n, k)$  the number of random walk paths of  $n$  steps in  $k$  dimensional space where we assume that the path does not intersect itself. It has been observed that  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, k)^{1/n} = C_k$  exists, but no sharper inequalities are known for  $f(n, k)$  even for  $k = 2$ .

The expected position and distribution of the point after  $n$  steps has also not been determined. It has often been conjectured that for  $k = 2$  the expected distances from the origin divided by  $n^{1/2}$  tends to  $\infty$  and divided by  $n$  tends to 0, for  $k \geq 3$  the expected distance was supposed to be  $O(n^{1/2})$ .

I do not know the origin of these problems (probably applications in polymer chemistry, I first heard of them in 1949). See the forthcoming paper of B. Rennie in the Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Series A.

(Received October 5, 1960.)

**LIST OF LECTURES BY GUESTS  
HELD IN THE INSTITUTE  
IN 1960**

**СПИСОК ДОКЛАДОВ  
ПРОЧИТАННЫХ ГОСТЯМИ В  
ИНСТИТУТЕ В 1960 ГОДА**

1. КУПРЯДЗЕ, В. Д. (Тбилиси): *Применение сингулярных интегральных уравнений при решении пространственных задач теории сопротивления материалов.* (June 16.)
2. LUKÁCS, E. (Washington): *A normális eloszlás egy jellemzéséről.* (September 2.)
3. HÁJEK, J. (Prague): *Limiting distributions in simple random sampling from a finite population.* (September 2.)
4. KRZYŻAŃSKI, M. (Kraków): *Quelques resultats nouveaux sur les equations paraboliques.* (September 2.)
5. JASKOWSKI, S. (Torun): *Die dreistelligen Operatoren im Aussagenkalkül.* (September 5.)
- 6—9. SZEGŐ G. (Stanford): *Újabb vizsgálatok az ortogonális polinomok oszcillációs tulajdonságairól.* (September 20, 21, 22, 23.)
10. IZUMI, S. (Sapporo, Japan): *On some theorems on conjugate functions.* (October 26.)
11. ERDŐS P.: *Végtelen intervallumon ortogonális polinomok.* (November 3.)
12. SZCZOTKA, F. (Wrocław): *Ein mathematisches Modell der Genetik.* (November 10.)
13. ERDŐS P.: *Gráfok szélsőérték feladatairól.* (November 16.)
14. ERDŐS P.: *Egész számok sorozatairól.* (November 17.)
15. PAWLAK, Z. (Warsaw): *The organization of a simple computer for calculation of arithmetical expressions.* (December 13.)
16. PAWLAK, Z. (Warsaw): *A new form of parenthesis-free notation of arithmetical formulae.* (December 14.)



# BIBLIOGRAPHY<sup>1</sup>

LIST OF RECENT PAPERS AND  
BOOKS WRITTEN BY MEMBERS  
OF THE INSTITUTE, PUBLISHED  
OR IN PRINT ELSEWHERE IN  
FOREIGN LANGUAGES

# БИБЛИОГРАФИЯ<sup>1</sup>

СПИСОК НОВЫХ РАБОТ  
ЧЛЕНОВ ИНСТИТУТА,  
ОПУБЛИКОВАННЫХ В  
ДРУГИХ МЕСТАХ В  
ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ

- [1] ÁDÁM, A.: "On graphs in which two vertices are distinguished." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.\*
- [2] ALPÁR, L.: "Sur la divergence de certaines séries de Taylor lacunaires." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica*.\*
- [3] BOD, P.: "Einige Bemerkungen zur Anwendung der Einsatz-Austoss-Analyse." *Abstracts of lectures of the Second Hungarian Mathematical Congress 1960, II. Vol. VI. 11—16.*
- [4] BOGNÁR, J.: "Об одном свойстве разрывности скалярного произведения в пространствах с индефинитной метрикой." *Успехи математических наук*.\*
- [5] CSÁSZÁR, Á.: "Monotonité locale et dérivabilité approximatives de fonctions quelconques." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* 3—4 (1961).\*
- [6] CSÁSZÁR, Á.: "Sur la représentation topologique des graphes." *Fundamenta Mathematicae* 50 (1961).\*
- [7] FENYŐ, I.: "Über eine Anwendung der Distributionentheorie zur numerischen Lösung von Differentialgleichungssystemen." *Centre International Provisoire de Calcul et Communications*.\*
- [8] FISCHER, J.—INKE, G.: "Nomogramme zur Messung der Kernoberfläche." *Zeitschrift für mikroskopisch—anatomische Forschung*.\*
- [9] FISCHER, J.—INKE, G.—TÓTH, K.: "Rechenschieber zur Erleichterung der karyometrischen Berechnungen." *Zeitschrift für mikroskopisch—anatomische Forschung*.\*
- [10] GALLAI, T.—MILGRAM, A. N.: "Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 21 (1960) 181—186.
- [11] GALLAI, T.: "Maxi um-Minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 12 (1961).\*
- [12] GRÁTZER, GY.—SCHMIDT, E. G.: "On inaccessible and minimal congruence relations, I." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 21 (1960) 337—342.
- [13] GRÁTZER, GY.—SCHMIDT, E. T.: "On inaccessible and minimal congruence relations, II." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 22 (1961).\*
- [14] GRÁTZER, GY.—SCHMIDT, E. T.: "A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* 3 (1960).\*
- [15] GRÁTZER, GY.—SCHMIDT, E. G.: "On a problem of L. Fuchs concerning universal subgroups and universal homomorphic images of abelian groups." *Indagationes Mathematicae*.\*
- [16] HAJÓS, GY.: "Über die Genauigkeit im Geometrieunterricht." *Lectures on modern teaching of geometry and related topics held at the ICMI Seminar in Aarhus, May 30 to June 2, 1960. 121—125.*

<sup>1</sup> Papers or books with incomplete bibliographical data, marked by an asterisk are in print.

<sup>1</sup> Работы с неполными библиографическими данными, отмеченные звездочкой, находятся в печати.



- [17] HEPPEs, A.: "Über Kreis- und Kugelwolken." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.\*
- [18] HEPPEs, A.—SZÜSZ, P.: "Bemerkung zu einer Arbeit von L. Fejes Tóth." *Elemente der Mathematik* **15** (1960) 134—136.
- [19] HEPPEs, A.: "Ein Satz über gitterförmige Kugelpackungen." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica*.\*
- [20] JUVANCZ, I.: "Contraindication of non-parametric Methods in Medical Experimentation." *The Leyden Symposium on Quantitative Methods in Pharmacology of the Biometric Society, 1960*. North Holland Publishing Company.\*
- [21] KALMÁR, L.: "Einige philosophische Probleme der Kybernetik." *Naturwissenschaft und Philosophie* (Beiträge zum International Symposium über Naturwissenschaft und Philosophie anlässlich der 550-Jahr-Feier der Karl Marx-Universität Leipzig, 1959. Akademie Verlag, Berlin, 1960) 389—401.
- [22] KALMÁR, L.: "Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht." *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **40** (1960) T 64—65.
- [23] KIS, O.: "Замечание об интерполировании." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 49—64.
- [24] KIS, O.: "О тригонометрическом (0,2) интерполировании." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 255—276.
- [25] KOVÁCS, I.: "Sur les automorphismes de certaines algèbres d'opérateurs." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.\*
- [26] MUSZKA, D.: "Сегедская логическая машина и ее дальнейшее развитие." *Автоматик и Телемеханика*.\*
- [27] POLLÁK, GY.: "Über die Struktur kommutativer Hauptidealringe." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.\*
- [28] RÉDEI, L.: *Algebra (Erster Teil)*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.—G., Leipzig, 1959.
- [29] RÉDEI, L.: "Natürliche Basen des Kreisteilungskörpers, II." *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **21** (1960) 12—40.
- [30] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: "On the evolution of random graphs." *The International Statistical Institute, 32. Session, 1960, Tokyo, No. 119*. 1—5.
- [31a] RÉNYI, A.: "On measures of entropy and information." *4th Berkeley Symposium on Probability and Statistics*.\*
- [31b] RÉNYI, A.: "Über verschiedene Masszahlen von Entropie und Informationsgewinn." *5. Österreichischer Mathematikerkongress, Innsbruck, Vortragsauszüge*. s. 68.
- [31c] RÉNYI, A.: "On different measures of information." *Abstracts of lectures of the Second Hungarian Mathematical Congress 1960, II. vol. IV*. 26—28.
- [32] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: "On the strength of connectedness of a random graph." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.\*
- [33] RÉNYI, A.: "Legendre polynomials and probability theory." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica*.\*
- [34] RÉNYI, A.: "Charles Jordan." *Revue de l'Institut International de Statistique* **28** (1960) 117—118.
- [35] RÉNYI, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einer Anhang über Informationstheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.\*
- [36] RÓZSA, P.: "Über die Verallgemeinerung einer Routhschen Erscheinung." *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **40** (1960) Sonderheft T114—T115.
- [37] RÓZSA, P.—JÁNOSSY, L.: "Maximum likelihood determination of the scattering constant of an emulsion track in presence of noise." *Nuovo Cimento* (1960).\*
- [38] RÓZSA, P.—FREY, T.: "Über die Konvergenzgeschwindigkeit des Differenzverfahrens bei einigen elliptischen Differentialgleichungen." *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* **4** (1960).\*
- [39] STEINFELD, O.: "Über das Zassenhaussche Lemma in allgemeinen algebraischen Strukturen." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica*.\*
- [40] STEINFELD, O.: "Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.\*
- [41] STEINFELD, O.: "Die einstufig nichtregulären bzw. nichtprimen Ringe." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.\*
- [42] SURÁNYI, J.: "Über zerteilte Parallelogramme." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.\*

- [43] SURÁNYI, J.: "Eine Bemerkung zur axiomatischen Unterricht in der Mittelschule. *Lectures on modern teaching of geometry and related topics held at the ICMI Seminar in Aarhus, May 30 to June 2, 1960.* 163—164.
- [44] SZABÓ, Á.: "Was heisst der mathematische Terminus „axioma“?" *Maia* **12** (1960) 89—105.
- [45] SZÁSZ, F.: "Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptideale I." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **7** (1960) 54—64.
- [46] SZÁSZ, F.: "Die Abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptideale erfüllen." *Monatshefte für Mathematik* **65** (1961).\*
- [47] SZÁSZ, F.: "Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptideale II." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1961).\*
- [48] SZÁSZ, F.: "Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptideale sind." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1961).\*
- [49] SZÁSZ, F.: "Die Ringe mit lauter isomorphen nichttrivialen endlich erzeugbaren" *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **22** (1961).\*
- [50] SZILÁRD, K.: "О теореме Фату для одного класса непрерывных отображений." *Успехи математических наук*.\*
- [51] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—FOIAS, C.: "Sur les contractions de l'espace de Hilbert, IV." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 251—259.
- [52] SZÜSZ, P.—HARTMANN, S.: „On congruence classes of denominators of convergents." *Unterigen* *Acta Arithmetica* **6** (1960) 179—184.
- [53] SZÜSZ, P.: "Verallgemeinerung eines Kusminschen Satzes." *Acta Arithmetica*.\* Szűsz, P.: see [18].
- [54] TURÁN, P.: "A theorem of diophantine approximation with application to Riemann zeta-function." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **21** (1960) 311—318.
- [55] TURÁN, P.: "A remark on Hermite — Fejér interpolation." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Sectio Mathematica*.\*
- [56] TURÁN, P.: "Remark on a theorem of Erhard Schmidt." *Mathematica (Cluj)*.\*
- [57] TURÁN, P.: "On some one-sided theorems of new type in the theory of diophantine approximation." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.\*
- [58] TURÁN, P.: "On the eigen-values of matrices." *Annali di Matematica*.\*
- [59] TURÁN, P.: "On some new results from the theory of diophantine approximation." *Abstracts of lectures of the Second Hungarian Mathematical Congress 1960, I. vol. Ib.* 17—20.
- [60] TURÁN, P.: "On Riemann's zeta-function." *Abstracts of lectures of the second Hungarian Mathematical Congress, 1960, I. vol. Ib.* 21.
- [61] VARGA, O.: "Über eine Kennzeichnung der Riemannschen Räumen konstanter negativer und konstanter positiver Krümmung." *Annali di Matematica*.\*
- [62] VARGA, O.: "Bemerkung zur Winkelmetrik in Finslerschen Räumen." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **3** (1961).\*
- [63] VARGA, O.: "Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **8** (1961).\*
- [64] VARGA, O.: "Über eine charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung." *Monatshefte für Mathematik* **65** (1961).\*
- [65] VAS, É.: "Bemerkung zur Arbeit von K. Stange." *Metrika*.\*
- [66] VINCZE, I.: "On two sample tests based on order statistics." *Proceedings of the Forth Berkeley Symposium on Probability and Statistics*.\*
- [67] VINCZE, I.: "On a special type of randomized tests." *Abstracts of lectures of the Second Hungarian Mathematical Congress, 1960, II. vol. IV.* 33.



EXACT DATA OF PAPERS  
MENTIONED EARLIER WITH  
INCOMPLETE BIBLIOGRAPHICAL  
DATA<sup>2</sup>

ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ РАБОТ  
ПРИВЕДЕННЫХ РАНЬШЕ С  
НЕПОЛНЫМИ  
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИМИ  
ДАНЫМИ<sup>2</sup>

- II.: [2] EGERVÁRY, J.: "On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations." *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **11** (1960) 376—386.
- II.: [10] SARKADI, K.—ÉLTETŐ, Ö.: "On preliminary sampling with special reference to the microbiological control of tomato concentrates." *Biometrika* **16** (1960) 339—347.
- II.: [72] FENYŐ, I.: "Über den Zusammenhang zwischen den Mikusinskischen Operatoren und den Distributionen." *Mathematische Nachrichten* **19** (1958) 161—164.
- III.: [1] ÁDÁM, A.: "On the definitions of direct product in universal algebra." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **6** (1959) 303—310.
- III.: [7] CSÁSZÁR, Á.—MARCUS, S.: "Sur les théorèmes de J. Mycielski et W. Gustin concernant les décompositions de l'intervalle." *Colloquium Mathematicum* **7** (1960) 255—256.
- III.: [12] EGERVÁRY, J.—LOVASS-NAGY, V.—KOLIN, L.: "Discrete models and matrix methods in engineering mechanics." *Proceedings of the Third Congress on Theoretical and Applied Mechanics — Bangalore, India* (1957) 259—276.
- III.: [30] GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: "Über einfache Körpererweiterungen." *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **5** (1960) A 283—285.
- III.: [49] RÉNYI, A.: "Probabilistic methods in number theory." *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958* (529—539).
- III.: [51] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: "On random graphs, I." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **6** (1959) 290—297.
- III.: [52] RÉNYI, A.: "On a theorem of P. Erdős and its application in information theory." *Mathematica (Cluj)* **1** (24) (1959) 341—344.
- III.: [62] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: "Spectral sets and normal dilatations of operators." *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958*. (412—422).
- V.: [5] ALEXITS, GY.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.
- V.: [10] CSÁSZÁR, Á.: *Fondements de la topologie générale*. Akadémiai Kiadó — Gautier-Villars, Budapest-Paris, 1960. 232 p.
- V.: [14] EGERVÁRY, J.: "Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzgleichung für beliebige Gebiete." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 341—361.
- V.: [28] HEPPES, A.—FEJES TÓTH, L.: "Filling of a domain by equiareal discs." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **7** (1960) 198—203.
- V.: [30] JUVANCS, I.: "Contribution of the problem of statistical results and scientific inference." *Acta Medica Academiae Scientiarum Hungaricae* **16** (1960) 159—173.
- V.: [36] PRÉKOPA, A.: "On the spreading process." *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, 1959*. Prague, 1960. 521—529.
- V.: [44] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: "Additive properties of random sequences of positive integers." *Acta Arithmetica* **6** (1960) 83—110.
- V.: [47] RÉNYI, A.: "Dimension, entropy and information." *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, 1959*. Prague, 1960. 545—556.

<sup>2</sup>The numbers preceding the serial numbers refer to the volume containing the respective list of papers.

<sup>2</sup>Римская цифра стоящая перед номером работы оказывает на том в котором фигурирует работа с неполными библиографическими данными.



- V.: [50] SARKADI, K.: "A rule of dualism in mathematical statistics." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 83—92.
- V.: [56] STEINFELD, O.—KERTÉSZ, A.: "On the symmetry of semisimple rings." *American Mathematical Monthly* **67** (1960) 450—452.
- V.: [66] SZABÓ, Á.: "Anfänge des euklidischen Axiomensystems." *Archive for History of Exact Sciences* (Springer) **1** (1960) 1, 37—106.
- V.: [75] TURÁN, P.: "On the distribution of zeros of general exponential polynomials." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **7** (1960) 130—136.
- V.: [79] TURÁN, P.: „On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximation." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 299—316.
- V.: [86] VINCZE, I.: "An interpretation of the  $I$ -divergence of information theory." *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, 1959*. Prague, 1960. 681—684.
- V.: [87] VINCZE, I.: "On some distributions and limiting distributions connected with two sample tests." (In Chinese, with summary in English.) *The Fu-Tan University Journal (Sanghai)* (1960) 1—13.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Pataki Ferenc

A kézirat beérkezett: 1961 II. 27. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 22.75 (A/5) ív

53.048/61 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
KÖNYVTÁRA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEIT az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való áttulalással rendelhetik meg a folyóiratot. *Külföldi* megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРЭД РЕ́НЬИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.. ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS  
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5,— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).



## INDEX

## СОДЕРЖАНИЕ

Голенко, Д. И.: Некоторые вопросы расчета вероятностных процессов методом Монте-Карло .....	3
ŠALÁT, T.: Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Mass	15
DÜCK, W.: Abschätzung der Fortpflanzung der Ungenauigkeit der Daten in die Lösung bei linearen Gleichungssystemen und Matrizengleichungen.....	43
PERGEL, J.: An extension of Kolmogorov's theorem to conditional probability spaces	61
SALLAY, M.: Sur un procédé d'approximation avec des conditions aux limites.....	65
FREUD, G.: Über positive Zygmundsche Approximationsfolgen .....	71
KARDOS, G.—LADIK, J.: The ground State of the hydrogen molecule on the basis of relativistic quantum mechanics with the aid of the Wang wave function, II. Method for evaluation of the two-centre integrals occuring in the calculation of the retarded magnetic orbit-orbit interaction .....	77
VERMES, P.: Fixed points in graph colouring .....	89
CSÁKI, E.—VINCZE, I.: On some problems connected with the Galton-test.....	97
ACZÉL, J.: Über die Begründung der Additions- und Multiplikationsformeln von bedingten Wahrscheinlichkeiten .....	110
ARATÓ, M.: Несколько замечаний об абсолютно непрерывности мер .....	123
SARKADI, K.: On Galton's rank order test.....	127
BOD, P.: L'analyse d'efficacité de la modernisation technique de la production (une approximation).....	133
PÉTER, R.: Primitiv-rekursive Wortbeziehungen in der Programmierungssprache "Algol 60" .....	137
HAJTMAN, B.: On systems of equations containing only one nonlinear equation	145
ALPÁR, L.—TURÁN, P.: Sur la distribution des valeurs d'une fonction entière.....	157
TURÁN, P.: On a density theorem of Yu. V. Linnik.....	165
ERDŐS, P.—GALLAI, T.: On the minimal number of vertices representing the edges of a graph .....	181
RÉVÉSZ, P.: Some remarks on the random ergodic theorem, II.....	205
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On a classical problem of probability theory.....	215
ERDŐS, P.: Some unsolved problems.....	221
List of lectures by guests held in the institute in 1960.....	255
Список докладов прочитанных гостями в институте в 1960 года .....	255
Bibliography. List of recent papers and books written by members of the institute, published or in print elsewhere in foreign languages.....	256
Библиография. Список новых работ членов института, опубликованных в других местах в иностранных языках .....	256
Exact data of papers mentioned earlier with incomplete bibliographical data.....	259
Точные данные работ приведенных раньше с неполными библиографическими данными .....	259



✓ 307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

VI. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 3. FÜZET

1961

★

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА  
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ  
ТОМ VI., СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.  
1961

★

PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
VOLUME VI., SERIES A, FASC. 3.  
1961



1961

2



# INDEX

# СОДЕРЖАНИЕ

B. C. RENNIE: Random walks .....	263
G. FREUD—M. SALLAY: Sur la vitesse de convergence du developpement selon des fonctions propres de Sturm-Liouville .....	271
E. CSÁKI: On the number of intersections in the one-dimensional random walk .....	281
I. BIHARI: On the nonlinear equation $u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$ .....	287
I. BIHARI: Asymptotic behaviour of the solutions of certain second order ordinary differential equations perturbed by a half-linear term .....	291
L. SCHMETTERER: Über eine allgemeine Theorie der erwartungstreuen Schätzungen .....	295
B. JANKÓ: Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération par la résolution des équations opérationnelles non-linéaires, I. ....	301
M. HOSSZÚ—E. VINCZE: Über die Verallgemeinerungen eines Funktionalgleichungssystems der Wirtschaftlichkeit .....	313
L. VEIDINGER: Error estimation for Massau's method of characteristics .....	323
L. PINTÉR: Oszillationssätze für einen Typ von nichtlinearen Differentialgleichungen .....	333
J. BOGNÁR: О существовании квадратного корня из оператора, самосопряженного относительно индефинитной метрики .....	351
J. MOGYORÓDI: On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables .....	365
J. H. E. COHN: On some problems of P. Vermes .....	373
K. SZILÁRD: Über die Analoge der ganzen rationalen Funktionen in verallgemeinerten Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, I. ....	375
J. CZIPSZER: Sur la module de continuité intégrale .....	381
M. P. SCHÜTZENBERGER: On a family of submonoids .....	393
A. K. ХАРАДЗЕ: Заметка об одной теореме П. Турана .....	399
I. PALÁSTI: On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph .....	405
A. RÉNYI: On Kolmogoroff's inequality .....	411
P. TURÁN: Research problems .....	417

**A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI**

**VI. ÉVFOLYAM A. SZOROZAT, 3. FÜZET  
1961**

★

**ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА  
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ  
ТОМ VI., СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.  
1961**

★

**PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
VOLUME VI., SERIES A, FASC. 3.  
1961**



1961



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYIALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИ az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatolóznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИnek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. Külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetel 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРЭД РЕ́НЬИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНА́Р, ПА́Л РЕ́ВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюмеми на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культúra, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS  
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

## RANDOM WALKS

by

BASIL C. RENNIE<sup>1</sup>

### § 1. Summary

A random walk is a sequence of lattice points, each step being of unit length. A simple walk is one that does not pass twice through the same point. In  $k$  dimensions let  $f_k(n)$  be the number of simple walks of length  $n + 1$  of which the first step is from the origin to the point  $(1, 0, 0, \dots)$ . It is easy to show that:

$$k^n \leq f_k(n) \leq (2k - 1)^n.$$

I shall improve the first of these inequalities to:

$$C_k \lambda_k^n \leq f_k(n)$$

where

$$\lambda_2 = 2.4142\dots$$

$$\lambda_3 = 4.0154\dots$$

$$\lambda_4 = 5.7176\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda_k = 2k - \log k + O(1) \quad \text{for large } k.$$

This is done by considering a certain class of simple walks for which the number of walks of a given length can be found.

### § 2. Making the problem algebraic

We shall consider the class of all walks that satisfy the following conditions. The first coordinate,  $x_1$  is non-decreasing. In the intervals in which  $x_1$  is constant,  $x_2$  is monotone. In the intervals in which both  $x_1$  and  $x_2$  are constant,  $x_3$  is monotone. In general ( $m \neq 1$ )  $x_m$  is monotone in any interval in which  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  are all constant.

To show that any walk of this kind is simple, take any interval of the walk; let  $m$  be the smallest suffix for which  $x_m$  is non constant in the interval. Either  $m = 1$  or not, but in either case  $x_m$  is monotone and non-constant in the interval so that the interval cannot have its two end-points the same.

<sup>1</sup> University of Adelaide, Australia.



With any finite walk (of the kind considered) we can associate a "signature" which is a row of  $k$  symbols. The first is always  $+$ , the others may be  $+$ ,  $-$ , or  $\pm$ , these symbols show how the walk may be extended by adding one more step. For any  $m$ , if it is permissible to increase or decrease  $x_m$  by 1, then the  $m$ th symbol is  $\pm$ , if it is permissible only to decrease it then the symbol is  $-$ , and if only to increase it then  $+$ . The effect of putting an extra step on the end of a finite walk, say an increase of 1 in  $x_m$ , is to make the  $m$ th symbol  $+$  (it had been either  $+$  or  $\pm$ ) and change all the symbols to the right of it to  $\pm$ , leaving the symbols to the left of the  $m$ th unaltered.

Let  $e_m$  be 0 if the  $m$ th symbol is  $\pm$  and be 1 otherwise. The number  $E = 1 + e_2 + 2e_3 + 4e_4 + \dots + 2^{k-2}e_k$  which takes values from 1 to  $2^{k-1}$ , represents the "state" of a finite walk.

Let  $A_k$  be the matrix of  $2^{k-1}$  rows and columns, whose  $(i, j)$  component is the number of ways in which one step may be added to a walk in state  $j$  to give a walk in state  $i$ . Let  $\mathbf{u}(n)$  be the column with  $m$ th component the number of walks of length  $n + 1$  that end in state  $m$ . Then  $\mathbf{u}(n + 1) = A_k \mathbf{u}(n)$  so that:  $\mathbf{u}(n) = A_k^n \mathbf{u}(0)$ .

The number of walks of the kind considered is the sum of the components of  $\mathbf{u}(n)$ .

#### Illustration in three dimensions

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

This walk has signature  $(+ - \pm)$  and state 2. The second column of the matrix  $A_3$  enumerates the four possible ways of taking the next step: Increase  $x_1$ , giving state 1 and signature  $(+ \pm \pm)$ .

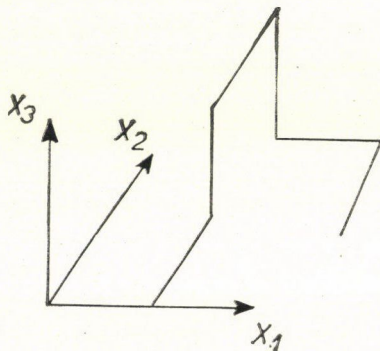


Fig. 1.

Decrease  $x_2$ , giving state 2 and signature  $(+ - \pm)$ .

Increase or decrease  $x_3$ , giving state 4 and signature either  $(+ - +)$  or  $(+ - -)$ .



### § 3. Finding the matrix

We shall show that:

$$A_1 = 1 \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and in general (using block notation)  $A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & A_k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

where 1 is the unit matrix of  $2^{k-1}$  rows and columns and  $2 = 1 + 1$ .

Take  $i$  and  $j$  both between 1 and  $2^{k-2}$ , so that the  $i, j$  element of  $A_k$  is in the upper left quarter. The starting and finishing states ( $j$  and  $i$ ) both have  $e_k = 0$ , so that the last symbol of their signatures is  $\pm$ . The required transition cannot be accomplished by a change in  $x_k$ , for that would put the walk into a state with  $e_k = 1$ . Therefore we need consider only the first  $k-1$  dimensions, for any change in the first  $k-1$  coordinates will change the signature in just the same way as the corresponding step in  $k-1$  dimensions. Therefore the required number is the  $(i, j)$  component of  $A_{k-1}$ .

Secondly consider  $i \leq 2^{k-2}$  and  $2^{k-2} < j \leq 2^{k-1}$ , i.e. the upper right quarter of the matrix. The initial state  $j$  differs from the state  $j - 2^{k-2}$  only in having  $e_k = 1$ , instead of  $= 0$ . The required number is therefore the  $(i, j - 2^{k-2})$  component of  $A_{k-1}$ , for the move must be in one of the first  $k-1$  coordinates and it will change the last symbol of the signature to  $\pm$  and will alter the others in just the same way as in the  $k-1$ -dimensional case.

Thirdly consider the lower left corner of the matrix,  $2^{k-2} < i \leq 2^{k-1}$  and  $j \leq 2^{k-2}$ . Thus  $e_k$  is 1 in the final state and 0 in the initial state. This transition can be accomplished only by an increase or decrease of 1 in the last coordinate, and both are permissible. The signature has the last symbol changed but the rest unchanged, so that from state  $j$  the walk must go into state  $j + 2^{k-2}$ . This quarter of  $A_k$  is therefore twice the unit matrix.

Similarly the lower right hand quarter is the unit matrix, the argument is the same except that there is only one direction in which  $x_k$  may change.

### § 4. The eigenvalues

Suppose that  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . The eigenvalues of  $A$  and  $B$  are related as follows.

$$\text{Let} \quad \begin{pmatrix} A & A \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Then  $A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = b\mathbf{x}$  and  $2\mathbf{x} + \mathbf{y} = b\mathbf{y}$  so that

$$\mathbf{x} = \frac{b-1}{2} \mathbf{y} \quad \text{and} \quad A \frac{b+1}{2} \mathbf{y} = \frac{b(b-1)}{2} \mathbf{y}.$$

Thus  $b(b-1)/(b+1) = a$  is an eigenvalue of  $A$ , and conversely if  $a$  is any eigenvalue of  $A$  then the two values of  $b$  obtained by solving the quadratic are eigenvalues of  $B$ .

The set of  $2^{k-1}$  eigenvalues of  $A_k$  can now be proved by induction to have the following properties:

One is real and between  $k$  and  $2k-1$ , call it  $\lambda_k$ .

One is real and between  $-1$  and  $-1/3$ .

The others are non-real and of modulus  $< \lambda_k$ .

For proof take any  $k$  for which these hold. The eigenvalues of  $A_{k+1}$  are the  $x$  for which  $x(x-1) = (x+1)y$  for any  $y$  that is an eigenvalue of  $A_k$ . The solutions of the quadratic are:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2}(y^2 + 6y + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

If  $y$  is real and  $k \leq y \leq 2k-1$ , then this gives two real roots, one is between  $k+1$  and  $2k+1$  and the other is negative and is given by:

$$\frac{-2y}{1 + y + (y^2 + 6y + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

and the denominator of this expression is clearly between  $2y$  and  $6y$ . The values of  $y$  between  $-1$  and  $-1/3$  and all the non-real values give non-real values of  $x$ , all of modulus less than

$$\lambda_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_k + \frac{1}{2}(\lambda_k^2 + 6\lambda_k + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Finally we shall show by induction that every matrix is non-degenerate, i.e. has unequal eigenvalues.

In solving the quadratic  $x(x-1) = (x+1)y$  for  $x$  in terms of  $y$ , two distinct values of  $y$  cannot give rise to the same value of  $x$ . A value of  $y$  can give a pair of equal values for  $x$  only if  $y = -3 \pm 8$ , and we have seen that neither of these values can occur among the eigenvalues of the matrices.

## § 5. The result for large $n$

In this section we shall omit the suffix  $k$  (the number of dimensions) from the matrix  $A_k$  and from  $\lambda_k$ . The number of walks of length  $n+1$  of the kind considered is:

$$(1, 1, \dots) A^n \mathbf{u}(0) \quad \text{where} \quad \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

It is clear by considering the random walks that every component of  $\mathbf{u}(k-1) = A^{k-1} \mathbf{u}(0)$  is  $\geq 1$ . Denote this column by  $\mathbf{v}$ . Now it is sufficient to consider the behaviour for large  $n$  of:

$$(1, 1, \dots) A^n \mathbf{v}.$$



Since  $A$  is not degenerate,  $\mathbf{v}$  can be expressed as a sum of eigenvectors, say:

$$\mathbf{v} = c_0 \mathbf{e}_0 + \sum c_i \mathbf{e}_i$$

where  $\mathbf{e}_0$  belongs to the eigenvalue  $\lambda$ , and the  $\mathbf{e}_i$  ( $1 \leq i \leq 2^{k-1} - 1$ ) belong to the other eigenvalues  $\mu_i$ . Let  $\mu = \max |\mu_i|$ , so that  $0 < \mu < \lambda$ .

First we must show that  $c_0 \neq 0$ . There is  $\varepsilon > 0$  such that

$$0 \leq \mathbf{v} + \varepsilon \mathbf{e}_0 \leq 2\mathbf{v}$$

(where  $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  means that  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  has every component  $\geq 0$ ). Since  $A$  has every component  $\geq 0$  it follows that:

$$0 \leq A^n \mathbf{v} + \varepsilon \lambda^n \mathbf{v} \leq 2 A^n \mathbf{v}.$$

If  $c_0 = 0$  then every component of  $A^n \mathbf{v}$  is  $O(\mu^n)$  for large  $n$ , and the inequality above give a contradiction; therefore  $c_0 \neq 0$ .

Considering large  $n$  it follows from:

$$c_0 \lambda^n \mathbf{e}_0 + \sum c_i \mu_i^n \mathbf{e}_i = A^n \mathbf{v} \geq 0$$

that  $c_0 \mathbf{e}_0 \geq 0$ , and therefore:

$$C = c_0(1, 1, \dots) \mathbf{e}_0 > 0.$$

The number of walks of length  $n + 1$  of the kind considered is therefore for large  $n$ :

$$C \lambda^n + O(\mu^n).$$

If  $0 < C_k < C$  then (putting back the suffix  $k$  on  $\lambda$ ):

$$f_k(n) > C_k \lambda_k^n \text{ for all sufficiently large } n.$$

## § 6. The result for large $k$

The equation for the eigenvalues is:

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + 2 - 2/(1 + \lambda_k).$$

Since  $\lambda_k > k$ , this gives:

$$\lambda_k > \lambda_{k-1} + 2 - 2/(1 + k).$$

Now take any  $k$  for which  $\lambda_{k-1} > 2(k-1) - 2 \log k$ .

$$\lambda_k > 2(k-1) - 2 \log k + 2 - 2/(1+k)$$

$$\lambda_k > 2k - 2 \log(k+1) + 2 \log(1 + 1/k) - 2/(1+k)$$

$$\lambda_k > 2k - 2 \log(k+1).$$



This inequality holds when  $k = 2$ , so that it is true for all larger  $k$  by induction. Therefore for all  $k \geq 2$  we have:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{1 + \lambda_k} &> -\frac{1}{k - \log(k + 1)} = -\frac{1}{k} - \frac{\log(k + 1)}{k(k - \log(k + 1))} \\ &> -\log \frac{k}{k - 1} - \frac{\log(k + 1)}{k(k - \log(k + 1))}. \end{aligned}$$

Therefore we have the inequalities:

$$\begin{aligned} \lambda_k &> \lambda_{k-1} + 2 - \log \frac{k}{k - 1} - \frac{\log(k + 1)}{k(k - \log(k + 1))} \\ \lambda_{k-1} &> \lambda_{k-2} + 2 - \log \frac{k - 1}{k - 2} - \frac{\log k}{(k - 1)(k - 1 - \log k)} \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_3 &> \lambda_2 + 2 - \log \frac{3}{2} - \frac{\log 4}{3(3 - \log 4)}. \end{aligned}$$

Adding these inequalities gives:

$$\lambda_k > \lambda_2 + 2k - 4 - \log(k/2) - \sum_3^k \frac{\log(r + 1)}{r(r - \log(r + 1))}$$

so that  $\lambda_k > 2k - \log k + O(1)$  for large  $k$ .

To obtain the opposite inequality we shall prove by induction that  $\lambda_k < 2k - \log(k + 2)$  for all  $k > 1$ .

Let  $k$  be (if possible) the smallest integer  $> 1$  for which the inequality is not true. Then:

$$2k - 2 - \log(k + 1) > \lambda_{k-1} = \lambda_k - 2 + 2/(1 + \lambda_k)$$

and since the right hand side is an increasing function of  $\lambda_k$ :

$$> 2k - \log(k + 2) - 2 + 2/(2k + 1 - \log(k + 2))$$

$$\log \frac{k + 2}{k + 1} > 2/(2k + 1 - \log(k + 2)).$$

This is a contradiction because the left hand side  $< 1/(k + 1)$ .

The inequality holds when  $k = 2$  and therefore by induction holds for all  $k > 2$ . This proves that  $\lambda_k = 2k - \log k + O(1)$  for large  $k$ .

(Received November 15, 1960.)

## СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

C. RENNIE

## Резюме

Мы назовем случайным блужданием в  $k$ -мерном пространстве такую последовательность точек решетки, в которой расстояние между двумя последующими точками равно единице. Блуждание мы назовем «простым» если последовательность каждую свою точку содержит только один раз. Пусть  $f_k(n)$  будет число простых случайных блужданий длиной  $n$ , исходящих из начала координат. Цель настоящей статьи показать, что

$$f_k(n) \geq C_k \lambda_k^n,$$

где

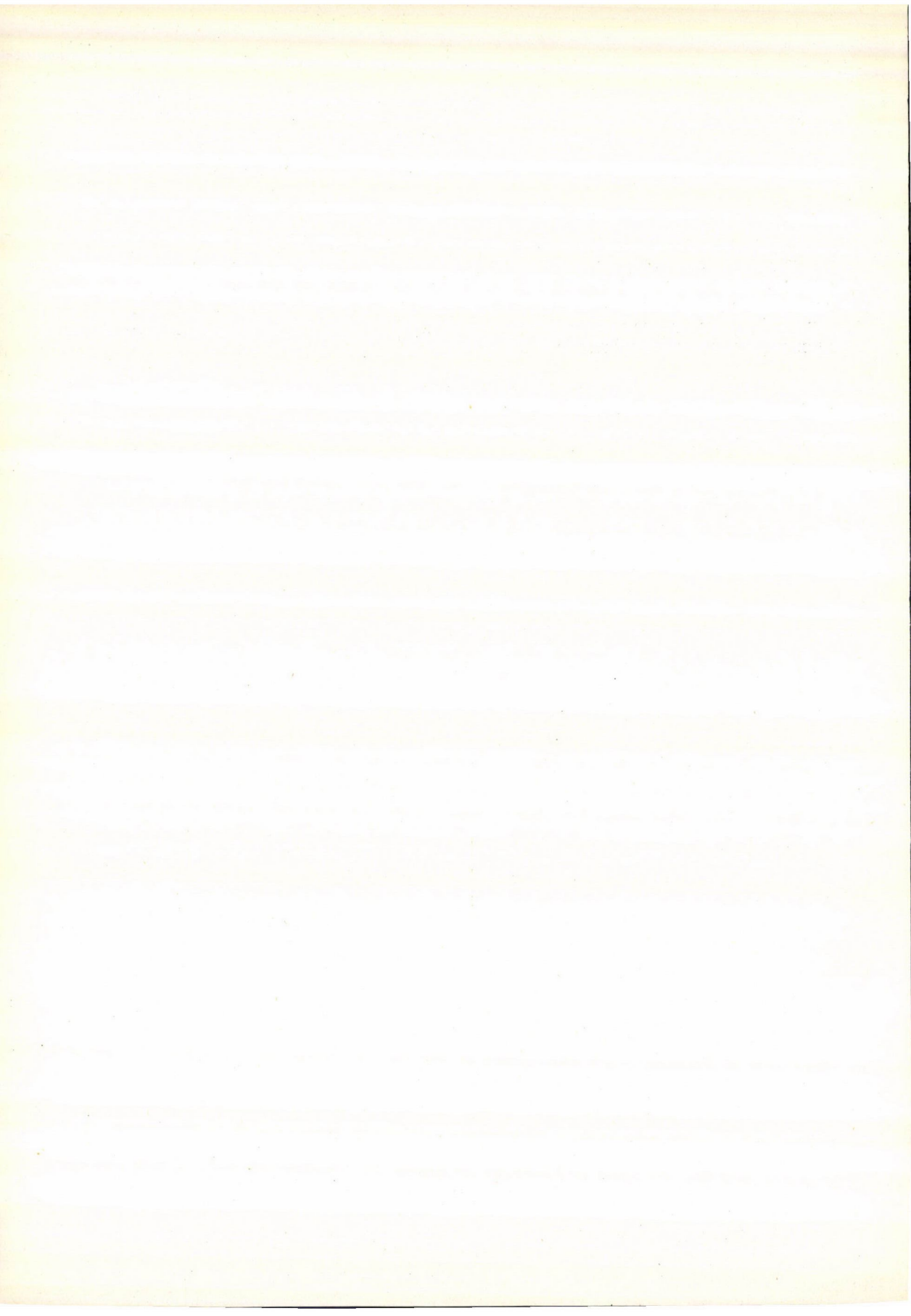
$$\lambda_2 = 2,41 \dots,$$

$$\lambda_3 = 4,01 \dots,$$

$$\lambda_4 = 5,72 \dots$$

и

$$\lambda_k = 2k - \log k + O(1).$$





# SUR LA VITESSE DE CONVERGENCE DU DEVELOPPEMENT SELON DES FONCTIONS PROPRES DE STURM-LIOUVILLE

par  
G. FREUD et M. SALLAY

Soit  $q(x)$  continue dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et considérons dans cette intervalle l'équation différentielle

$$y'' + [\lambda - q(x)] y = 0$$

avec les conditions aux limites

$$(1) \quad a_1 y(0) + b_1 y'(0) = 0; \quad a_2 y(\pi) + b_2 y'(\pi) = 0.$$

Désignons par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  les valeurs propres de l'équation et par  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots$  les fonctions propres normées.

Il est bien connu qu'au cas où  $q(x)$  est continue il existe une suite des valeurs propres  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  (les  $\lambda_n$  sont réelles) telles que les fonctions leur appartenant] forment un système orthonormal et complet. De plus nous pouvons écrire pour les valeurs propres  $\lambda_n$  et pour les fonctions  $v_n(x)$  les formules asymptotiques suivantes (voir [3]):

$$\lambda_n = n^2 + O(1),$$

$$v_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx + O(n^{-1}) & \text{pour } b_1 b_2 \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O(n^{-2}) & \text{pour } b_1 = b_2 = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x + O(n^{-2}) & \text{pour } b_2 = 0, \quad b_1 \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x + O(n^{-1}) & \text{pour } b_1 = 0, \quad b_2 \neq 0, \end{cases}$$

où les fonctions  $v_n(x)$  sont déterminées par la condition que  $v_n(x)$  soit positive dans le voisinage à droite du point 0.

Soit  $f(x)$  continue dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et satisfaisant aux conditions (1). Nous entendons par développement selon des fonctions propres de Sturm—Liouville la série

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(x) \quad \text{où} \quad a_k = \int_0^{\pi} f(x) v_k(x) dx.$$

On sait que la série (2) est convergente ou divergente suivant que la série de Fourier de  $f(x)$  est convergente ou divergente. (Voir [1] et [2]). De plus d'après les formules asymptotiques connues:

$$(3) \quad \int_0^\pi \left| \sum_0^n v_k(x) v_k(\xi) \right| dx = O(\log n).$$

Dans son travail [4] M. G. I. NATANSON a affirmé les propositions suivantes:

Soit  $f(x)$  continue dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et satisfaisant aux conditions (1), et désignons par  $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k v_k(x)$  le polynôme de la meilleure approximation de  $f(x)$  dans la norme  $C$  selon les fonctions propres de Sturm—Liouville. Alors

$$A.) \quad |f(x) - \Phi_n(x)| = O(1) \left[ \omega(f, n^{-1}) + \frac{1}{n} \|f\| \right],$$

où  $\omega(f, \delta)$  est le module de la continuité ordinaire.

Supposons maintenant que les fonctions  $f(x)$  et  $q(x)$  admettent une  $r$ -ième dérivée continue et désignons par  $L^{(i)}$ ;  $i = 0, 1, \dots, k = \left[ \frac{r-1}{2} \right]$  les opérateurs

$$L^{(0)} f = f(x); L^{(1)} f = f'' - q(x) f(x); \dots; L^{(i)} f = L^{(1)} (L^{(i-1)} f),$$

où les fonctions  $L^{(i)} f$  satisfont aux conditions (1). Alors

$$B.) \quad |f(x) - \Phi_n(x)| = O(n^{-r}) \left[ \omega(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\| \right].$$

Soit maintenant  $s_n(x; f) = \sum_{k=0}^n a_k v_k(x)$ . En considérant les théorèmes de NATANSON, et d'après (3), nous pouvons écrire l'estimation suivante:

$$(4) \quad |f(x) - s_n(x; f)| \leq O(n^{-r} \log n) \left[ \omega(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\| \right].$$

Dans notre ouvrage nous donnerons une estimation plus précise de la vitesse de convergence de la série (2) à l'aide de  $\omega_2(f, \delta)$ , où

$$\omega_2(f, \delta) = \max_{\substack{|h| \leq \delta \\ x \in [0, \pi]}} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|.$$

Nous démontrerons notamment les théorèmes suivants:



**Théorème I.** Soit  $f(x)$  continue dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et satisfaisant aux conditions (1).<sup>1</sup> Supposons de plus que le déterminant<sup>2</sup>

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2\pi + b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors

$$|f(x) - s_n(x, f)| \leq K_1 \log n [\omega_2(f, n^{-1}) + K_2 n^{-1} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} f\|]$$

où

$$\delta^{(0)} f = \begin{cases} 0 & \text{pour } b_1 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{n}\right) - f(0) & \text{pour } b_1 \neq 0 \\ \frac{\pi}{n} - f'(0) & \end{cases}$$

$$\delta^{(1)} f = \begin{cases} 0 & \text{pour } b_2 = 0 \\ f(\pi) - f\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) & \text{pour } b_2 \neq 0 \\ \frac{\pi}{n} - f'(\pi) & \end{cases}$$

$K_1$  et  $K_2$  sont des constantes indépendantes de  $x$ ,  $n$  et  $f$ .

Nous remarquons que pour établir notre théorème nous donnerons une démonstration directe sans appliquer le théorème de NATANSON.

**Démonstration.** Dans les travaux [6] et [7] nous avons démontré la proposition suivante.

Soit  $\mathcal{C}^*$  la classe des fonctions  $g(x)$  pour lesquelles  $g(x)$  est continue dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et satisfait aux conditions

$$a_i g(0) + b_i g(\pi) + c_i g'(0) + d_i g'(\pi) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Désignons par  $\mathcal{C}_2^*$  la classe des fonctions admettant une seconde dérivée continue appartenant à la classe  $\mathcal{C}^*$ .

Soit  $H$  une transformation linéaire qui applique la classe  $\mathcal{C}^*$  dans l'espace de Banach  $B$  de telle manière que

$$\|Hg\|_B \leq \alpha \|g\|_C \quad (g \in \mathcal{C}^*),$$

$$\|Hg\|_B \leq \beta \|g''\|_C \quad (g \in \mathcal{C}_2^*);$$

alors pour tous les  $v \geq 1$  entiers :

$$(6) \quad \|Hg\|_B \leq K(\alpha + \beta v^2) \left[ \omega_2(g, v^{-1}) + \frac{1}{v} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} g\| \right].$$

<sup>1</sup> Si dans les conditions (1)  $b_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ), nous ne faisons aucune restriction sur le fait que la fonction est dérivable aux extrémités de l'intervalle.

<sup>2</sup> D'après cette condition, parmi les fonctions  $f(x)$ , il n'y a pas de fonction linéaire excepté la fonction  $f(x) \equiv 0$ .



Soit maintenant  $\{Hf\} = \{f - s_n(x; f)\}$  et  $v = n$ . Alors en vertu du théorème (6) il nous suffit de démontrer les assertions suivantes:

Soit  $\mathcal{O}^*$  la classe des fonctions  $f(x)$  pour lesquelles  $f(x)$  est continue dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et satisfait aux conditions (1), et supposons que la condition (5) est remplie.

Assertions:

$$(7) \quad \|s_n(x; f)\| \leq k_1 \log n \|f(x)\| \quad (f \in \mathcal{O}^*),$$

$$(8) \quad \|f(x) - s_n(x; f)\| \leq k_2 n^{-2} \log n \|f''\| \quad (f \in \mathcal{O}_2^*),$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes indépendantes de  $x$ ,  $n$  et  $f$ .

La première assertion découle immédiatement des formules asymptotiques obtenues pour les fonctions  $v_k(x)$ .

Soit maintenant  $f \in \mathcal{O}_2^*$ . Alors la fonction  $f(x)$  peut être établie comme la solution de l'équation

$$(9) \quad f''(x) - q(x)f(x) = h(x) \quad (\text{où } h(x) \text{ est continue})$$

avec les conditions aux limites (1), et nous pouvons obtenir la solution sous la forme

$$f(x) = - \int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(\xi)}{\lambda_k} h(\xi) d\xi.$$

En vertu des formules asymptotiques, nous pouvons écrire l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(x; f)| &= \left| \int_0^\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(\xi)}{\lambda_k} h(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} \right| dt + O\left(\sum_{n+1}^{\infty} k^{-3}\right) \right\} \max |h(x)|. \end{aligned}$$

En considérant que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{\cos kt}{k^2} \right| \leq \frac{\pi}{n^2 |t|} \quad (0 < \delta \leq t \leq \pi)$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} \leq \frac{1}{n} < 1 \quad (0 \leq t \leq \delta),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(x; f)| &\leq \max |h(x)| \left\{ \int_0^{\frac{1}{n^2}} dt + \frac{\pi}{n^2} \int_{\frac{1}{n^2}}^\pi \frac{dt}{t} + O(n^{-2}) \right\} = \\ &= \max |h(x)| n^{-2} [\log n + O(1)]. \end{aligned}$$

Pour établir l'assertion (8) il faut encore démontrer que

$$(10) \quad \max |h(x)| \leq C_1 \max |f''(x)| \quad (C_1 = \text{const.}).$$

D'après la forme (9) de  $h(x)$  il suffit de montrer qu'au cas où  $f(x) \in \mathcal{C}_2^*$

$$\max |f(x)| \leq C_2 \max |f''(x)|,$$

où  $C_2$  est une constante indépendante de  $f(x)$ .

Opérons de la manière suivante:

Cherchons la solution de l'équation différentielle  $y'' = g(x)$  avec les conditions aux limites (1). Nous pouvons obtenir la solution sous la forme

$$y(x) = \int_0^x (x-t) g(t) dt + Ax + B.$$

Pour déterminer  $A$  et  $B$  les conditions (1) forment un système d'équations linéaires qui est résoluble d'après la condition (5). Nous obtenons

$$\begin{aligned} y(x) = & \int_0^x (x-t) y''(t) dt + \\ & + \frac{1}{a_1 a_2 \pi + b_2 a_1 - a_2 b_1} \left[ (b_1 a_2 - a_1 a_2 x) \int_0^\pi (\pi-t) y''(t) dt + \right. \\ & \left. + (b_1 b_2 - a_1 b_2 x) \int_0^\pi y''(t) dt \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\max |y(x)| \leq C \max |y''(x)|.$$

Ceci établit notre proposition (8).

Supposons maintenant que les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  admettent une  $r$ -ième dérivée continue, que les fonctions  $L^{(i)} f$ ,  $i = 1, 2, \dots, k = \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor$  satisfont aux conditions (1) et que (5) est remplie.

## Théorème 2.

$$(11) \quad |f(x) - s_n(x; f)| \leq O \left( \frac{\log n}{n^r} \right) \left[ \omega_2(f^{(n)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\| + \frac{1}{n} \max_{i=0,1} \sum_{m=1}^r \|\delta^{(i)} f^{(m)}\| \right].$$

**Démonstration.** Soit

$$\bar{\tau}_n(x; f) = \frac{\sum_{k=n+1}^{2n} s_n(x, f)}{n}$$

a moyenne de DE LA VALLÉE POUSSIN de  $f(x)$  selon des fonction propres  $v_n(x)$ .



Désignons par  $\tau_n(x; f)$  la moyenne de DE LA VALLÉE POUSSIN formée à partir de la série de Fourier de  $f(x)$ . Alors en vertu des théorèmes relatifs à l'équi-convergence et selon une estimation bien connue de la norme de  $\tau_n(x)$  (Voir [5]):

$$(12) \quad |\bar{\tau}_n(x, f)| \leq |\bar{\tau}_n - \tau_n| + |\tau_n| \leq (3 + K) \|f\|.$$

Compte tenu de  $\bar{\tau}_n(\Phi(x)) = \Phi_n(x; f)$  nous obtenons

$$(13) \quad \begin{aligned} |\bar{\tau}_n(x, f) - f(x)| &= |\tau_n[j - \Phi_n(x; f)] - \\ &- [f - \Phi_n(x; f)]| \leq K |f - \Phi_n(x, f)| \quad (K = \text{const}). \end{aligned}$$

D'autre part, vu que

$$\|f(x) - s_n(x, f)\| \leq \|f(x) - \bar{\tau}_n(x, f)\| + \|\bar{\tau}_n(x, f) - s_n(x, f)\|,$$

d'après les relations (3), (12) et (13) pour établir notre théorème 2 il nous suffit de démontrer la proposition suivante:

$$(14) \quad \begin{aligned} \|f(x) - \bar{\tau}_n(x, f)\| &\leq O(n^{-r}) \left[ \omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \max_{i=0,1} \sum_{m=0}^r \|\delta^{(i)} f^{(m)}\| \right]. \end{aligned}$$

Tout d'abord nous vérifierons les propositions suivantes:

a) Soit  $g(x) \in \mathcal{E}^*$ . Soit de plus  $H$  une transformation linéaire qui applique à classe  $\mathcal{E}^*$  dans l'espace de Banach  $B$  de telle manière que

$$\|Hg\|_B \leq O(1) \|g\| \quad (g \in \mathcal{E}^*)$$

$$\|Hg\|_B \leq O(n^{-2}) \left[ \|g''\| + \frac{1}{n} (\|g\| + \|g'\|) \right] \quad (g \in \mathcal{E}_2^*)$$

alors pour tous les  $v \geq 1$  entiers:

$$(15) \quad \|Hg\|_B \leq O(1) \left[ \omega_2(g, v^{-1}) + \frac{1}{v^2} \|g\| + \frac{1}{v} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} g\| \right].$$

L'idée de la démonstration est analogue à la démonstration [7]; il ne faut que remarquer que le polynôme  $p_v(x)$  défini dans [7] satisfait aux relations

$$\|p_v(x)\| \leq O(1) \|g(x)\|; \quad \|p'_v(x)\| \leq O(v) \|g(x)\|.$$

b) Soit  $L^{(i)} f \in \mathcal{E}_2^*$ ,  $i = 0, 1, \dots, \left[ \frac{r-1}{2} \right] = k$ .

Alors

$$(16) \quad \|L^{(k)} f\| \leq O(1) \|f^{(k)}\|.$$

Nous vérifions (16) par récurrence. D'après (10) il découle que pour  $L^{(i)} f \in \mathcal{E}_2^*$

$$(17) \quad \|L^{(i)} f\| \leq O(1) \|(L^{(i)} f)''\|.$$



Supposons que

$$\|L^{(k-1)}f\| \leq O(1) \|f^{(r-2)}\|.$$

Alors en vertu de la définition de  $L^{(k)}f$  et d'après (17):

$$\begin{aligned} \|L^{(k)}f\| &= \|(L^{(k-1)}f)' - q(x) L^{(k-1)}f\| \leq [O(1) + \|q(x)\|] \|L^{(k-1)}f\| \leq \\ &\leq O(1) \|f^{(r-2)*}\| = O(1) \|f^{(r)}\|. \end{aligned}$$

c) Soit  $L^{(k)}f \in \mathcal{O}^*$ , alors

$$(18) \quad \omega_2(L^{(k)}f, n^{-1}) \leq O(1) \omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + O(n^{-2}) \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\|.$$

En vertu de la définition de  $L^{(k)}f$  nous pouvons écrire  $L^{(k)}f$  sous la forme

$$L^{(k)}f = f^{(r)}(x) + r(x)$$

où

$$r(x) = - \sum_{i=1}^{k-1} [q(x) L^{(i-1)}f(x)]^{(r-2[i+1])},$$

et  $r(x)$  admet une seconde dérivée continue, ainsi

$$\omega_2(r(x), n^{-1}) \leq O(n^{-2}) \|r(x)\|,$$

alors

$$\omega_2(L^{(k)}f, n^{-1}) \leq O(1) \omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + O(n^{-2}) \|r(x)\|,$$

d'où découle l'assertion (18) d'après (17).

d)  $\bar{\tau}_n(x, f)$  étant une transformation des coefficients de  $f(x)$ :

$$(19) \quad \bar{\tau}_n(L^{(k)}f) = L^{(k)}[\bar{\tau}_n(f)].$$

Considérons maintenant la classe des fonctions  $L^{(k)}f$ . En vertu des théorèmes A.) et B.) de NATANSON et d'après (13) nous pouvons écrire les estimations suivantes:

$$\|L^{(k)}f - \bar{\tau}_n(L^{(k)}f, x)\| \leq O(1) \|L^{(k)}f\|; \quad (L^{(k)}f \in \mathcal{O}^*)$$

$$\|L^{(k)}f - \bar{\tau}_n(L^{(k)}f, x)\| \leq O(n^{-2}) \left[ \|L^{(k)}f''\| + \frac{1}{n} (\|L^{(k)}f\| + \|L^{(k)}f'\|) \right]; \quad (L^{(k)}f \in \mathcal{O}_2^*).$$

La suite des transformations  $\{H_n\} = \{E(L^{(k)}f, x) - \tau_n(L^{(k)}f, x)\}$  est déjà une suite de transformations linéaires; alors en appliquant (15) et (10) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|L^{(k)}[f - \bar{\tau}_n(x; f)]\| &= \|L^{(k)}f - \bar{\tau}_n(x, L^{(k)}f)\| \leq \\ &\leq O(1) \left[ \omega_2(L^{(k)}f, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \|L^{(k)}f\| + \frac{1}{n} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} L^{(k)}f\| \right], \end{aligned}$$

d'où d'après (17) et (18)

$$(21) \quad \begin{aligned} & \|L^{(k)}[f - \bar{\tau}_n(x, f)]\| \leq \\ & \leq O(1) \left[ \omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_1^r \|f^{(m)}\| + \frac{1}{n} \max_{i=0,1} \sum_1^r \|\delta^{(i)} f^{(m)}\| \right]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction  $F(x) = f(x) - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x; f)$ . La fonction  $F(x)$  admet une  $r$ -ième dérivée continue et satisfait aux conditions (1). Alors en vertu du théorème de Natanson:

$$\begin{aligned} \|F(x) - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]} F(x)\| & \leq O(n^{-r}) \left[ \omega(F, n^{-1}) + \frac{1}{n} \sum_0^r \|F^{(m)}(x)\| \right] = \\ & = O(n^{-r}) \left[ \|L^{(k)} F(x)\| + \frac{1}{n} \sum_0^r \|L^{(k)} F(x)^{(m)}\| \right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f(x) - \bar{\tau}_n(x, f)\| & = \left\| \left[ f(x) - \bar{\tau}_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f) \right] - \bar{\tau}_n \left[ f(x) - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f) \right] \right\| \leq \\ & \leq O(n^{-r}) \left[ \|L^{(k)}(f - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f))\| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^r \|L^{(k)}(f - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f))\| \right], \end{aligned}$$

d'où découle immédiatement l'assertion (14) d'après la relation (16).

(Reçu le 24 Novembre 1960.)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAAR, A.: "Zur Theorie der orthogonale Funktionensysteme, I". *Mathematische Annalen* **69** (1910) 331—371.
- [2] ZYGMUND, A.: "Sur la théorie Riemannienne de certains systèmes orthogonaux, I." *Studia Mathematica* **2** (1930) 97—170.
- [3] ЛЕВИТАН, Б. М.: *Разложение по собственным функциям*. Государственное издательство технико-теоретического литературы. Москва, 1950. 9—39.
- [4] НАТАНСОН, Г. И.: "К теории приближения функций линейными комбинациями собственных функций задачи Штурма—Лиувилля." *Доклады Академии Наук СССР* **114** (1957) 2, 263—266.
- [5] НАТАНСОН, И. П.: *Конструктивная теория функций*. Государственное издательство технико-теоретического литературы. Москва—Ленинград, 1949.
- [6] FREUD, G.: "Sui procedimenti lineari d'approssimazione". *Rend. Sc. Fis. Math. e Nat.* serie VIII, Vol XXVI, fasc. 5.
- [7] SALLAY, M.: "Sur une procédé d'approximation avec des conditions aux limites." *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **6** (1961) 65—70.

# О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ШТУРМА—ЛИУВИЛЬЯ

G. FREUD и M. SALLAY

## Резюме

Обозначим через  $v_n(x)$  нормированные собственные функции дифференциального уравнения

$$y'' + [\lambda - q(x)] y = 0$$

удовлетворяющие условиям (1) и пусть будет

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(x) \quad \text{где} \quad a_k = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

разложение в ряд по собственным функциям  $v_k(x)$  функций  $f(x)$  непрерывных и удовлетворяющих условиям (1) в интервале  $[0, \pi]$ .

В настоящей статье авторы исследуют скорость сходимости вышеуказанного ряда и доказывают следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  функция непрерывная в интервале  $[0, \pi]$  и удовлетворяющая в нем условиям (1) и пусть далее

$$S_n(x; f) = \sum_{k=0}^n a_k v_k(x).$$

Тогда

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leq k_1 \log n [\omega_2(f, n^{-1}) + k_2 n^{-1} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} f\|],$$

$$\delta^{(0)} f = \begin{cases} 0 & \text{если } b_1 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{n}\right) - f(0) & \text{если } b_1 \neq 0 \\ \frac{\pi}{n} & \end{cases}$$

$$\delta^{(1)} f = \begin{cases} 0 & \text{если } b_2 = 0 \\ f(\pi) - f\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) & \text{если } b_2 \neq 0 \\ \frac{\pi}{n} & \end{cases}$$

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в интервале  $[0, \pi]$   $r$ -раз непрерывно дифференцируемы. Пусть  $L^{(0)} f = f$ ,  $L^{(1)} f = f'' - q(x) f$  и  $L^{(i)} f = L^{(1)} L^{(i-1)} f$  ( $i = 2, 3, \dots$ ). Предположим далее, что функции

$L^{(i)} f$  ( $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{r-1}{2}\right]$ ) удовлетворяют условиям (1). Тогда

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leq O\left(\frac{\log n}{n^r}\right) \left[ \omega^2(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\| + \frac{1}{n} \max_{i=1,0} \|\delta^{(i)} f^{(m)}\| \right].$$





# ON THE NUMBER OF INTERSECTIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL RANDOM WALK

by  
E. CSÁKI

## Introduction and notation

An interesting problem of the one-dimensional random walk is the investigation of how often a certain point is touched by the particle. CHUNG and HUNT [1] as well as FELLER [2] deal with such problems, they determine namely the distribution of the number of returns to the origin. The formulae given in paper [1] by the method of generating functions contain implicitly the case of intersections (change of sign). In present paper an elementary method is given for the number of intersections not only in the origin, but also in any arbitrary point. In a common paper with I. VINCZE [3] we have determined in connection with a statistical problem the distribution of the number of intersections in case the particle returns at the end to the origin. Now this condition is disregarded.

Let us mention that our results have some common points with the paper of BATSCHELET [4].

In the following we introduce the terminology and notations:

Let us denote by  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) independent random variables taking the values  $+1$  and  $-1$  with probabilities  $1/2$  each, and by  $s_j$  the partial sum

$$s_j = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad s_0 = 0.$$

Thus we shall call the array  $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$  (finite or infinite) the path of the particle.

If the points  $(i, s_i)$  are represented in the plane and each of them is connected with the next one, we obtain a figure illustrating the path of the particle.

We shall say that the path intersects the line  $y = k$  at the place  $i$ , if

$$s_{i-1} = k - 1, \quad s_i = k, \quad s_{i+1} = k + 1$$

or

$$s_{i-1} = k + 1, \quad s_i = k, \quad s_{i+1} = k - 1.$$

The number of intersections of the line  $y = k$  by the path  $\{s_0, s_1, \dots, s_j\}$  will be denoted by  $\lambda_j^{(k)}$ ,  $\lambda_j^{(0)} = \lambda_j$ .

Capital letters with one or more indices will denote sets of the paths of certain property. Namely:

$$\begin{array}{lll} A_j^k & \text{for which} & s_j = k, \quad A_{2n}^0 = A_{2n}. \\ A_{2n,l} & \text{for which} & s_{2n} = 0, \quad \lambda_{2n} = l \end{array}$$

$A_{2n,l}^+$	for which	$s_{2n} = 0, \lambda_{2n} = l, s_1 = +1$	$(s_1 = -1)$
$B_j^+$	for which	$s_0 = 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \dots, s_j \geq 0$	
$B_j^-$	for which	$s_0 = 0, s_1 \leq 0, s_2 \leq 0, \dots, s_j \leq 0$	
$C_j^k$	for which	$s_0 = 0, s_1 < k, s_2 < k, \dots, s_{j-1} < k,$	
		$s_j = k$	$k \geq 0.$

Obviously

$$C_j^k \subset A_j^k$$

$$D_j^k = A_j^k - C_j^k$$

$$E_{j,l}^k \quad \text{for which } \lambda_j^{(k)} = l. \quad E_{j,l}^0 = E_{j,l}.$$

$E_{j,l}^+(E_{j,l}^-)$  for which  $\lambda_j = l$  and  $s_1 = +1$  ( $s_1 = -1$ ).  $N(X)$  denotes the number of paths of  $X$ .

### § 1. The number of intersections

To begin with, we shall state two lemmas:

**Lemma 1.** *There can be set up a one-to-one correspondence between the sets  $C_{2r,l}^{2l}$  and  $A_{2r,l-1}^+$ .*

For proof we refer to [3].

**Lemma 2.** *There can be set up a one-to-one correspondence between the sets  $A_{2r}$  and  $B_{2r}^+$  (resp.  $B_{2r}^-$ ).*

This lemma holds as the number of paths of  $A_{2r}$  and  $B_{2r}^+$  as well equals  $\binom{2r}{r}$  (see FELLER [2]). A concrete one-to-one correspondence can be set up in the following way:

Let  $\{s_0, s_1, \dots, s_{2r}\}$  be a path of  $A_{2r}$ . Let further be

$$\mu = \max(s_0, s_1, \dots, s_{2r}).$$

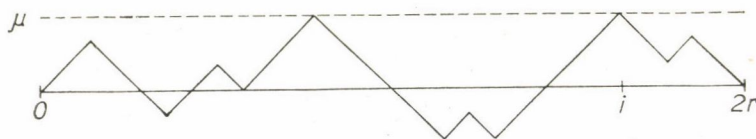


Figure 1.

Then there exists such an  $i$ , for which  $s_i = \mu$ , but  $s_{i+1} < \mu, s_{i+2} < \mu, \dots, s_{2r-1} < \mu$  (see fig. 1). Let us alter the direction of the section between 0 and  $i$ , i.e. we replace  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$  by  $\xi_i, \xi_{i-1}, \dots, \xi_1$ . Then let us reflect the remaining section of the path on the line of height  $\mu$  (see fig. 2). Thus we obtain a path  $\{s'_1, s'_2, \dots, s'_{2r}\}$  of  $B_{2r}^+$  having  $s'_{2r} = 2\mu$ .



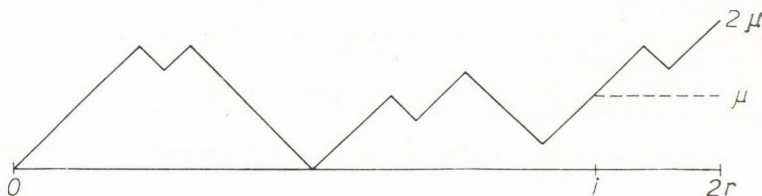


Figure 2.

Reversely if  $\{s'_1, s'_2, \dots, s'_{2r}\}$  denotes a path of  $B_{2r}^+$ , then let  $\mu$  be defined by  $s'_{2r} = 2\mu$ . Then there exists such an  $i$ , for which  $s'_i = \mu$  and  $s'_{i+1} > \mu$ ,  $s'_{i+2} > \mu, \dots, s'_{2r-1} > \mu$ . If the same procedure as above is applied for the sections between 0 and  $i$  and between  $i$  and  $2r$ , resp., we obtain a path of  $A_{2r}$ . Thus we have a one-to-one correspondence and Lemma 2 is proved.

Now we shall prove

**Theorem 1.**

$$\mathbf{P}(\lambda_{2n-1} = l) = \mathbf{P}(\lambda_{2n} = l) = \begin{cases} \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-1}{n+l}, & \text{if } l = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}, & \text{if } l = 0. \end{cases}$$

It is obvious that the equation  $\mathbf{P}(\lambda_{2n-1} = l) = \mathbf{P}(\lambda_{2n} = l)$  holds because at the  $2n$ -th step new intersection can not occur. Thus it suffices to determine the probability  $\mathbf{P}(\lambda_{2n} = l)$  only.

The statement is well known for  $l = 0$  (see e. g. FELLER [2]).

Theorem 1 will be proved for  $l > 0$  by giving a one-to-one correspondence between the sets  $E_{2n,l}^+$  (or  $E_{2n,l}^-$ ) and  $D_{2n}^{2l}$ .

Let  $\{s_0, s_1, \dots, s_{2n}\}$  be a path of  $E_{2n,l}^+$ . Let us denote by  $2\tau$  the last place of intersection ( $\tau < n$ ). Then the section  $\{s_0, s_1, \dots, s_{2\tau}\}$  is a path of  $A_{2\tau,l-1}^+$ , the section  $\{s_{2\tau}, s_{2\tau+1}, \dots, s_{2n}\}$  a path of  $B_{2(n-\tau)}^+$  or  $B_{2(n-\tau)}^-$  (see fig. 3).

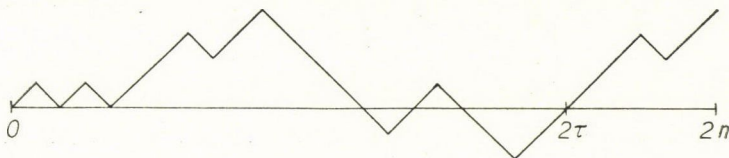


Figure 3.

According to Lemma 1 and Lemma 2, there can be set up a correspondence between the first section and a path of  $C_{2\tau}^{2l}$  and between the second section and path of  $A_{2(n-\tau)}$  respectively. By joining this path of  $A_{2(n-\tau)}$  to the end of the path of  $C_{2\tau}^{2l}$  we obtain a path of  $D_{2n}^{2l}$  (see fig. 4).

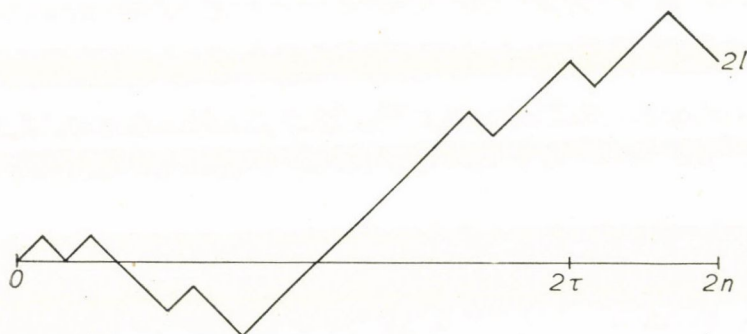


Figure 4.

Reversely, if we have a path  $\{s_1, s_2, \dots, s_{2n}\}$  of  $D_{2n}^{2l}$ , then let  $2\tau$  ( $\tau < n$ ) be defined by:

$$s'_0 < 2l, \quad s'_1 < 2l, \quad s'_2 < 2l, \dots, s'_{2\tau-1} < 2l, \quad s'_{2\tau} = 2l.$$

The section  $\{s'_0, s'_1, \dots, s'_{2\tau}\}$  is a path of  $C_{2\tau}^{2l}$  and the section  $\{s'_{2\tau}, \dots, s'_{2n}\}$  a path of  $A_{2(n-\tau)}^{2l}$ . Making use of the two lemmas we may obtain a path of  $E_{2n,l}^+$ .

As the number of paths of  $E_{2n,l}^+$  is twice the number of paths of  $E_{2n,l}^-$  (or  $E_{2n,l}^-$ ) and as the number of paths of  $D_{2n}^{2l}$  is

$$N(D_{2n}^{2l}) = N(A_{2n}^{2l}) - N(C_{2n}^{2l}),$$

applying the well-known relation (see e. g. FELLER [2])

$$N(A_{2n}^{2l}) = \binom{2n}{n+l}$$

$$N(C_{2n}^{2l}) = \binom{2n}{n+l} \frac{l}{n},$$

we obtain

$$N(E_{2n,l}) = 2 \binom{2n}{n+l} \left(1 - \frac{l}{n}\right) = 4 \binom{2n-1}{n+l}.$$

Since all the sequences of the +1-s and -1-s are equiprobable, this gives the proof of Theorem 1.

## § 2. The number of intersections in the height $k$

Now we shall proceed to the determination of the distribution of  $\lambda_j^{(k)}$ . We shall prove

**Theorem 2.** For a fixed positive even  $k$

$$\mathbf{P}(\lambda_{2n-1}^{(k)} = l) = \mathbf{P}(\lambda_{2n}^{(k)} = l) = \frac{\binom{2n}{n+l+\frac{k}{2}}}{2^{2n-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, n - \frac{k}{2}$$

and for a fixed, positive odd  $k$

$$\mathbf{P}(\lambda_{2n}^{(k)} = l) = \mathbf{P}(\lambda_{2n+1}^{(k)} = l) = \frac{\binom{2n+1}{n+l+\frac{k+1}{2}}}{2^{2n}}, \quad l = 1, 2, \dots, n - \frac{k-1}{2}.$$

The proof of this theorem is based on Theorem 1.

Let us consider at first the case of an even  $k$ . Let be  $l \geq 1$ . The validity of  $\mathbf{P}(\lambda_{2n-1}^{(k)} = l) = \mathbf{P}(\lambda_{2n}^{(k)} = l)$  is obvious.

If  $r$  denotes the first place of intersection, then the section between  $r$  and  $2n$  is a path of  $E_{2n-r, l-1}^+$  (see fig. 5). According to Theorem 1 it corresponds to a path of  $D_{2n-r}^{2(l-2)}$ .

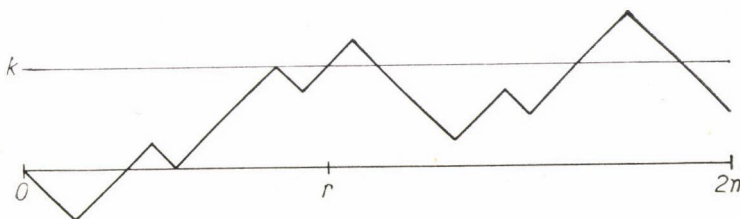


Figure 5.

Attaching a  $+1$  to the end of the section between  $0$  and  $r$  we obtain a path of  $C_{r+1}^{k+1}$ .

Joining the paths of  $C_{r+1}^{k+1}$  and  $D_{2n-r}^{2(l-1)}$  we obtain a path of  $D_{2n+1}^{2l+k-1}$ . Thus a path of  $E_{2n,l}^k$  corresponds to a path of  $D_{2n+1}^{2l+k-1}$ . This correspondence may be reversed, and as the number of paths of  $D_{2n+1}^{2l+k-1}$  is  $2 \binom{2n}{n+l+\frac{k}{2}}$

the statement of Theorem 2 is true for even values of  $k$ .

The proof for odd values of  $k$  can be given analogously.

For negative values of  $k$  the formulae are true if we replace  $k$  by  $-k$ .

(Received October 24, 1960.)

#### REFERENCES

- [1] CHUNG, K.L.—HUNT, G.A.: "On the zeros of  $\Sigma \pm 1$ " *Ann. of Math.* **50** (1949) 385—400.
- [2] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I (2nd edition) New York, 1957, John Wiley and Sons.
- [3] CSÁKI, E.—VINCZE, I.: "On some problems connected with the Galton-test". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 97—109.
- [4] BATSCHELET, E.: „Zur Theorie der wiederkehrenden Ereignisse I. II." *Archiv der Mathematik* **3** (1957) I: 184—191, II: 294—297.



# О ЧИСЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДЕНИИ ПО ЛИНИИ

E. CSÁKI

## Резюме

Рассматривается случайное блуждание по линии. Пусть независимые случайные величины  $\xi_i (i = 1, 2, \dots)$  принимают значения  $+1$  и  $-1$  с вероятностью  $1/2$ . Обозначим через  $s_j$  сумму  $j$  первых величин, т.е.

$$s_j = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_j \quad (j = 1, 2, \dots); \quad s_0 = 0.$$

Имеет место пересечение на высоте  $k$ , если

$$s_{i-1} = k - 1, \quad s_i = k, \quad s_{i+1} = k + 1,$$

или

$$s_{i-1} = k + 1, \quad s_i = k, \quad s_{i+1} = k - 1.$$

$\lambda_j^{(k)}$  обозначает число пересечений на высоте  $k$ , в последовательности  $\{s_0, s_1, \dots, s_j\}$ .

Определяются формулы для распределения  $\lambda_j^{(k)}$ , а именно имеют место следующие теоремы:

### Теорема 1.

$$P(\lambda_{2n-1}^{(0)} = l) = P(\lambda_{2n}^{(0)} = l) = \begin{cases} \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-1}{n+l} & \text{для } l = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n} & \text{для } l = 0. \end{cases}$$

### Теорема 2. При $k$ положительном чётном

$$P(\lambda_{2n-1}^{(k)} = l) = P(\lambda_{2n}^{(k)} = l) = \frac{\binom{2n}{n+l+\frac{k}{2}}}{2^{2n-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, n - \frac{k}{2},$$

при  $k$  положительном нечётном

$$P(\lambda_{2n}^{(k)} = l) = P(\lambda_{2n+1}^{(k)} = l) = \frac{\binom{2n+1}{n+l+\frac{k+1}{2}}}{2^{2n}}, \quad l = 1, 2, \dots, n - \frac{k-1}{2}.$$

Употреблённый элементарный метод основан на взаимно-однозначном соответствии между двумя пригодными множествами последовательностей  $\{s_0, s_1, \dots, s_j\}$ .

# ON THE NONLINEAR EQUATION $u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$

by

I. BIHARI<sup>1</sup>

1. This part of the paper generalizes a theorem due to Z. OPIAL [1]. The generalization in question is as follows :

**Theorem 1.** Let  $a(t)$  be continuous, non-decreasing, positive for  $t \geq 0$ , the function  $f(u)$  continuous, non-decreasing, positive for  $u \geq 0$ ,  $f(0) = 0$  and

$$(1) \quad \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{f^2(u) + u} = +\infty \quad (u_0 > 0)$$

$q(t)$  continuous for  $t \geq 0$  and

$$(1') \quad \int_0^{\infty} \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}} dt < \infty,$$

then every solution of the equation

$$u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$$

is bounded for  $t \geq 0$ , moreover the expression  $A(t) = u^2(t) + \frac{u'^2(t)}{a(t)}$  tends to a finite limit as  $t \rightarrow +\infty$  (e.g. the sequence of the extreme values of  $|u|$  is convergent).<sup>2</sup>

**Proof.** Let  $u(t)$  be an arbitrary solution of (2). Then

$$\begin{aligned} A(t) &= u^2(t) + \frac{u'^2(t)}{a(t)} = u^2(0) + \frac{u'^2(0)}{a(0)} + \int_0^t d\left(u^2 + \frac{u'^2}{a}\right) = \\ &= C + \int_0^t \left(2u u' + \frac{2u' u''}{a}\right) dt - \int_0^t \frac{u'^2}{a^2} da(t), \end{aligned}$$

where  $C = u^2(0) + \frac{u'^2(0)}{a(0)}$ . We have from (2)  $u'' = -au - qf(u^2)$ .

<sup>1</sup> Technical University, Budapest.

<sup>2</sup> The proof may be modified to include the linear case too.

Therefore

$$(3) \quad A(t) = C - \int_0^t \frac{u'^2}{a^2} da(t) - \int_0^t \frac{2 u' f(u^2)}{a} q dt.$$

$a(t)$  being non-decreasing we have  $\int_0^t \frac{u'^2}{a^2} da(t) \geq 0 (t \geq 0)$ . Making use of the property of the geometric and quadratic means

$$\left| \frac{2 u' f(u^2)}{\sqrt{a}} \right| \leq f^2(u^2) + \frac{u'^2}{a}.$$

Thus by (3)

$$(4) \quad A(t) \leq C + \int_0^t \left| \frac{2 u' f(u^2)}{\sqrt{a}} \right| \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt \leq C + \int_0^t \left[ f^2(u^2) + \frac{u'^2}{a} \right] \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt \leq \\ \leq C + \int_0^t \left[ f^2 \left( u^2 + \frac{u'^2}{a} \right) + u^2 + \frac{u'^2}{a} \right] \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt.$$

Let us denote  $\int_{u_0}^u \frac{ds}{f^2(s) + s}$  ( $u_0 > 0$ ) by  $F(u)$  and its inverse function by  $F^{-1}(u)$ .

Then by a well known lemma we obtain from (4)

$$(5) \quad A(t) \leq F^{-1} \left( F(C) + \int_0^t \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt \right) \leq F^{-1} \left( F(C) + \int_0^\infty \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt \right)$$

and the statement concerning the boundedness of  $|u|$  and  $\left| \frac{u'}{\sqrt{a}} \right|$  is proved. Let us denote this boundary by  $K$ , then  $|u| \leq K$ ,  $\left| \frac{u'}{\sqrt{a}} \right| \leq K$ . Applying this on the second integral in (3)

$$2 \int_0^t \left| f(u^2) \frac{u'}{\sqrt{a}} \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt \leq 2 f(K^2) K \int_0^t \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt \leq 2 K f(K^2) \int_0^\infty \left| \frac{q}{\sqrt{a}} \right| dt.$$

This involves the convergence of the integral in question for  $t = +\infty$ . The first integral in (3) is — as a non-decreasing function — also convergent for  $t \rightarrow +\infty$  and its limit must be finite (otherwise the right member of (3) would be negative for sufficiently large  $t$  and this is impossible). Consequently in virtue of (3)

$$A(t) = u^2(t) + \frac{u'^2(t)}{a(t)} \text{ has a finite limit.}$$



2. In the following problem the conditions imposed on  $a(t)$ ,  $q(t)$  and  $f(u)$  are different from the previous ones. Let our equation be given in the form

$$(6) \quad u'' + a(t)u + q(t)f(u) = 0.$$

Then we have

**Theorem 2.** Let  $a(t)$  be a positive continuous, non-decreasing function for  $t \geq 0$ , let the function  $q(t)$  be continuous and satisfying together with  $a(t)$  the conditions  $\left| \frac{q}{a} \right| < \frac{\alpha}{t}$ ,  $\left| \left( \frac{q}{a} \right)' \right| < \frac{\alpha}{t^2}$  ( $\alpha > 0$ ) for  $t$  sufficiently large, let the positive function  $f(u)$  be defined for all  $u$  and  $f(u) \in \text{Lip}(1)$ , further let the boundedness of  $\frac{|F(u)|}{u^2}$  be assumed for all  $u$ , where  $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ .

Then every solution of (6) is bounded if  $t \rightarrow \infty$ .

**Proof.** Let  $t_0$  be a positive constant, to be determined later. Then similarly to (3) we have (denoting  $A(t_0)$  by  $C$ )

$$\begin{aligned} A(t) = C - 2 \int_{t_0}^t \frac{dF(u)}{dt} \frac{q}{a} dt - \int_{t_0}^t \frac{u'^2}{a^2} da(t) &\leq C + 2 F(u(t_0)) \frac{q(t_0)}{a(t_0)} - \\ &- 2 F(u(t)) \frac{q(t)}{a(t)} + 2 \int_{t_0}^t F(u) \left( \frac{q}{a} \right)' dt, \end{aligned}$$

whence

$$(7) \quad A(t) \leq K + 2 \left| F(u) \right| \left| \frac{q}{a} \right| + 2 \int_{t_0}^t \left| F(u) \right| \left| \left( \frac{q}{a} \right)' \right| dt$$

where  $K = C + 2 \left| F(u(t_0)) \right| \left| \frac{q(t_0)}{a(t_0)} \right|$ . Let the maximum of  $|u|$  in the interval  $[t_0, t]$  be  $M$ , and let  $|u|$  take on the value  $M$  at  $\tau$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ). Then by (7)

$$(8) \quad M^2 \leq A(\tau) \leq K + 2 \frac{\alpha}{\tau} |F(M)| + 2 |F(M)| \alpha \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{\tau} \right) = K + 2 |F(M)| \frac{\alpha}{t_0}.$$

Hence

$$(9) \quad M^2 - 2 |F(M)| \frac{\alpha}{t_0} = M^2 \left( 1 - \frac{|F(M)|}{M^2} \frac{2\alpha}{t_0} \right) \leq K.$$

Let us choose for  $t_0$  so much a large value that the inequality  $\frac{|F(M)|}{M^2} \frac{2\alpha}{t_0} < \frac{1}{2}$  be satisfied. Then by (9)  $M^2 \leq 2K$ , what was to be proved.

(Received December 6, 1960.)

## REFERENCES

- [1] OPİAL, Z.: "Nouvelles remarques sur l'équation différentielle  $u'' + a(t)u = 0$ ." *Annales Polonici Mathematici* **6** (1959) 75—81.

## ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

$$u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$$

I. BINARI

## Резюме

**Теорема 1.** (Обобщение одной теоремы OPİAL). Пусть  $u(t)$  непрерывная неубывающая положительная функция от  $t \geq 0$ ,  $f(u)$  непрерывная неубывающая функция от  $u$ , которая положительна для  $u \geq 0$ ,

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{f^2(u) + u} = +\infty \quad (u_0 > 0)$$

далее,  $q(t)$  непрерывная функция от  $t \geq 0$  и  $\int_0^{\infty} \frac{|q(t)|}{\sqrt{a(t)}} dt < \infty$ , тогда любое решение уравнения

$$u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$$

ограничено для  $t \geq 0$  и выражение

$$A(t) = u^2(t) + \frac{u'^2(t)}{a(t)}$$

имеет конечный предел при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть 1) функция  $a(t) > 0$  непрерывна и неубывающая, функция  $q(t)$  непрерывна для  $t \geq 0$  и пусть будет выполнено условие

$$\left| \frac{q}{a} \right| < \frac{\alpha}{t}, \quad \left| \left( \frac{q}{a} \right)' \right| < \frac{\alpha}{t^2} \quad (\alpha > 0)$$

для достаточно больших  $t > 0$ ,

2) Функция  $f(u)$  определена для всех значений  $u$  и  $f(u) \in \text{Lip}(\alpha)$ ,

3)  $\frac{|F(u)|}{u}$  ограничена  $\left( F(u) = \int_0^u f(s) ds \right)$  и  $F(u)$  неубывающая функция

для  $u > 0$ , тогда все решения уравнения

$$u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$$

ограничены при  $t \rightarrow \infty$ .

# ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF CERTAIN SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS PERTURBED BY A HALF-LINEAR TERM

by  
I. BIHARI<sup>1</sup>

In this paper we consider the equation

$$(1) \quad u'' + u + \varrho(x)f(u, u') = 0.$$

The term  $\varrho(x)f(u, u')$  as well as the equation (1) will be called (by causes explained in a previous paper of the author) half-linear. The following theorem is the immediate extension of a well-known theorem.

**Theorem.** Let  $\varrho(x)$  be continuous for  $x > 0$  and tend to 0 in a higher order than 1 as  $x \rightarrow +\infty$ . For the sake of definiteness let be  $\varrho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  as  $x \rightarrow +\infty$ .

Let  $f(u, v) \in \text{Lip}(1)$  in  $u$  and  $v$  in every bounded domain, further let  $f(u, v)$  satisfy the relations  $\text{sg } f(u, v) = \text{sg } u$  and  $f(\lambda u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$  for all  $\lambda, u$  and  $v$ . Then every solution of (1) has an asymptotic form  $a \sin(x + \varphi)$ . More precisely: if  $u(x)$  is an arbitrary solution of (1), then there exist such constants  $\alpha_\infty$  and  $\delta_\infty$ , that

$$(2) \quad u = \alpha_\infty \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

holds.<sup>2</sup>

**Proof.** Let us determine the continuously differentiable functions  $\alpha(x)$  and  $\delta(x)$  such that the relations

$$(3) \quad u = \alpha \sin(x + \delta), \quad u' = \alpha \cos(x + \delta)$$

be satisfied. On account of the uniqueness of the solution we may assume  $\alpha \neq 0$ , because we disregard solutions identically equal to 0.  $u''$  and  $u'$  may be computed in two different ways:

$$(4) \quad \begin{aligned} u'' &= \alpha' \cos(x + \delta) - \alpha(1 + \delta') \sin(x + \delta) = -u - \varrho f(u, u') = \\ &= -\alpha \sin(x + \delta) - \varrho f(\alpha \sin(x + \delta), \alpha \cos(x + \delta)), \end{aligned}$$

$$(5) \quad u' = \alpha \cos(x + \delta) = \alpha' \sin(x + \delta) + \alpha(1 + \delta') \cos(x + \delta).$$

<sup>1</sup> Technical University, Budapest.

<sup>2</sup>  $u(x)$  exists for all  $x > 0$ . See I. BIHARI: „Ausdehnung der Sturmschen Oscillations- und Vergleichssätze ...”, *Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **2** (1957) p. 161.



These equations may be written in the form

$$(4') \quad \alpha' \cos(x + \delta) = \alpha \delta' \sin(x + \delta) - \varrho \alpha f(\sin(x + \delta), \cos(x + \delta))$$

$$(5') \quad \alpha' \sin(x + \delta) = -\alpha \delta' \cos(x + \delta)$$

too. Hence  $\alpha$  and  $\alpha'$  can be eliminated, obtaining

$$\operatorname{ctg}(x + \delta) = -\operatorname{tg}(x + \delta) + \frac{\varrho}{\delta'} f(\operatorname{tg}(x + \delta), 1)$$

or

$$(6) \quad \delta' = \varrho \sin(x + \delta) f(\sin(x + \delta), \cos(x + \delta))$$

and by means of (5')

$$(7) \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = -\varrho \cos(x + \delta) f(\sin(x + \delta), \cos(x + \delta)).$$

Equation (6) is a separate differential equation for  $\delta$ , whence having determined  $\delta$ , equation (7) gives  $\alpha$ . — We prove that  $\delta$  and  $\alpha$  have limits as

$x \rightarrow \infty$ . By virtue of (6) and the relation  $\varrho = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  the integral  $\int_x^\beta \delta'(\xi) d\xi$  converges as  $\beta \rightarrow +\infty$ . Therefore equation

$$(8) \quad \delta(x) = \delta(\beta) - \int_x^\beta \delta'(\xi) d\xi$$

shows that  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \delta(\beta) = \delta_\infty$  exists and

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

and similarly by (7)

$$\log \alpha - \log \alpha_\infty = \log \frac{\alpha}{\alpha_\infty} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{resp.} \quad \frac{\alpha}{\alpha_\infty} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

i.e.

$$\alpha(x) = \alpha_\infty \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad x \rightarrow +\infty \quad (\alpha_\infty \neq 0).$$

Thus every solution  $u(x)$  has the asymptotic form

$$u = \alpha \sin(x + \delta) = \alpha_\infty \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Consequences : every solution oscillates an infinite number of times, the sequence of the extrema of  $|u|$  is convergent (its limit is  $\alpha_\infty$ ). The distance of the successive zeros tends to  $\pi$ .

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩАЮЩЕГО ЧЛЕНА

I. BINARI

## Резюме

Если в уравнении  $u'' + u + \varrho(x)f(u, u') = 0$

1)  $\varrho(x) > 0$  и для  $x \rightarrow \infty$  она стремится к нулю в порядке больше единицы (например  $\varrho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$ ),

2)  $f(u, v) \in \text{Lip}(s)$  в любой ограниченной области плоскости  $(u, v)$ ,

3)  $\text{sg}f(u, v) = \text{sg}u$  и  $f(\lambda u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$  для любых значений  $\lambda$ ,  $u$  и  $v$ , тогда каждое решение вышеприведенного уравнения имеет асимптотическое представление вида  $-a \sin(x + \varphi)$ . Точное, если  $u(x)$  какое-нибудь решение этого уравнения, тогда существуют постоянные  $\alpha_\infty$  и  $\vartheta_\infty$  такие, что

$$u = \alpha_\infty \sin(x + \vartheta_\infty) + O(1/x) \quad (x \rightarrow \infty).$$





# ÜBER EINE ALLGEMEINE THEORIE DER ERWARTUNGSTREUEN SCHÄTZUNGEN

von  
L. SCHMETTERER<sup>1</sup>

Es sei  $R$  eine Menge und  $S$  eine  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $R$ .  $\mathfrak{P}$  sei eine nicht leere Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $P$ , die über  $S$  definiert sind. Es sei  $g$  eine Abbildung von  $\mathfrak{P}$  in den euklidischen  $R_1$ . Wir geben folgende

**Definition 1.** Eine  $S$ -meßbare Abbildung  $h$  von  $R$  in den  $R_1$  soll erwartungstreu (oder auch erwartungstreue Schätzung) für  $g$  heißen, wenn der Erwartungswert von  $h$  für jedes  $P$  existiert und

$$(1) \quad E(h; P) = g(P)$$

für alle  $P \in \mathfrak{P}$ .

Die Menge aller  $h$ , welche erwartungstreu für  $g$  sind, soll mit  $H_g$  bezeichnet werden.

Es gilt der

**Satz 1.**  $H_g$  ist eine konvexe Menge. —

Der Beweis ist trivial. Wenn  $H_g$  mehr als ein Element enthält, dann gibt es also unendlich viele erwartungstreue Schätzungen von  $g$ . Für den Statistiker erhebt sich dann das Problem der »optimalen Schätzung«, d. h. die Frage, welche erwartungstreue Schätzung aus  $H_g$  ausgewählt werden soll, um  $g$  »möglichst gut« zu schätzen. Diesem Problem sind die nachfolgenden Ausführungen gewidmet.

Es sei jedem  $P \in \mathfrak{P}$  ein Banach-Raum  $B_P$  mit der Norm  $N_P$  zugeordnet. Wir nehmen nun an, daß die im folgenden betrachteten Durchschnittsmengen nicht leer sind und geben die

**Definition 2.** Ein Element  $h_0 \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  soll gleichmäßig  $N_P$ -minimal heißen, wenn  $N_P(h_0 - g(P)) \leq N_P(h - g(P))$  für alle  $h \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  und jedes  $P \in \mathfrak{P}$ .

**Definition 3.** Ein Element  $h_0 \in H_g \cap B_{P_0}$  mit  $P_0 \in \mathfrak{P}$  soll lokal  $N_{P_0}$ -minimal heißen, wenn  $N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) \leq N_{P_0}(h - g(P_0))$  für alle  $h \in H_g \cap B_{P_0}$ .

Das wichtigste Beispiel für diese Definitionen ist der Fall, daß der Raum  $B_P$  für alle  $P$  mit dem Raum  $L^2_P$  identisch ist, dessen Norm durch die Abbildung

<sup>1</sup> Hamburg.

<sup>2</sup> Es ist per definitionem  $E(h; P) = \int_R h dP$ .

$f \rightarrow (\int_R f^2 dP)^{1/2}$  gegeben ist. In diesem Fall handelt es sich dann darum für alle  $P$  (oder für ein festes  $P_0$  im lokalen Fall) die Streuung zu minimisieren. Für die Räume  $L_p^p$ ,  $p > 1$  habe ich dieses Problem kürzlich ausführlich untersucht [1]. Wir wollen nun zunächst die gleichmäßigen und lokalen Minimal-schätzungen charakterisieren. Vorerst geben wir aber noch die folgende Erklärung:

**Definition 4.**  $V$  sei die Klasse aller  $S$ -meßbaren Abbildungen  $v$  von  $R$  in den  $R_1$ , deren Erwartungswerte für alle  $P \in \mathfrak{P}$  existieren und welche die Gleichung erfüllen

$$(2) \quad E(v; P) = 0$$

für alle  $P \in \mathfrak{P}$ .

Wir setzen nun voraus, daß  $B_P$  für jedes  $P \in \mathfrak{P}$  glatt ist, d. h. daß durch jeden Punkt der Einheitssphäre genau eine Tangentialhyperebene hindurch geht. Dann gilt der

**Satz 2.** Es seien alle  $B_P$  mit  $P \in \mathfrak{P}$  glatt.  $h_0 \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  ist genau dann gleichmäßig  $N_P$ -minimal, wenn das Gâteaux-Differential  $L_P(h_0 - g(P); v)$  der  $N_P$ -Norm von  $h_0 - g(P)$  für alle Zuwächse  $v \in V \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  und jedes  $P \in \mathfrak{P}$  verschwindet. —

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß das Gâteaux-Differential der  $N_P$ -Norm für alle  $P \in \mathfrak{P}$  existiert, da alle  $B_P$  als glatt vorausgesetzt sind.

Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der gleichmäßigen  $N_P$ -Minimalität und der Definition des Gâteaux-Differentiales.

Wir zeigen nun, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Es sei also für ein  $h_0 \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$   $L_P(h_0 - g(P); v) = 0$  für jedes  $P \in \mathfrak{P}$  und für alle  $v \in V \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$ . Es sei weiter für ein  $h \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  und ein  $P_0 \in \mathfrak{P}$

$$(3) \quad N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) > N_{P_0}(h - g(P_0)).$$

Nun ist  $h - h_0 \in V \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  und voraussetzungsgemäß gilt für  $t \rightarrow 0$   $N_{P_0}(h_0 - g(P_0) + t(h - h_0)) - N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) = o(t)$ . Es sei nun  $t > 0$ . Es folgt für jedes  $\varepsilon > 0$  und hinreichend kleines  $t > 0$

$$(4) \quad -\varepsilon t \leq N_{P_0}((1-t)(h_0 - g(P_0)) + t(h - g(P_0))) - N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) \leq \varepsilon t.$$

Benützen wir die linke Seite von (4), dann folgt

$$\begin{aligned} -\varepsilon t &\leq (1-t) N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) + t N_{P_0}(h - g(P_0)) - N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) = \\ &= t [N_{P_0}(h - g(P_0)) - N_{P_0}(h_0 - g(P_0))]. \end{aligned}$$

Die daraus hergeleitete Ungleichung  $-\varepsilon \leq N_{P_0}(h - g(P_0)) - N_{P_0}(h_0 - g(P_0))$  steht aber im Widerspruch zu (3).

Selbstverständlich gilt ein entsprechender Satz auch für lokal  $N_{P_0}$ -minimale Schätzungen, auf dessen Formulierung wir verzichten. Hinsichtlich der Eindeutigkeit von Minimalschätzungen gilt der



**Satz 3.** Wenn  $B_P$  für jedes  $P \in \mathfrak{P}$  strikt konvex ist, dann gibt es (bis auf  $\mathfrak{P}$ -Nullmengen<sup>3</sup> höchstens eine gleichmäßig  $N_P$ -minimale Schätzung für gegebenes  $g$ . —

Den einfachen Beweis habe ich in einer früheren Arbeit gegeben [2].

Wieder gilt ein analoger Satz für den Fall lokal minimaler Schätzungen.

Wir beschränken uns nun auf den Fall, daß ein für  $\mathfrak{P}$  dominantes Maß  $\mu$  existiert und  $\mu \in \mathfrak{P}$  ist. Wir bezeichnen die nach dem Satz von Radon-Nikodym existierenden Dichten von  $P$  bezüglich  $\mu$  mit  $f_P$  und nehmen stets an, daß  $f_P$  für jedes  $P$  dem zu  $B_\mu$  konjugierten Raum  $B_\mu^*$  angehört. Mit anderen Worten, wir setzen voraus, daß durch die Abbildung  $k \rightarrow \int_R k f_P d\mu$  für  $k \in B_\mu$  ein lineares und stetiges Funktional über  $B_\mu$  definiert wird. Wir beschäftigen uns nun mit lokal  $N_\mu$ -minimalen Schätzungen und beweisen zunächst das

**Lemma 1.** Unter den angeführten Voraussetzungen ist die Menge  $V_\mu = V \cap B_\mu$  eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in  $B_\mu$ .

Es ist trivial, daß  $V_\mu$  ein Vektorraum ist. Die Abgeschlossenheit von  $V_\mu$  folgt ebenfalls ganz leicht: Es sei  $v_n \in V_\mu$  für  $n \geq 1$  und  $N_\mu(v_n - v) \rightarrow 0$ . Es folgt unter Benützung von (2)

$$\left| \int_R v f_P d\mu \right| = \left| \int_R v_n f_P d\mu + \int_R (v - v_n) f_P d\mu \right| \leq N_\mu(v_n - v) N_\mu^*(f_P) \rightarrow 0$$

für jedes  $P \in \mathfrak{P}$ . Dabei bedeutet  $N_\mu^*$  natürlich die Norm in  $B_\mu^*$ . Wir betrachten nun die Menge  $G_\mu$  aller Abbildungen  $g_k$  von  $\mathfrak{P}$  in den  $R_1$ , welche durch

$$P \rightarrow \int_R k f_P d\mu$$

mit  $k \in B_\mu$  gegeben sind.

Lemma 1 hat zur Folge, daß der Quotientenraum  $Q_\mu = B_\mu / V_\mu$  wieder ein Banachraum ist, wenn man die Norm  $N_{Q_\mu}$  von  $Q_\mu$  durch

$$(5) \quad N_{Q_\mu}(y) = \inf_{y=\varphi(x)} N_\mu(x)$$

definiert.  $\varphi$  ist die kanonische Abbildung von  $B_\mu$  in  $Q_\mu$ . Aus der Definition von  $V_\mu$  folgt sofort, das

**Lemma 2.**  $G_\mu$  und  $Q_\mu$  können in natürlicher Weise eineindeutig aufeinander bezogen werden.

Nunmehr ist es möglich, das folgende Resultat zu beweisen, welches ein Ergebnis von STEIN [3] und dessen Weiterführung in der erwähnten Arbeit [1] verallgemeinert:

**Satz 4.** Die Klasse  $\mathfrak{P}$  werde durch ein Maß  $\mu$  dominiert, das selbst zu  $\mathfrak{P}$  gehöre,  $f_P$ , die Dichte von  $P$  bezgl.  $\mu$ , gehöre für jedes  $P \in \mathfrak{P}$  zu  $B_\mu$ .  $B_\mu$  sei ein glatter Banach-Raum.  $h \in H_g \cap B_\mu$  ist genau dann lokal  $N_\mu$ -minimal, wenn eine Abbildung  $T$  von  $G_\mu$  in den  $R_1$  existiert mit der Eigenschaft daß

$$T(g_k) = L_\mu(h - g(\mu); k)$$

für alle  $k \in B_\mu$ , wobei  $L_\mu$  natürlich das Gâteaux-Differential der Norm  $N_\mu$  bezeichnet.

<sup>3</sup> Darunter verstehen wir eine Menge  $A \in \mathcal{S}$ , für die  $P(A) = 0$  für alle  $P \in \mathfrak{P}$  gilt.



Der Beweis beruht auf Lemma 1, Lemma 2 und dem folgenden

**Lemma 3.** *B sei ein Banach-Raum, M eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit von B und  $B^*$  der zu B konjugierte Raum. Es sei weiter  $M^0 \subset B^*$  der Annihilator von M. Q sei der Quotienten-Raum von B nach M und  $Q^*$  der zu Q konjugierte Raum. Es sei  $\varphi$  die kanonische Abbildung von B in Q. Dann ist die zu  $\varphi$  adjungierte Abbildung  $\varphi^*$  eine eindeutige, lineare und isometrische Abbildung von  $Q^*$  auf  $M^0$  [4].*

Nun ist es sehr bekannt, daß die Abbildung  $k \rightarrow L_\mu(h - g(\mu); k)$  linear ist, und es ist leicht zu zeigen, daß sie auch beschränkt ist. Jetzt kann aber der Beweis des Satzes 4 wortwörtlich so geführt werden, wie ich das für den Fall, daß  $B_\mu$  der Raum  $L_\mu^p$  ( $p > 1$ ) ist, in [1] gezeigt habe. Dort finden sich auch Beispiele, wie man diesen Satz zur Konstruktion von lokal minimalen Schätzungen benützen kann.

Wir wollen uns nun der Frage der Existenz lokal minimaler Schätzungen zuwenden. Hierzu machen wir wieder die Voraussetzung, daß ein für die Klasse  $\mathfrak{P}$  dominantes Maß  $\mu$  existiert, das zu  $\mathfrak{P}$  gehört. Überdies nehmen wir an, daß  $V_\mu$  eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit ist. Lemma 2 und (5) lehren dann, daß das Problem der Existenz einer lokal  $N_\mu$ -minimalen Schätzung äquivalent ist mit der Frage, ob das Infimum in (5) angenommen wird. Es gilt nun der

**Satz 5.** *Wenn die angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind und  $V_\mu$  ein reflexiver Banach-Raum ist, dann existiert für alle  $g_k \in G_\mu$  eine lokal  $N_\mu$ -minimale erwartungstreue Schätzung.*

Zum Beweise sei  $k$  ein beliebiges Element aus  $B_\mu$ . Mit  $y_k \in Q_\mu$  bezeichnen wir die Klasse  $\{k + v\}$ ,  $v \in V_\mu$ . Es sei  $l_n$  eine Folge von Elementen aus  $\{k + v\}$  mit  $N_\mu(l_n) \rightarrow N_{Q_\mu}(y_k)$ . Es ist leicht einzusehen, daß mit  $V_\mu$  auch der Banachraum  $B_\mu(k)$  der durch  $k$  und  $V_\mu$  erzeugt wird (und die durch  $N_\mu$  induzierte Norm besitzen soll), reflexiv ist. Somit existiert nach einem bekannten Satz (vgl. z. B. [5]) ein  $l \in B_\mu(k)$ , so daß  $l_n$  schwach gegen  $l$  konvergiert. Die Menge der  $\{k + v\}$  ist aber konvex und abgeschlossen in  $B_\mu(k)$ . Somit gehört  $l$  zu  $\{k + v\}$  (vgl. [6]) und  $N_\mu(l) = N_{Q_\mu}(y_k)$  und das war zu beweisen.

Da jede abgeschlossene Mannigfaltigkeit eines reflexiven Banach-Raumes selbst reflexiv ist, folgt aus Satz 5 sofort das

**Corollar.<sup>4</sup>** *Wenn B selbst reflexiv ist, dann existiert unter den angegebenen Voraussetzungen für alle  $g_k \in G$  eine lokal  $N_\mu$ -minimale Schätzung.*

Für den Fall, daß  $B_\mu = L_\mu^p$ ,  $p > 1$ , wurde dieses Corollar auf anderem Wege von BARANKIN [8] bewiesen.

Wir wollen nun zum Schluß noch eine Anwendung geben. BRUDNO [9] hat vor kurzem mittels einer komplizierten Beweismethode folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Markov gezeigt: Es seien  $y_1, \dots, y_m$  unabhängige zufällige Variable, die beziehungsweise nach einer Normalverteilung

$N\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{ik}, \sigma_k^2\right)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , verteilt sind. Es sei  $m > n$ , die  $x_{ik}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq m$  seien gegebene reelle Zahlen, deren Matrix  $X = (x_{ik}/\sigma_k)$  den Rang  $n$  habe und die  $\alpha_i$  seien Parameter, die für  $1 \leq i \leq n$  der Bedingung

<sup>4</sup> Nach Fertigstellung dieser Arbeit hat mich Herr Dr. BAUER, Hamburg, darauf aufmerksam gemacht, daß in etwas anderem Zusammenhang ein solcher Satz schon früher gegeben wurde (vgl. [7]).

$-\infty < \alpha_i < \infty$  genügen. Es seien reelle Zahlen  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , gegeben. Dann gilt: In der Klasse der über dem  $R_m$  definierten erwartungstreuen Schätzungen für  $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$  ist die durch die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate gegebene Schätzung gleichmäßig  $L_{P_\alpha}^2$ -minimal. Hierbei sei  $P_\alpha$  für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  die Verteilung, deren Dichte durch

$$\prod_{k=1}^m \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_k} \left( y_k - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{ik} \right)^2 \right] \text{ für jedes } y = (y_1, \dots, y_m) \in R_m$$

gegeben ist und  $\mathfrak{P}$  die Menge aller  $P_\alpha$  (bei festen  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ ).

Dieser Satz folgt aber sofort aus Satz 2 und 3. Man betrachte nämlich die Menge  $V$  aller  $v$ , welche für alle  $P_\alpha \in \mathfrak{P}$  der Gleichung

$$(6) \quad \int_R v dP_\alpha = 0$$

genügen. Für alle  $\alpha$ , die etwa einem beliebigen offenen Quader des  $R_n$  angehören, und alle  $v \in V \cap \bigcap_a L_{P_\alpha}^2$  folgt aber aus (6) durch Differentiation nach  $\alpha_j$  sofort

$$\int_{R_m} v \left[ \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k} \left( y_k - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{ik} \right) x_{jk} \right] dP_\alpha(y) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Daraus folgt aber wieder aus (6) für  $1 \leq j \leq n$

$$\int_{R_m} v \sum_{k=1}^m y_k x_{jk} / \sigma_k dP_\alpha(y) = 0 \text{ oder auch, wenn wir mit } X' \text{ die zu } X \text{ transponierte}$$

Matrix bezeichnen und  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$  schreiben:

$$\int_{R_m} v X' y dP_\alpha(y) = 0 \text{ oder auch } \int_{R_m} v (X'X)^{-1} X' y dP_\alpha(y) = 0.^5$$

Nach Multiplikation mit  $c' = (c_1, \dots, c_n)$  erhalten wir also

$$\int_{R_m} v c' (X'X)^{-1} X' y dP_\alpha(y) = 0$$

für alle  $P_\alpha \in \mathfrak{P}$  und alle  $v \in V \cap \bigcap_a L_{P_\alpha}^2$ . Nach Satz 3 ist daher  $c' (X'X)^{-1} X' y$

gleichmäßig  $L_{P_\alpha}^2$ -minimale Schätzung für  $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$  und nach Satz 2 auch die einzige. Bekanntlich ist aber durch  $(X'X)^{-1} X' y$  der Lösungsvektor der Gaußschen Gleichung gegeben und somit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen: 11. Januar, 1961.)

<sup>5</sup> Unter dem Integral einer Matrix verstehen wir natürlich die Matrix der Integrale.



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SCHMETTERER, L.: „On unbiased estimation”. *Ann. Math. Stat.* **31** (1960) 1154—1163.
- [2] SCHMETTERER, L.: „Bemerkungen zur Theorie der erwartungstreuen Schätzungen”. *Mitteil. -Bl. math. Statistik* **9** (1957) 147—152.
- [3] STEIN, C.: „Unbiased estimates with minimum variances”. *Ann. Math. Stat.* **21** (1950) 406—415.
- [4] BOURBAKI, N.: *Livre V, Espaces Vectoriels Topologiques*, Chapitre III—V, 1955, 115.
- [5] HILLE, E. und PHILLIPS, R. S.: American Math. Soc. Colloquium Publ. XXXI, *Functional Analysis and semi-groups*. Revised Edition, 1957, 37.
- [6] L. c. [5], 36.
- [7] HIRSCHFELD, R. A.: „On best approximations in normed vector spaces”. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) **6** (1958) 41—51.
- [8] BARANKIN, E. W.: „Locally best unbiased estimates”. *Ann. Math. Stat.* **20** (1949) 477—502.
- [9] БРУДНО, А. Л.: „К дисперсионному обоснованию метода наименьших квадратов.” *Mat. Sbornik* **43** (85) (1957) 37—48.

## ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НЕСМЕЩЕННЫХ ОЦЕНОК

L. SCHMETTERER

## Резюме

В настоящей статье дополняется теория прежней работы опубликованной автором в журнале *The Annals of Math. Stat.* **31** (1960) 1154—1163. Пусть  $\mathfrak{P}$  непустой класс мер вероятностей и  $g$  действительная функция определенная в множестве  $\mathfrak{P}$ . Пусть дальше  $H_g$  класс несмещенных оценок для  $g$ . Допустим, что каждой мере  $P$ , принадлежащей множеству  $\mathfrak{P}$ , соответствует пространство Банаха  $B_P$  с нормой  $N_P$ . Элемент  $h_0 \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  называется равномерно  $N_P$ -минимальной, если  $N_P(h_0 - g(P)) \leq N_P(h - g(P))$  при всех элементах  $h \in H_g \cap \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} B_P$  и каждой мере  $P \in \mathfrak{P}$ .  $h_0 \in H_g \cap B_{P_0}$  называется локально  $N_{P_0}$ -минимальной, если  $N_{P_0}(h_0 - g(P_0)) \leq N_{P_0}(h - g(P_0))$  при всех элементах  $h \in H_g \cap B_{P_0}$  и мере  $P_0 \in \mathfrak{P}$ . В этой статье даются необходимые и достаточные условия для существования и однозначности равномерно и локально минимальных несмещенных оценок. Известные теоремы Баранкина, Леманна, Штейна и других можно рассматривать как частные случаи этих общих результатов. В качестве примера дается краткое доказательство теоремы Брудно о методе наименьших квадратов.



# SUR LA THÉORIE UNITAIRE DES MÉTHODES D'ITÉRATION POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES, I

par  
BÉLA JANKÓ<sup>1</sup>

Jusqu'ici on a traité des différentes méthodes d'itération comme la méthode de Newton, de Tchebycheff et la méthode des hyperboles tangentes etc. [1—5]. Le but de ce travail est d'indiquer la source commune de ces méthodes, d'étudier simultanément les conditions de convergence respectives et d'en déduire de nouvelles méthodes d'itération.

## § 1. Les relations entre les méthodes de Newton, de Tchebycheff et des hyperboles tangentes

1. *L'ordre de convergence.* Nous considérons l'équation opérationnelle

$$(1) \quad \varphi(x) = 0$$

où l'opération non-linéaire  $\varphi(x)$  est définie dans l'espace de Banach  $X$ , prenant ses valeurs aussi en  $X$ , en outre elle est continue et  $k$ -fois différentiable au sens de FRÉCHET. Pour résoudre l'équation (1) nous appliquons d'habitude une certaine méthode d'itération ayant la forme générale

$$(2) \quad x_{n+1} = \Phi_n(x_n), \quad (n = 0, 1, \dots)$$

où  $x_0$  est l'approximation initiale et  $x_1, x_2, \dots$  les approximations successives. L'opération non-linéaire  $\Phi_n(x)$  sera choisie ultérieurement par la formule (3). Nous supposons pour le moment que l'équation (1) admet la solution  $\bar{x}$  dans un domaine  $D \subset X$ . L'opération  $\Phi_n(x)$  est continue,  $k$ -fois différentiable au sens de FRÉCHET et possède encore la propriété  $\bar{x} = \Phi_n(\bar{x})$  pour chaque  $n$ . En tenant compte de cette propriété nous pouvons considérer la formule de Taylor généralisée sous la forme

$$\left\| \bar{x} - x_{n+1} - \Phi'_n(x_n)(\bar{x} - x_n) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} \Phi_n^{(k-1)}(x_n)(\bar{x} - x_n)^{k-1} \right\| \leq \\ \leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_n} \|\Phi_n^{(k)}(\xi_n)\| \|\bar{x} - x_n\|^k$$

ou  $\xi_n = x_n + \Theta(\bar{x} - x_n)$ ;  $0 \leq \Theta \leq 1$  et  $\bar{x}, x_n, \xi_n \in D$ .

<sup>1</sup> Cluj.

**Définition 1.** Nous disons que la méthode d'itération (2) est convergente d'ordre  $k$ , si

- a) la norme  $\|\bar{x} - x_n\|$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, et  
b) les dérivées de  $\Phi_n(x)$  jouissent des propriétés

$$\Phi'_n(x_n) \equiv 0, \dots, \Phi_n^{(k-1)}(x_n) \equiv 0; \quad \Phi_n^{(k)}(x_n) \neq 0$$

pour toutes les valeurs de  $n$  où 0 est l'opération nulle.

2. *L'énoncé du problème.* Il convient de souligner qu'en ce qui suit, notre problème sera de remplacer l'opération  $\varphi(x)$  de l'équation (1) par une autre opération  $\Phi_n(x) \equiv F[\varphi(x), x_n]$ , ayant les propriétés

a) la méthode d'itération engendrée par l'opération  $\Phi_n(x)$  c'est-à-dire,  $x_{n+1} = \Phi_n(x_n)$ , soit convergente d'ordre  $k$ ,

$\beta$ ) les équations  $\varphi(x) = 0$  et  $x - \Phi_n(x) = 0$  soient équivalentes pour chaque  $n$ .

Nous montrerons que l'ordre de convergence a une influence directe sur la structure des méthodes d'itérations suivantes:

méthode de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \varphi(x_n), \quad \Gamma_n = [\varphi'(x_n)]^{-1},$$

méthode de Tchebycheff,

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \varphi(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n \varphi''(x_n) [\Gamma_n \varphi(x_n)]^2,$$

méthode des hyperboles tangentes

$$x_{n+1} = x_n - \left[ \varphi'(x_n) - \frac{1}{2} \varphi''(x_n) \Gamma_n \varphi(x_n) \right]^{-1} \varphi(x_n).$$

3. *La construction des méthodes.* Nous considérons l'opération  $\Phi_n(x)$  sous la forme suivante

$$(3) \quad \Phi_n(x) \equiv x - \lambda_0(x_n) \varphi(x) - \lambda_1(x_n) \varphi(x) (x - x_n) - \lambda_2(x_n) \varphi^2(x),$$

$\lambda_0(x_n)$  étant un opérateur (linéaire), puis  $\lambda_1(x_n)$ ,  $\lambda_2(x_n)$  sont des opérations bilinéaires définies pour tous les couples d'éléments de l'espace  $X$ , ayant ses valeurs aussi dans  $X$ .

A) Si nous posons maintenant  $\lambda_1(x_n) \equiv \lambda_2(x_n) \equiv 0$  et encore nous imposons la condition b) de la Définition 1, pour  $k = 2$ , c'est-à-dire  $\Phi'_n(x_n) \equiv 0$ ,  $\Phi''_n(x_n) \neq 0$ , alors il en résulte que  $\lambda_0(x_n)$  est de la forme

$$\lambda_0(x_n) = \Gamma_n.$$

Il est évident que de cette manière nous avons retrouvé la méthode de Newton [1].

B) Si  $\lambda_2(x_n) \equiv 0$  et si nous imposons les conditions  $\Phi'_n(x_n) \equiv 0$ ,  $\Phi''_n(x_n) \equiv 0$ , alors nous avons le système

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi'_n(x_n) \Delta x &\equiv \Delta x - \lambda_0(x_n) \varphi(x_n) \Delta x - \lambda_1(x_n) \varphi(x_n) \Delta x = 0 \\ \Phi''_n(x_n) \Delta x' \Delta x'' &\equiv -\lambda_0(x_n) \varphi''(x_n) \Delta x' \Delta x'' - 2 \lambda_1(x_n) \varphi'(x_n) \Delta x' \Delta x'' = 0 \end{aligned}$$

pour chaque  $\Delta x, \Delta x', \Delta x'' \in D$ . Pour obtenir la solution  $\{\lambda_0(x_n), \lambda_1(x_n)\}$



de ce système des équations opérationnelles on suppose d'abord que  $\Delta x' = -\frac{1}{2} \Gamma_n \varphi(x_n)$  et  $\Delta x = \Delta x''$ . De cette manière nous pouvons déterminer

$$\lambda_0(x_n) \equiv \left[ \varphi'(x_n) - \frac{1}{2} \varphi''(x_n) \Gamma_n \varphi(x_n) \right]^{-1}.$$

En posant dans la deuxième équation  $-\frac{1}{2} \Gamma_n \Delta x'$  au lieu de  $\Delta x'$  il en découle que l'opération bilinéaire  $\lambda_1(x_n)$  est de la forme

$$\lambda_1(x_n) \Delta \xi \Delta \xi' \equiv -\frac{1}{2} \left[ \varphi'(x_n) - \frac{1}{2} \varphi''(x_n) \Gamma_n \varphi(x_n) \right]^{-1} (\Gamma_n \Delta \xi) \Delta \xi'$$

pour tous les couples d'éléments  $\Delta \xi, \Delta \xi' \in D$ . On peut vérifier facilement que la solution obtenue satisfait au système (4) pour  $\Delta x', \Delta x''$  et  $\Delta x$  quelconques. Ainsi nous avons retrouvé la méthode connue des hyperboles tangentes [4].

C) Si nous posons  $\lambda_1(x_n) \equiv 0$  et supposons encore

$$\Phi'_n(x_n) \equiv 0, \quad \Phi''_n(x_n) \equiv 0,$$

alors nous obtenons le système

$$\begin{aligned} & \lambda_0(x_n) \varphi'(x_n) \Delta x + \lambda_2(x_n) [\varphi'(x_n) \Delta x] \varphi(x_n) + \lambda_2(x_n) \varphi(x_n) [\varphi'(x_n) \Delta x] = \Delta x \\ (4') \quad & \lambda_0(x_n) \varphi''(x_n) \Delta x' \Delta x'' + \lambda_2(x_n) [\varphi''(x_n) \Delta x' \Delta x''] \varphi(x_n) + \\ & + 2\lambda_2(x_n) [\varphi'(x_n) \Delta x'] [\varphi'(x_n) \Delta x''] + \lambda_2(x_n) \varphi(x_n) [\varphi''(x_n) \Delta x' \Delta x''] = 0. \end{aligned}$$

En substituant dans (4')  $\Delta x = \Gamma_n \varphi''(x_n) \Delta x' \Delta x''$  nous pouvons déterminer facilement que l'opération bilinéaire  $\lambda_2(x_n)$  a la forme

$$\lambda_2(x_n) \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \equiv -\frac{1}{2} \Gamma_n \varphi''(x_n) [\Gamma_n \Delta \xi_1] [\Gamma_n \Delta \xi_2]$$

pour tous les couples d'éléments  $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2 \in D$ . Utilisant la relation de  $\lambda_2(x_n)$  déjà calculée, il résulte de la première équation du système (4') que

$$\begin{aligned} \lambda_0(x_n) \Delta \xi & \equiv \Gamma_n \Delta \xi + \frac{1}{2} \Gamma_n \varphi''(x_n) [\Gamma_n \Delta \xi] [\Gamma_n \varphi(x_n)] + \\ & + \frac{1}{2} \Gamma_n \varphi''(x_n) [\Gamma_n \varphi(x_n)] [\Gamma_n \Delta \xi] \end{aligned}$$

où l'opération bilinéaire  $\varphi''(x_n)$  n'est pas toujours symétrique; d'autre part l'élément  $\Delta \xi$  qui figure dans l'expression de  $\lambda_0(x_n) \Delta \xi$ , est un élément quelconque du domaine  $D$ .

Ainsi nous avons obtenu la méthode connue de Tchebycheff [5]. Dans ces calculs nous avons supposé que les opérations  $\varphi'(x_n)$ ,  $\varphi''(x_n)$  et aussi les opérations  $\lambda_i(x_n)$ , ( $i = 0, 1, 2$ ) calculées antérieurement existent et sont bien déterminées.



**Remarque.** Dans l'expression (3) de  $\Phi_n(x_n)$  nous pouvons poser au lieu de  $\varphi(x)$  le produit  $p(x) \cdot \varphi(x)$  en supposant que les équations  $\varphi(x) = 0$  et  $p(x) \cdot \varphi(x) = 0$  sont équivalentes. Ici le produit  $p(x) \cdot \varphi(x)$  est défini au sens de M. K. GAVURIN [6]. Nous pouvons obtenir de telle façon des nouvelles méthodes d'itération. Observons encore qu'en général les méthodes d'itération d'ordre  $k$ , ayant la forme (2) peuvent être engendrées par l'opération  $\Phi_n(x)$ , qui a une forme générale

$$(3') \quad \Phi_n(x) \equiv x - \sum_{i,j=1}^{k'} \lambda_{i,j}(x_n) (x - x_n)^i \varphi(x)^j,$$

$\lambda_{i,j}(x_n)$  étant des opérations multilinéaires. Naturellement dans ce cas on doit supposer aussi que les opérations  $\varphi'(x_n), \dots, \varphi^{(k-1)}(x_n)$  et  $\lambda_{i,j}(x_n)$ , qui interviennent dans le calcul, existent et sont bien déterminées.

## § 2. Nouvelle méthodes d'itération

1. Dans ce paragraphe nous servirons d'une autre définition de l'ordre de convergence, introduite par E. SCHRÖDER [7] pour le cas des fonctions de variable réelle. Cette notion peut être immédiatement généralisée pour le cas des opérations non-linéaires définies dans l'espace de Banach. Pour cela nous considérons de nouveau l'équation (1) et encore une méthode d'itération ayant la forme générale

$$(2') \quad x_{n+1} = \Psi(x_n)$$

où l'opération  $\Psi(x)$  sera choisie ultérieurement. Nous supposons que  $\Psi(x)$  est continue,  $k$ -fois différentiable et possède aussi la propriété  $\bar{x} = \Psi(\bar{x})$ ,  $\bar{x}$  étant la solution de l'équation (1). Dans ces conditions nous considérons pour l'opération  $\Psi(x)$  le développement de Taylor généralisé, sous la forme

$$\begin{aligned} \left\| x_{n+1} - \bar{x} - \Psi'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} \Psi^{(k-1)}(\bar{x})(x_n - \bar{x})^{k-1} \right\| &\leq \\ &\leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi'_n} \|\Psi^{(k)}(\xi'_n)\| \|x_n - \bar{x}\|^k \end{aligned}$$

où  $\xi'_n = \bar{x} + \Theta(x_n - \bar{x})$ ,  $0 \leq \Theta \leq 1$  et  $\bar{x}, \xi_n, x_n \in D$ .

L'extension de la définition de l'ordre de convergence au sens de E. SCHRÖDER s'énonce de la manière suivante.

**Définition 1'.** La méthode d'itération (2') est dite convergente et d'ordre  $k$ , si

$$a') \quad \|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$b') \quad \Psi'(\bar{x}) \equiv 0, \dots, \Psi^{(k-1)}(\bar{x}) \equiv 0; \Psi^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

2. L'énoncé de notre problème est analogue à celui du § 1: l'opération  $\varphi(x)$  on se remplace par une autre opération de la forme  $\Psi(x) \equiv F[\varphi(x)]$ , telle que

$\alpha')$  la méthode d'itération  $x_{n+1} = \Psi(x_n)$  engendrée par  $\Psi(x)$  soit convergente de l'ordre  $k$  au sens de E. SCHRÖDER,

$\beta')$  les équations  $\varphi(x) = 0$  et  $x - \Psi(x) = 0$  soient équivalentes.

3. *La construction des méthodes.* Considérons l'opération  $\Psi(x)$  sous la forme

$$(5) \quad \Psi(x) \equiv x + A_1(x) \varphi(x),$$

$A_1(x)$  étant un opérateur pour  $x$  donné (fixé). Si nous imposons la condition  $\Psi'(\bar{x}) \equiv 0$ , alors il en résulte que

$$(6) \quad A_1(\bar{x}) \equiv -[\varphi'(\bar{x})]^{-1}.$$

La condition (6) est satisfaite si nous choisissons  $A_1(x)$  pour  $x \in D$  quelconque telle que

$$(7) \quad A_1(x) \equiv -[\varphi'(x) + \mu(x) \varphi(x)]^{-1} + A_2(x) \varphi(x)$$

où  $\mu(x)$  et  $A_2(x)$  sont des opérations bilinéaires (pour  $x$  fixé) et arbitraires pour le moment. En substituant l'expression (7) de l'opération  $A_1(x)$  dans (5) nous obtenons une classe entière des méthodes d'itération

$$x_{n+1} = x_n - [\varphi'(x_n) + \mu(x_n) \varphi(x_n)]^{-1} \varphi(x_n) + A_2(x_n) \varphi^2(x_n).$$

Si nous posons  $A_2(x) \equiv \mu(x) \equiv 0$ , alors nous retrouvons la méthode de Newton.

Considérons maintenant  $\Psi(x)$  sous la forme

$$(5') \quad \Psi(x) \equiv x - [\varphi'(x) + \mu(x) \varphi(x)]^{-1} \varphi(x) + A_2(x) \varphi^2(x)$$

et imposons encore la condition

$$(8) \quad \begin{aligned} \Psi''(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 &\equiv \Gamma(\bar{x}) \varphi''(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 + 2 \Gamma(\bar{x}) \mu(\bar{x}) [\varphi'(\bar{x}) \Delta x_1] \Delta x_2 + \\ &+ 2 A_2(\bar{x}) [\varphi'(\bar{x}) \Delta x_1] [\varphi'(\bar{x}) \Delta x_2] = 0 \end{aligned}$$

pour chaque  $\Delta x_1, \Delta x_2 \in D$ .

Si nous substituons dans la formule (8)  $A_2(x) \equiv 0$ , alors nous obtenons que l'opération  $\mu(x)$  est de la forme

$$\mu(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2} \varphi''(\bar{x}) [\Gamma(\bar{x}) \Delta x_1] \Delta x_2$$

pour tous les couples d'éléments  $\Delta x_1, \Delta x_2$ . En choisissant pour  $x$  quelconque

$$\mu(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2} \varphi''(x) [\Gamma(x) \Delta x_1] \Delta x_2$$

nous retrouvons de nouveau la méthode des hyperboles tangentes. Dans un autre cas si nous posons  $\mu(\bar{x}) = 0$  il résulte de la formule (8) que

$$A_2(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2} \Gamma(\bar{x}) \varphi''(\bar{x}) [\Gamma(\bar{x}) \Delta x_1] [\Gamma(\bar{x}) \Delta x_2]$$



et si nous admettons

$$\Lambda_2(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2} \Gamma(x) \varphi''(x) [\Gamma(x) \Delta x_1] [\Gamma(x) \Delta x_2]$$

pour  $x$  quelconque, alors nous obtenons la méthode de Tchebycheff.

En particulierisant les opérations  $\Lambda_2(x)$  et  $\mu(x)$  on peut construire plusieurs méthodes ayant l'ordre de convergence 3. Dans ces calculs nous avons supposé que dans le voisinage  $D$  de  $x$  sont satisfaites les conditions

$\gamma$ ) les opérations  $\varphi(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\Lambda_2(x)$ ,  $\Gamma(x)$ ,  $[\varphi'(x) + \mu(x) \varphi(x)]^{-1}$  et aussi les dérivées  $\varphi^{(v)}(x)$ , ( $v = 1, 2, 3$ );  $\mu^{(i)}(x)$ ,  $\Lambda_2^{(i)}(x)$ , ( $i = 1, 2$ ) existent et toutes les opérations qui interviennent dans le calcul des relations  $\Psi'(\bar{x}) \Delta x \equiv \equiv 0$ ,  $\Psi''(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv 0$  sont bien déterminées.

Pour le cas des fonctions de variable réelle nous retrouvons quelques résultats de E. BODEWIG [8] et R. LUDWIG [9].

Nous faisons l'observation qu'au lieu de (5') nous pouvons considérer une autre opération  $\tilde{\Psi}(x)$  de la forme

$$(5'') \quad \tilde{\Psi}(x) \equiv x - [\varphi'(x) + \mu(x) \varphi(x)]^{-1} (\varphi(x) + \Lambda_2(x) \varphi^2(x)).$$

Si nous imposons dans ce cas la condition  $\tilde{\Psi}''(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv 0$  alors nous obtenons une autre relation entre les opérations bilinéaires  $\mu(x)$  et  $\Lambda_2(x)$ , c'est-à-dire

$$(8') \quad \varphi''(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 + 2\mu(\bar{x}) [\varphi'(\bar{x}) \Delta x_1] \Delta x_2 = 2\Lambda_2(\bar{x}) [\varphi'(\bar{x}) \Delta x_1] [\varphi'(\bar{x}) \Delta x_2].$$

Ainsi nous avons obtenu une nouvelle classe des méthodes d'itération de la forme  $x_{n+1} = \tilde{\Psi}(x_n)$ , d'ordre 3. En faisant

$$\mu(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\varphi''(x) [\Gamma(x) \Delta x_1] \Delta x_2$$

dans la formule (8'), il en découle que  $\Lambda_2(x)$  est de la forme

$$\Lambda_2(\bar{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2} \varphi''(\bar{x}) [\Gamma(\bar{x}) \Delta x_1] [\Gamma(\bar{x}) \Delta x_2].$$

Si nous admettons que

$$\Lambda_2(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2} \varphi''(x) [\Gamma(x) \Delta x_1] [\Gamma(x) \Delta x_2]$$

pour chaque  $x \in D$ , alors nous retrouvons la méthode de L. K. VÓHANDU [10].

Enfin nous mentionnons que la forme générale de l'opération  $\Psi(x)$  peut être choisie, pour obtenir des méthodes d'ordre  $k \geq 3$ , de la manière suivante

$$(9) \quad \Psi(x) \equiv x - \{\varphi'(x) + \mu_1(x) \varphi(x) + \dots + \mu_{i+1}(x) [\varphi(x)]^{i+1}\}^{-1} \varphi(x) + \\ + \Lambda_2(x) [\varphi(x)]^2 + \dots + \Lambda_{j+1}(x) [\varphi(x)]^{j+1}$$

où les opérations multilinéaires  $\mu_r(x)$ ,  $\Lambda_s(x)$ , ( $r = 1, 2, \dots, i$ ;  $s = 1, 2, \dots, j$ ;  $i + j = k - 1$ ) sont déterminées par la condition  $\Psi^{(p)}(\bar{x}) \Delta x_1 \dots \Delta x_p \equiv 0$ , ( $p = 2, \dots, k - 1$ ) et les opérations  $\mu_{j+1}(x)$  et  $\Lambda_{j+1}(x)$  sont arbitraires.



La forme générale de  $\tilde{\Psi}(x)$  peut être donnée

$$(9') \quad \tilde{\Psi}(x) \equiv x - \{\varphi'(x) + \mu_1(x)\varphi(x) + \dots + \mu_{i+1}(x)[\varphi(x)]^{i+1}\}^{-1} \times \\ \times \{\varphi(x) + A_2(x)[\varphi(x)]^2 + \dots + A_{j+1}(x)[\varphi(x)]^{j+1}\}.$$

Naturellement pour ces cas généraux on doit supposer des conditions analogues à  $(\gamma)$ , c'est-à-dire, nous nous servirons des conditions que

$(\gamma')$  toutes les opérations — qui interviennent dans les dérivées de Fréchet  $\Psi^{(v)}(x)$  resp.  $\tilde{\Psi}^{(v)}(x)$  et dans les relations  $\Psi^{(v)}(\bar{x}) \Delta x_1 \dots \Delta x_v = 0$  resp.  $\tilde{\Psi}^{(v)}(\bar{x}) \Delta x_1 \dots \Delta x_v = 0$  ( $v = 1, 2, \dots, k-1$ ) — existent, sont bien déterminées et les conditions des dérivabilités sont satisfaites.

### § 3. Conditions de convergence

Les conditions de convergence pour les méthodes de la forme générale

$$x_{n+1} = x_n + \Phi(\varphi(x_n), \varphi'(x_n), \varphi''(x_n), \dots)$$

ont déjà été étudiée par Iu. Ia. KAAZIK [11, 12] — où  $\varphi(x)$  est supposée analytique —, et part par L. COLLATZ [13] pour le cas où  $\Gamma$  est uniformément bornée en norme. Nous donnerons dans ce qui suit des autres conditions.

Supposons que les conditions suivantes sont remplies:

1° l'approximation initiale  $x_0$  satisfait à la relation

$$\|\varphi(x_0)\| \leq \eta_0;$$

2° l'opération  $\Gamma(x)$  est uniformément bornée en norme

$$\|\Gamma(x)\| \leq B$$

dans le domaine  $D$  défini par l'inégalité

$$(D) \quad \|x - x_0\| \leq HB\eta_0 = \delta_0$$

où

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2k-1};$$

3° la deuxième dérivée de FRÉCHET de l'opération  $\varphi(x)$  est uniformément bornée en norme

$$\|\varphi''(x)\| \leq K$$

où  $x \in D$ ;

4° nous avons satisfait à l'inégalité

$$h_0 = B^2 K \eta_0 < 2;$$

5° l'opération  $\Psi(x)$  est bien définie par l'égalité (9) elle est  $k$ -fois différentiable au sens de FRÉCHET, satisfaisant encore à la condition  $(\gamma')$  pour ( $v = 1, 2, \dots, k$ ), puis

$$\Psi^{(v)}(x) \Delta x_1 \dots \Delta x_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, k-1)$$

pour chaque  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_r$  différentes de l'élément zéro, et encore

$$\Psi^{(k)}(\bar{x}) \neq 0.$$

6° nous supposons enfin que

$$\|\Psi^{(k)}(\xi)\| \leq M_k$$

pour  $\|\xi - x_0\| \leq 3\delta_0$ , et que

$$(2\delta_0)^{k-1} M_k < k!.$$

**Théorème 1.** *Si les conditions 1°–6° sont satisfaites, alors l'équation opérationnelle  $\varphi(x) = 0$ , définie dans le domaine  $D$ , admet une solution unique  $x \in D$ , le procédé d'itération  $x_{n+1} = \Psi(x_n)$  est convergent et la vitesse de convergence est caractérisée par la délimitation*

$$(10) \quad \|\bar{x} - x_0\| \leq \delta_0^{kn} \left( \frac{M_k}{k!} \right)^{\frac{k^n - 1}{k - 1}}.$$

**Démonstration.** Les conditions 1°–4°, qui sont exactement les conditions établies par I. P. MYSOVSKIÏ, assurent l'existence d'une solution de l'équation  $\varphi(x) = 0$  dans le domaine  $D$  [2]. Nous montrerons que la solution est unique. Il est évident que l'équation  $F(x) \equiv x - \Psi(x) = 0$  admet aussi au moins une solution. Nous supposons d'abord qu'elle a deux solutions distinctes  $\bar{x}, \bar{x}' \in D$  et considérons le développement de Taylor pour  $F(x)$ ,

$$\begin{aligned} \|F(\bar{x}') - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})(\bar{x}' - \bar{x}) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(\bar{x})(\bar{x}' - \bar{x})^{k-1}\| &\leq \\ &\leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi} \|F^{(k)}(\xi)\| \|\bar{x}' - \bar{x}\|^k \end{aligned}$$

où  $\xi = \bar{x} + \Theta(\bar{x}' - \bar{x})$ ,  $0 \leq \Theta \leq 1$ . La structure de l'opération  $F(x)$  et les conditions 5°–6° entraînent

$$\left(1 - \frac{M_k}{k!} (2\delta_0)^{k-1}\right) \|\bar{x}' - \bar{x}\| \leq \|F(\bar{x}') - F(\bar{x})\| = 0$$

et en utilisant la condition 6° nous obtenons que  $\bar{x}' = \bar{x}$ . Alors  $F(x) = 0$  ayant une solution unique dans le domaine  $D$ , il résulte que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet aussi une seule et même solution  $\bar{x}$ , c'est-à-dire les deux équations sont équivalentes.

Pour démontrer la convergence, nous considérons la formule de Taylor

$$\begin{aligned} &\|\Psi(x_{n-1}) - \Psi(\bar{x}) - \Psi'(\bar{x})(x_{n-1} - \bar{x}) - \dots - \\ &- \frac{1}{(k-1)!} \Psi^{(k-1)}(\bar{x})(x_{n-1} - \bar{x})^{k-1}\| \leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_{n-1}} \|\Psi^{(k)}(\xi_{n-1})\| \|x_{n-1} - \bar{x}\|^k \end{aligned}$$



où  $\xi_n = \bar{x} + \Theta (x_{n-1} - \bar{x})$  et  $0 \leq \Theta \leq 1$ . Il résulte que

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \frac{M_k}{k!} \|x_{n-1} - \bar{x}\|^k$$

ou

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \|x_0 - \bar{x}\|^{k^n} \left( \frac{M_k}{k!} \right)^{\frac{k^n - 1}{k - 1}}$$

qui entraîne l'inégalité (10).

**Remarque.** Nous pouvons mentionner que dans notre théorème sont groupées séparément les conditions d'existence et les conditions de convergence. En connection avec les conditions 1°—4°, qui assurent l'existence de la solution, nous remarquons qu'elles peuvent être remplacées par des autres conditions d'existence par ex. par les conditions de V. E. MIRAKOV [14], appliquées dans le cas de la méthode des hyperboles tangentes où l'opération  $\Gamma(x)$  est supposée bornée uniformément en norme. Naturellement celles-ci sont un peu plus compliquées que celles de 1°—4°.

Les méthodes de la forme  $x_{n+1} = \Phi_n(x)$  traitées dans le § 1 sont contenues dans la catégorie générale des méthodes ayant la forme  $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ . Quand même ayant en vue le fait qu'en général l'expression  $\|\Phi_n^{(k)}(x)\|$  est relativement plus simple que celle de  $\|\Psi^{(k)}(x)\|$ , par conséquent la détermination des erreurs établie à l'aide  $\|\Phi_n^{(k)}(x)\|$  sera plus simple que la formule donnée par (10). Pour les méthodes  $x_{n+1} = \Phi_n(x_n)$  on peut établir un théorème analogue, mais les propriétés de  $\Phi_n^{(v)}(x)$  ( $v = 1, 2, \dots, k-1$ ) diffèrent de celles de  $\Psi^{(v)}(x)$  données dans les conditions ( $\gamma'$ ), c'est pourquoi la démonstration de ce théorème différera aussi un peu de la démonstration du théorème précédent.

**Théorème 1'.** Si les conditions 1°—4° du théorème 1 sont remplies et en outre l'opération  $\Phi_n(x)$  définie par (3) respectivement (3') est  $k$ -fois différentiable au sens de Fréchet satisfaisant les conditions

$$\Phi_n^{(v)}(x_n) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, k-1), \quad \Phi_n^{(k)}(x_n) \neq 0$$

et encore

$$\delta_0^{k-1} N_k < k!$$

où

$$\|\Phi_n^{(k)}(\xi)\| \leq N_k, \quad \|\xi - x_0\| \leq 2\delta_0,$$

pour n'importe quel  $n$ , alors l'équation opérationnelle admet une solution unique  $\bar{x} \in D$ , le procédé  $x_{n+1} = \Phi_n(x_n)$  est convergent et la vitesse de convergence est donnée par

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \delta_0^{k^n} \left( \frac{N_k}{k!} \right)^{\frac{k^n - 1}{k - 1}}.$$

**Démonstration.** Conformément aux conditions 1°—4° il résulte que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une solution  $\bar{x} \in D$ . Pour démontrer la conver-



gence nous considérons le développement de Taylor

$$\begin{aligned} & \|\Phi_n(\bar{x}) - \Phi_n(x_n) - \Phi'_n(x_n)(\bar{x} - x_n) - \dots - \\ & - \frac{1}{(k-1)!} \Phi_n^{(k-1)}(x_n)(\bar{x} - x_n)^{k-1}\| \leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_n} \|\Phi_n^{(k)}(\xi_n)\| \|\bar{x} - x_n\|^k \end{aligned}$$

où  $\xi_n = \bar{x} + \Theta(x_{n-1} - \bar{x})$ ,  $0 \leq \Theta \leq 1$ . Il résulte de cette formule que

$$\|\bar{x} - x_{n+1}\| \leq \frac{N_k}{k!} \|\bar{x} - x_n\|^k$$

et on trouve

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \delta_0^{k^n} \left( \frac{N_k}{k!} \right)^{\frac{k^n-1}{k-1}}$$

c'est-à-dire  $\bar{x} = \lim x_n$  au sens de norme. Nous allons montrer enfin que la solution  $\bar{x}$  est unique. Supposons pour le moment qu'il existe encore une solution  $\bar{x}' \in D$  et considérons la formule

$$\begin{aligned} & \|\Phi_n(\bar{x}') - \Phi_n(x_n) - \Phi'_n(x_n)(\bar{x}' - x_n) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} \Phi_n^{(k-1)}(x_n) \times \\ & \times (\bar{x}' - x_n)^{k-1}\| \leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi'_n} \|\Phi_n^{(k)}(\xi'_n)\| \|\bar{x}' - x_n\|^k \end{aligned}$$

où  $\xi'_n = \bar{x}' + \Theta(x_{n-1} - \bar{x}')$ ,  $0 \leq \Theta \leq 1$ . On peut obtenir facilement que

$$\|\bar{x}' - x_n\| \leq \delta_n^{k^n} \left( \frac{N_k}{k!} \right)^{\frac{k^n-1}{k-1}}$$

par conséquent  $\bar{x}' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ , c. q. f. d.

(Recu le 12 Janvier 1961.)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] КАНТОРОВИЧ, Л. В.: "О методе Ньютона." *Труды Мат. Инст. Стеклова* **28** (1949) 104—144.
- [2] МЫСОВСКИХ, И. П.: "К вопросу о сходимости метода Ньютона." *idem* **28** (1949) 145—147.
- [3] FENYŐ, I.: "Über die Lösung der im Banachschen-Räume definierten nichtlinearen Gleichungen." *Acta Math. Hung.* **5** (1954) 85—93.
- [4] МЕРТВЕЦОВА, М. А.: "Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений." *Д. А. Н.* **88** (1953) 611—614.
- [5] НЕЧЕПУРЕНКО, М. Т.: "О методе Чебышева для функциональных уравнений." *Успехи Мат. Наук* **9** (1954) 163—170.

- [6] ГАВУРИН, М. К.: "Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований." *Ученый Зап. Л. У. сер. Мат.* **19** (1950) 72.
- [7] SCHRÖDER, E.: „Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen." *Math. Annalen* **2** (1870) 317—369.
- [8] BODEWIG, E.: „On types of convergence and on the behavior of approximations in neighbourhood of a multiple root an equation." *Quarterly Appl. Math.* (1949) 325—334.
- [9] LUDWIG, R.: "Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssystemen." *Z. A. M. M.* **34** (1954) 210—225.
- [10] ВЫХАНДУ, Л. К.: "Об итерационных методах при решении уравнений." Автореферат диссертации. *Тартуский государтв. унив.*, 1955.
- [11] КААЗИК, Ю. Я.: "О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами." *Успехи Мат. Наук* **12** (1957) 195—199.
- [12] КААЗИК, Ю. Я.: "Об одном итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений." *Д. А. Н.* **112** (1957) 579—582.
- [13] COLLATZ, L.: "Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen." *Archiv for Rational Mechanics and Analysis* **2** (1958) 66—75.
- [14] МИРАКОВ, В. Е.: "О сходимости метода касательных гипербол для нелинейных функциональных уравнений при условии типа Коти." *Труды московского физ.-техн. ин-та.* **1** (1958) 204—213.

## ОБ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ I.

B. JANKÓ

### Резюме

В этой работе построена общая итерационная формула  $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ , из которой в частных случаях были получены все итерационные методы, например: метод Ньютона, Чебышева, метод касательных гипербол и т. д. Наряду с этим были получены новые категории методов, которые были классифицированы на основе порядка сходимости. Были также выработаны общие условия сходимости.





# ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNGEN EINES FUNKTIONALGLEICHUNGSSYSTEMS DER WIRTSCHAFTLICHKEIT

von

M. HOSSZÚ<sup>1</sup> und E. VINCZE<sup>1</sup>

1. In einer früheren Arbeit [3] (bzw. [4]) findet man die Lösung des Funktionalgleichungssystems

$$\begin{aligned} (1) \quad & G(tx, ty, tz) = G(x, y, z), \\ (2) \quad & G(tx, y, tz) = t G(x, y, z), \\ (3) \quad & G(tx, ty, z) = f(t) G(x, y, z), \\ & (t, x, y, z > 0; \quad G, f > 0), \end{aligned}$$

die eine wichtige technische Anwendung hat, und zwar die die Lösung bildende Funktion

$$G(x, y, z) = c_1 \frac{x}{y} \left( \frac{x}{z} \right)^{c_2} \quad (c_1, c_2 = \text{konst.})$$

charakterisiert die Wirtschaftlichkeit eines Produktionsvorgangs (hier bedeuten  $x$  die Produktenmenge,  $y$  die Produktionszeit und  $z$  die Produktionskosten). Hierbei sei betont, dass der in [3] und [4] aufgeworfene Problemenkreis und seine mitgeteilte Lösung bei weitem nicht als abgeschlossen zu betrachten sind, sondern diese Lösung lediglich einen Ausgangspunkt der mathematischen Fassung der für die Wirtschaftlichkeit charakteristischen Faktoren bilden kann. Eben deshalb werden wir einige weitere Verallgemeinerungen des Gleichungssystems (1)–(3) auflösen, aber ohne in dieser Arbeit deren Anwendungen tiefer eingehend darzulegen.

Die Verallgemeinerungen des Gleichungssystems (1)–(3), die vom Gesichtspunkte der Anwendungen aus wichtig sind, erhalten wir, indem wir einerseits in dem die Funktion  $G(x, y, z)$  bestimmenden Gleichungssystem die Zahl der Gleichungen verringern, anderseits in dieses Gleichungssystem mehrere unbekannte Funktionen schreiben, wobei wir aber auch im weiteren (ausgenommen einen Fall) die die Homogenität der Funktion  $G(x, y, z)$  bedeutende Gleichung (1) fordern.

Es würde genügen, wenn wir die Funktionalgleichungen nur für die positiven Zahlen definierten und nur reelle stetige Funktionen behandelten, jedoch werden wir desöfteren auch noch allgemeinere Lösungen geben.

Zu diesem Problem möchten wir erwähnen, dass homogene und verwandte Funktionalgleichungen bzw. Gleichungssysteme vor allem im Buch

<sup>1</sup> Technische Hochschule für Schwerindustrie, Miskolc.

[1] von J. ACZÉL zu finden sind; in ähnlicher Weise enthält dieses Werk auch auf andere Ergebnisse bezügliche zahlreiche Hinweise und Literaturangaben.

2. Zuerst behandeln wir das Funktionalgleichungssystem

$$(1) \quad G(tx, ty, tz) = G(x, y, z),$$

$$(4) \quad G(x, ty, tz) = f(t, x, y) G(x, y, z),$$

$$(x, y, z, t \in Q_0; \quad G, f: Q_0 \times Q_0 \times Q_0 \rightarrow Q),$$

wo  $Q_0$  in der Multiplikation eine Gruppe komplexer Zahlen bedeutet und  $Q$  die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet. Diese Bezeichnungen werden wir auch im weiteren benützen.

Es gilt der folgende

**Satz 1.** *Das allgemeinste Lösungssystem der für die Menge  $Q_0$  geltenden Gleichungen (1) und (4) ist*

$$G(x, y, z) = p\left(\frac{x}{y}\right) q\left(\frac{y}{z}\right),$$

$$f(t, x, y) = \frac{p\left(\frac{x}{ty}\right)}{p\left(\frac{x}{y}\right)},$$

wo  $p(t) \neq 0$  und  $q(t)$  ( $t \in Q_0$ ) beliebige komplexe Funktionen darstellen.

**Beweis.** Aus (4) und (1) folgt

$$f(t, x, y) = \frac{G(x, ty, tz)}{G(x, y, z)} = \frac{G\left(\frac{x}{tz}, \frac{y}{z}, 1\right)}{G\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)},$$

und da die linke Seite von  $z$  nicht abhängt, kann man mit  $z = y$  tatsächlich

$$(5) \quad f(t, x, y) = \frac{p\left(\frac{x}{ty}\right)}{p\left(\frac{x}{y}\right)},$$

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} G(t, 1, 1)$$

schreiben.

Nach den Gleichungen (4), (5) und (1) ergibt sich

$$G(x, y, z) = \frac{p\left(\frac{x}{y}\right)}{p\left(\frac{x}{ty}\right)} G(x, ty, tz) = \frac{p\left(\frac{x}{y}\right)}{p\left(\frac{x}{ty}\right)} G\left(\frac{x}{tz}, \frac{y}{z}, 1\right),$$

und da die linke Seite von  $t$  nicht abhängt, können wir mit  $t = x/z$  tatsächlich

$$(6) \quad G(x, y, z) = p\left(\frac{x}{y}\right) \frac{G\left(1, \frac{y}{z}, 1\right)}{p\left(\frac{z}{y}\right)} = p\left(\frac{x}{y}\right) q\left(\frac{x}{z}\right),$$

$$q(t) = \frac{\stackrel{\text{def}}{G}(1, t, 1)}{p\left(\frac{1}{t}\right)}$$

schreiben.

Die Funktionen (5) und (6) genügen den Gleichungen (1) und (4); damit ist der Satz vollständig bewiesen.

3. Auf ähnliche Weise können wir das Gleichungssystem

$$(1) \quad G(tx, ty, tz) = G(x, y, z),$$

$$(7) \quad G(x, ty, tz) = f(t, y, z) G(x, y, z),$$

$$(x, y, z, t \in R_+; \quad G, f: R_+ \times R_+ \times R_+ \rightarrow R)$$

auflösen, wo  $R_+$  die Menge der positiven Zahlen, bzw.  $R$  die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.

Es gilt der

**Satz 2.** Das allgemeinste reelle (stetige) Lösungssystem der für die Menge  $R_+$  geltenden Gleichungen (1) und (7) ist

$$G(x, y, z) = p\left(\frac{z}{y}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^{q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

$$f(t, y, z) = t^{-q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

wo  $p(t)$  und  $q(t)$  ( $t \in R_+$ ) beliebige reelle Funktionen darstellen.

**Beweis.** Die Gleichung

$$(8) \quad f(t, sy, sz) = f(t, y, z)$$



erhält man aus (7) und (1) auf folgende Weise:

$$f(t, y, z) = \frac{G(x, ty, tz)}{G(x, y, z)} = \frac{G(sx, tsy, tsz)}{G(sx, sy, sz)} = f(t, sy, sz).$$

Gleichfalls aus (7) und (1) ergibt sich

$$(9) \quad f(t, y, z) = \frac{G(x, ty, tz)}{G(x, y, z)} = \frac{G\left(\frac{x}{t}, y, z\right)}{G(x, y, z)}$$

und da die linke Seite von  $x$  nicht abhängt, können wir die Gleichung

$$(10) \quad \frac{G\left(\frac{x}{t}, y, z\right)}{G(x, y, z)} = \frac{G\left(\frac{1}{t}, y, z\right)}{G(1, y, z)}$$

schreiben. Hieraus erhalten wir die CAUCHYSche Gleichung

$$\frac{G\left(\frac{x}{t}, y, z\right)}{G(1, y, z)} = \frac{G(x, y, z)}{G(1, y, z)} \cdot \frac{G\left(\frac{1}{t}, y, z\right)}{G(1, y, z)},$$

also

$$(11) \quad G(x, y, z) = G(1, y, z) x^{g(y, z)}$$

ist; die triviale Lösung  $G(x, y, z)/G(1, y, z) \equiv 0$  kann man ausser acht lassen.

Wir bemerken, dass die Stetigkeit nur hier und lediglich für die Funktion  $G(x, y, z)/G(1, y, z)$  vorausgesetzt wurde, demzufolge sind die Funktionen  $G(x, y, z)$  und  $f(t, y, z)$  nicht unbedingt stetig.

Nunmehr erhalten wir nach (9), (10) und (11) die Gleichung

$$f(t, y, z) = t^{-g(y, z)},$$

und werden wegen (8)

$$(12) \quad g(y, z) = g\left(\frac{y}{z}, 1\right) = q\left(\frac{y}{z}\right),$$

$$(13) \quad f(t, y, z) = t^{-q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

d. h. nach (11) und (1)

$$G(x, y, z) = G(1, y, z) x^{q\left(\frac{y}{z}\right)} = G(1, ty, tz) (xt)^{q\left(\frac{y}{z}\right)}$$

ist. Hieraus ergibt sich mit  $t = 1/y$

$$(14) \quad G(1, y, z) = G\left(1, 1, \frac{z}{y}\right) \left(\frac{1}{y}\right)^{q\left(\frac{y}{z}\right)} = p\left(\frac{z}{y}\right) y^{-q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

d. h. nach (11), (12) und (14) tatsächlich

$$(15) \quad G(x, y, z) = p \left( \frac{z}{y} \right) \left( \frac{x}{y} \right)^{q \left( \frac{y}{z} \right)}$$

gültig ist.

Die Funktionen (13) und (15) genügen den Gleichungen (1) und (7), also ist der Satz vollständig bewiesen.

4. Behandeln wir nun die folgende Verallgemeinerung des Gleichungssystems (1)–(3):

$$(1) \quad G(tx, ty, tz) = G(x, y, z),$$

$$(16) \quad G(tx, ty, z) = f(t, z) G(x, y, z) + g(t, z),$$

$$(t, x, y, z \in Q_0; G: Q_0 \times Q_0 \times Q_0 \rightarrow Q; f, g: Q_0 \times Q_0 \rightarrow Q).$$

Es gilt der folgende

**Satz 3.** Die allgemeinsten (nicht trivialen) Lösungssysteme der für die Menge  $Q_0$  geltenden Gleichungen (1) und (16) sind folgende:

$$(17) \quad \begin{cases} G(x, y, z) = h \left( \frac{x}{y} \right) + g \left( \frac{y}{z} \right), \\ f(t, z) \equiv 1, \quad g(t, z) \equiv g(t); \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} G(x, y, z) = f \left( \frac{y}{z} \right) k \left( \frac{x}{y} \right) - C_0, \\ f(t, z) \equiv f(t), \quad g(t, z) \equiv C_0[f(t) - 1]; \end{cases}$$

wo die Funktionen  $g(t)$  und  $f(t)$  den Cauchyschen Gleichungen

$$(19) \quad g(st) = g(s) + g(t) \quad (s, t \in Q_0),$$

bzw.

$$(20) \quad f(st) = f(s) f(t) \quad (s, t \in Q_0)$$

genügen und die Funktionen  $h(t)$ ,  $k(t)$  ( $t \in Q_0$ ) beliebig sind (vgl. [2]).

**Bemerkung.** Ein triviales Lösungssystem der Gleichungen (1) und (16) ist noch

$$G(x, y, z) \equiv g(t, z) \equiv 0 \quad \text{und} \quad f(t, z) \quad \text{beliebig},$$

was wir jedoch ausser acht lassen können.

**Beweis.** Vor allem führen wir die Gleichungen (1) und (16) auf ein nur von zwei Veränderlichen abhängende Funktionen enthaltendes Gleichungssystem zurück, und zwar gilt nach (1)

$$(21) \quad G(x, y, z) = G \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) = H \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right),$$

und damit wird aus (16)

$$(22) \quad H\left(t \frac{x}{z}, t \frac{y}{z}\right) = f(t, z) H\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + g(t, z).$$

Falls  $x = y = z$  ist

$$(23) \quad H(t, t) = f(t, z) H(1, 1) + g(t, z),$$

d. h. man kann statt (22) die Gleichung

$$(24) \quad H_0\left(t \frac{x}{z}, t \frac{y}{z}\right) = f(t, z) H_0\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + H_0(t, t)$$

schreiben, in der

$$(25) \quad H_0(x, y) = H(x, y) - H(1, 1)$$

ist.

Setzen wir nun  $x = uz$  und  $y = vz$  in (24) ein:

$$H_0(tu, tv) = f(t, z) H_0(u, v) + H_0(t, t),$$

daraus folgt, dass die Funktion  $f(t, z)$  von der zweiten Veränderlichen nicht abhängt; in ähnlicher Weise hängt die Funktion  $g(t, z)$  nach (23) von  $z$  gleichfalls nicht ab. Demnach kann man statt (22) die Gleichung

$$(26) \quad H(tu, tv) = f(t) H(u, v) + g(t)$$

schreiben. Daher gilt

$$f(t) [f(s) H(u, v) + g(s)] + g(t) = f(t) H(su, sv) + g(t) = H(tsu, tsv) = \dots$$

also

$$\dots = f(s) [f(t) H(u, v) + g(t)] + g(s),$$

$$g(s) [f(t) - 1] = g(t) [f(s) - 1]$$

ist, d. h. man muss folgende zwei Fälle unterscheiden:

$$(27) \quad f(t) \equiv 1,$$

$$(28) \quad g(t) = c_0 [f(t) - 1].$$

Im Falle (27) erhält man, dass die Funktion  $g(t)$  der CAUCHYSCHEN Gleichung (19) tatsächlich genügt; aus (26) mit (27) folgt nämlich

$$H(u, v) + g(st) = H(stu, stv) = H(su, sv) + g(t) = H(u, v) + g(s) + g(t).$$

Ebenso ergibt sich aus (26)

$$H(u, v) = H\left(\frac{u}{v}, 1\right) + g(v) = h\left(\frac{u}{v}\right) + g(v)$$

und gemäss (21) gilt

$$(29) \quad G(x, y, z) = h\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{z}\right),$$

wo  $h(t)$  eine beliebige komplexe Funktion darstellt.



Im Falle (28) erhält man aus (22) die Gleichung

$$(30) \quad H_1(tu, tv) = f(t) H_1(u, v),$$

$$(31) \quad H_1(u, v) = H(u, v) + c_0,$$

und dass die Funktion  $f(t)$  der CAUCHYSchen Gleichung (20) tatsächlich genügt es folgt nämlich laut (30)

$$f(st) H_1(u, v) = H_1(stu, stv) = f(s) H_1(tu, tv) = f(s) f(t) H_1(u, v).$$

Gleichfalls aus (30) ergibt sich

$$H_1(x, y) = f(y) H_1\left(\frac{x}{y}, 1\right) = f(y) k\left(\frac{x}{y}\right)$$

und nach (31) und (21) ist

$$G(x, y, z) = f\left(\frac{y}{z}\right) k\left(\frac{x}{y}\right) - C_0,$$

wo  $k(t)$  eine beliebige komplexe Funktion bedeutet.

Da die Funktion (17) und (18) den Gleichungen (1) und (16) tatsächlich genügen, ist der Satz vollständig bewiesen.

5. Beachten wir schliesslich das Gleichungssystem

$$(32) \quad G(tx_1, \dots, tx_{k-1}, x_k, tx_{k+1}, \dots, tx_{n+1}) = f_k(t) G(x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$(k = 1, 2, \dots, n+1 \geq 3)$$

$$(t, x_1, \dots, x_{n+1} \in Q^n; \quad f_1, \dots, f_{n+1}: Q^n \rightarrow Q; \quad G: Q^n \times \dots \times Q^n \rightarrow Q),$$

wo  $Q^n$  in der Multiplikation eine Gruppe komplexer Zahlen darstellt, worin die Gleichung

$$(33) \quad x^n = y_0 \quad (y_0 \in Q^n)$$

im Falle des beliebigen Elementes  $y_0$  auch auflösbar ist.

Wir beweisen

**Satz 4.** Das allgemeinste Lösungssystem des für die Menge  $Q^n$  geltenden Gleichungssystems (32) ist

$$(34) \quad G(x_1, \dots, x_{n+1}) = C_0 \prod_{k=1}^{n+1} f_k \left( \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \right)$$

$$(C_0 = \text{konst.}),$$

wo  $f_1, \dots, f_{n+1}$  der Cauchyschen Gleichung

$$(35) \quad f_k(st) = f_k(s) f_k(t) \quad (s, t \in Q^n; k = 1, 2, \dots, n+1)$$

notwendig genügende komplexe Funktionen sind.

**Beweis.** Wegen der Gruppeneigenschaft von  $Q^n$  erhalten wir aus (32) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 (36) \quad G(x_1, \dots, x_{n+1}) &= f_1(y_1) G\left(\frac{y_1 x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{y_1}\right) = \\
 &= f_1(y_1) f_2(y_2) G\left(\frac{y_1 x_1}{y_1 y_2}, \frac{y_2 x_2}{y_1 y_2}, \frac{x_3}{y_1 y_2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{y_1 y_2}\right) = \dots \\
 &\dots = G\left(\frac{y_1 x_1}{y}, \frac{y_2 x_2}{y}, \dots, \frac{y_{n+1} x_{n+1}}{y}\right) \prod_{k=1}^{n+1} f_k(y_k), \\
 &\quad (y = y_1 y_2 \dots y_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Es sei nun

$$(37) \quad x_k y_k = y \quad (k = 1, 2, \dots, n+1);$$

wozu die Bemerkung genügt, dass die Gleichungen (37) voneinander unabhängig sind. Lösen wir das Gleichungssystem (37) auf, dann erhalten wir, indem auch die Eigenschaft (33) von  $Q^n$  beachtet wurde, die Lösung

$$(38) \quad y_k = \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x} \quad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Wenn wir nun die Gleichungen (37) und (38) in Betracht ziehen, erhalten wir aus (36) die Lösung

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(1, 1, \dots, 1) \prod_{k=1}^{n+1} f_k \left( \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \right).$$

Um zu beweisen, dass die Funktionen  $f_1, \dots, f_{n+1}$  der Cauchyschen Gleichung (35) genügen, substituieren wir die Lösung in (32) zurück:

$$\begin{aligned}
 G(1, \dots, 1) \left[ \prod_{j=1}^{k-1} f_j \left( \frac{1}{t x_j} \sqrt[n]{t^n x} \right) \right] f_k \left( \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{t^n x} \right) \left[ \prod_{j=k+1}^{n+1} f_j \left( \frac{1}{t x_j} \sqrt[n]{t^n x} \right) \right] = \\
 = f_k(t) G(1, \dots, 1) \prod_{j=1}^{n+1} f_j \left( \frac{1}{x_j} \sqrt[n]{x} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n+1),
 \end{aligned}$$

also gilt tatsächlich

$$f_k \left( \frac{t}{x_k} \sqrt[n]{x} \right) = f_k(t) f_k \left( \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen: 24. Januar, 1961.)

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ACZÉL, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, § 5. und § 7.1.2. Basel, 1961.
- [2] HOSSZÚ M.—VINCZE E.: „Műszaki fogalom — matematikai tükröződés”. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl.*, ...
- [3] VINCZE, E.: „Über das Problem der Berechnung der Wirtschaftlichkeit”. *Acta Technica* **28** (1960) 33—41.
- [4] VINCZE, E.: „A gazdaságosság számításának problémájáról.” *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl.*, ...

**ОБ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭКОНОМИЧНОСТИ**

M. HOSSZÚ и E. VINCZE

**Резюме**

В связи с предыдущими статьями авторов, в настоящей статье дается решение системы, являющейся обобщением системы (1)—(3) функциональных уравнений. Эта система функциональных уравнений связана с некоторыми задачами экономичности. В этих уравнениях через  $g(x, y, z)$  обозначена функция, характеризующая экономичность, которая зависит от количества фабриката  $x$ , от времени производства  $y$  и от расходов производства  $z$ . Рассматривая отдельно системы уравнений (1), (2) соответственно (1), (3), мы получим интересные для практики обобщения. Дальнейшие обобщения даны уравнениями (16) и (32).





## ERROR ESTIMATION FOR MASSAU'S METHOD OF CHARACTERISTICS

by

L. VEIDINGER<sup>1</sup>

The method of characteristics is one of the oldest and most frequently used numerical methods of solution of initial value problems for hyperbolic systems of quasilinear differential equations. In the present paper we shall investigate only MASSAU's original version of this method for systems in two independent and two dependent variables (the adaptation of MASSAU's method to more general equations is described in [2], methods of higher accuracy based on the same principle can be found in [1], [3] and [4]). FORSYTHE and WASOW conjectured in their recent book [1] that the error of MASSAU's method is of order  $O(h)$  where  $h$  is the maximum arc length between two adjacent grid points on the initial curve (see [1], p. 65). We shall prove that this hypothesis is true under some rather trivial assumptions.

We consider systems of two quasilinear differential equations of the form

$$(1a) \quad a_{11} u_x + a_{12} v_x + b_{11} u_y + b_{12} v_y = h_1$$

$$(1b) \quad a_{21} u_x + a_{22} v_x + b_{21} u_y + b_{22} v_y = h_2$$

for the two unknown functions  $u = u(x, y)$  and  $v = v(x, y)$ . The coefficients  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  and  $h_i$  ( $i, k = 1, 2$ ) are functions of  $x, y, u, v$  and have bounded third partial derivatives in a domain  $D$  of the  $x, y, u, v$ -space. We assume that the system (1a)–(1b) is of hyperbolic type in  $D$ , that is the equation

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda - b_{11} & a_{12}\lambda - b_{12} \\ a_{21}\lambda - b_{21} & a_{22}\lambda - b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

possesses two distinct real roots  $\lambda_1 = \lambda_1(x, y, u, v)$  and  $\lambda_2 = \lambda_2(x, y, u, v)$  at every point of  $D$ . Moreover, we assume for convenience

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix} \neq 0$$

at every point of  $D$ . The latter condition can always be satisfied by introducing new coordinates instead of  $x$  and  $y$ .

---

<sup>1</sup> Computing Centre of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest.

Let  $\mathcal{J}$  be a curve in the  $x, y$ -plane, on which the values of  $u$  and  $v$  are given. We assume that  $\mathcal{J}$  is finite, rectifiable and has no double points. The curve  $\mathcal{J}$  should be represented by the parametric equations  $x = x(s)$  and  $y = y(s)$  where the functions  $x(s)$  and  $y(s)$  have continuous third derivatives ( $s$  is the natural parameter of the curve  $\mathcal{J}$ ). The initial values are assumed to be given parametrically by three times continuously differentiable functions  $u(s)$  and  $v(s)$ . The points  $(x(s), y(s), u(s), v(s))$  should lie in  $D$  for all possible values of  $s$ . Finally, we shall need the hypothesis that the direction of  $\mathcal{J}$  is nowhere identical with one of the two "characteristic directions" determined by the vectors  $[1, \lambda_1(s)]$  and  $[1, \lambda_2(s)]$  respectively:

$$(y'(s) - \lambda_1(s)x'(s))(y'(s) - \lambda_2(s)x'(s)) \neq 0$$

where  $\lambda_i(s)$  is an abbreviation for  $\lambda_i(x(s), y(s), u(s), v(s))$ .

We replace the system (1a)–(1b) by the so-called characteristic system

$$(2a) \quad \lambda_1 x_\xi - y_\xi = 0,$$

$$(2b) \quad \lambda_2 x_\eta - y_\eta = 0,$$

$$(2c) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} - b_{11} & h_1 x_\xi - a_{11} u_\xi^* - a_{12} v_\xi^* \\ \lambda_1 a_{21} - b_{21} & h_2 x_\xi - a_{21} u_\xi^* - a_{22} v_\xi^* \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2d) \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 a_{11} - b_{11} & h_1 x_\eta - a_{11} u_\eta^* - a_{12} v_\eta^* \\ \lambda_2 a_{21} - b_{21} & h_2 x_\eta - a_{21} u_\eta^* - a_{22} v_\eta^* \end{vmatrix} = 0,$$

where  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ ,  $u^* = u^*(\xi, \eta)$  and  $v^* = v^*(\xi, \eta)$  are unknown functions of the new coordinates  $\xi$  and  $\eta$ . Expanding the determinants on the left side of (2c) and (2d) the characteristic system can be brought into the form

$$(3a) \quad \lambda_1 x_\xi - y_\xi = 0,$$

$$(3b) \quad \lambda_2 x_\eta - y_\eta = 0,$$

$$(3c) \quad a_{11}^* u_\xi^* + a_{12}^* v_\xi^* + h_1^* x_\xi = 0,$$

$$(3d) \quad a_{21}^* u_\eta^* + a_{22}^* v_\eta^* + h_2^* x_\eta = 0.$$

It is easy to show (see, for example [2], p. 75) that

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & -1 & 0 & 0 \\ h_1^* & 0 & a_{11}^* & a_{12}^* \\ h_2^* & 0 & a_{21}^* & a_{22}^* \end{vmatrix} \neq 0$$

at every point of  $D$ .

By the so-called equivalence theorem (see, for example [2], p. 76) our initial value problem for the system (1a)–(1b) is equivalent to the following initial value problem for the characteristic system: determine solutions  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ ,  $u^* = u^*(\xi, \eta)$  and  $v^* = v^*(\xi, \eta)$  of the characteristic



system (3a)—(3d) such that these solutions on the line  $\xi + \eta = 0$  satisfy the following initial conditions:

$$\begin{aligned}x(\xi(s), \eta(s)) &= x(s), \\y(\xi(s), \eta(s)) &= y(s), \\u^*(\xi(s), \eta(s)) &= u(s), \\v^*(\xi(s), \eta(s)) &= v(s),\end{aligned}$$

where  $s$  is now the natural parameter of the line  $\xi + \eta = 0$ . It is a well-known result of FRIEDRICHS and LEWY (see [2], pp. 79 ff.) that the initial value problem for the characteristic system has uniquely determined solutions  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ ,  $u^* = u^*(\xi, \eta)$  and  $v^* = v^*(\xi, \eta)$  inside a trapezoid<sup>1</sup>  $T$  bounded by the initial segment  $AB$  of the line  $\xi + \eta = 0$ , the line  $\eta = \text{const.}$  through  $A$ , the line  $\xi = \text{const.}$  through  $B$  and a line parallel to the line  $\xi + \eta = 0$ ; moreover the functions  $x, y, u^*$  and  $v^*$  have continuous second partial derivatives inside  $T$ . Then by the equivalence theorem the transformation

$$x = x(\xi, \mu) \quad y = y(\xi, \eta)$$

has an inverse

$$\xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y)$$

and the functions

$$u(x, y) = u^*(\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad v(x, y) = v^*(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

are the (unique) solutions of our original initial value problem in a trapezoid-like region  $S$  of the  $x, y$ -plane, bounded by the curve  $\mathcal{I}$ , the curves  $\eta = \text{const.}$  and  $\xi = \text{const.}$  through the end points  $A^*$  and  $B^*$  of the curve  $\mathcal{I}$ , and a curve parallel to  $\mathcal{I}$ ; moreover the functions  $u(x, y)$  and  $v(x, y)$  have continuous second partial derivatives in  $S$ .

MASSAU'S method can now be described as a process in the  $\xi, \eta$ -plane. We choose a sequence of (not necessarily equally spaced) grid points on the segment  $AB$  of the line  $\xi + \eta = 0$ . These grid points will be called the grid points at the 0-th level. If  $P_1$  and  $P_2$  are two adjacent grid points at the  $j - 1$ -th level and the  $\eta$  coordinate of  $P_1$  is greater than that of  $P_2$ , then the point of intersection  $Q$  of the line  $\eta = \text{const.}$  through  $P_1$  with the line  $\xi = \text{const.}$  through  $P_2$  will be, by definition, a grid point at the  $j$ -th level. By successive application of this construction we get a system of grid points in the triangle  $ABC$  (see Fig. 1). It should be noted that at each level there is one point less than at the preceding one.

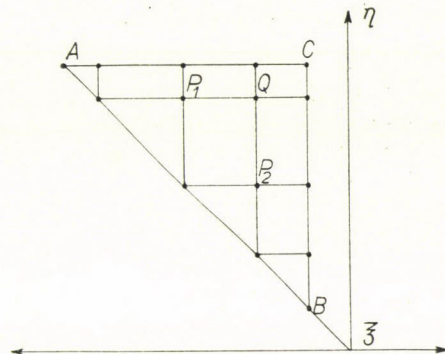


Figure 1.

<sup>1</sup> In what follows we shall regard the half-plane above the line  $\xi + \eta = 0$  only.

We replace the characteristic system (3a)–(3d) by the finite-difference equations

$$(4a) \quad \bar{y}(Q) - \bar{y}(P_1) = \bar{\lambda}_1(P_1) [\bar{x}(Q) - \bar{x}(P_1)],$$

$$(4b) \quad \bar{y}(Q) - \bar{x}(P_2) = \bar{\lambda}_2(P_1) [\bar{x}(Q) - \bar{x}(P_2)],$$

$$(4c) \quad \bar{a}_{11}^*(P_1) [\bar{u}^*(Q) - \bar{u}^*(P_1)] + \bar{a}_{12}^*(P_1) [\bar{v}^*(Q) - \bar{v}^*(P_1)] + \bar{h}_1^*(P_1) [\bar{y}(Q) - \bar{x}(P_1)] = 0,$$

$$(4d) \quad \bar{a}_{21}^*(P_1) [\bar{u}^*(Q) - \bar{u}^*(P_2)] + \bar{a}_{22}^*(P_1) [\bar{v}^*(Q) - \bar{v}^*(P_2)] + \bar{h}_2^*(P_1) [\bar{x}(Q) - \bar{x}(P_2)] = 0,$$

where  $\bar{\lambda}_i(P_1)$  is an abbreviation for  $\lambda_i(\bar{x}(P_1), \bar{y}(P_1), \bar{u}^*(P_1), \bar{v}^*(P_1))$  and  $\bar{a}_{ik}^*(P_1)$  is an abbreviation for  $a_{ik}^*(\bar{x}(P_1), \bar{y}(P_1), \bar{u}^*(P_1), \bar{v}^*(P_1))$ . The initial conditions for the system (4a)–(4d) are

$$(5) \quad \bar{x}(R_0) = x(s_0); \quad \bar{y}(R_0) = y(s_0); \quad \bar{u}^*(R_0) = u(s_0); \quad \bar{v}^*(R_0) = v(s_0)$$

where  $R_0$  is an arbitrary grid point at the 0-th level and  $s_0$  is the corresponding value of the parameter  $s$ . If the values of  $\bar{x}(P_i)$ ,  $\bar{y}(P_i)$ ,  $\bar{u}^*(P_i)$  and  $\bar{v}^*(P_i)$  are already known ( $i = 1, 2$ ) and

$$\Delta(P_1) = \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_1(P_1) & -1 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_2(P_1) & -1 & 0 & 0 \\ \bar{h}_1^*(P_1) & 0 & \bar{a}_{11}^*(P_1) & \bar{a}_{12}^*(P_1) \\ \bar{h}_2^*(P_1) & 0 & \bar{a}_{21}^*(P_1) & \bar{a}_{22}^*(P_1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

then we can determine  $\bar{x}(Q)$ ,  $\bar{y}(Q)$ ,  $\bar{u}^*(Q)$  and  $\bar{v}^*(Q)$  from the linear equations (4a)–(4d).

Since the coefficients of the equations (4a)–(4d) do not contain explicitly the  $\xi$ ,  $\eta$  coordinates, MASSAU's method can also be formulated as a process

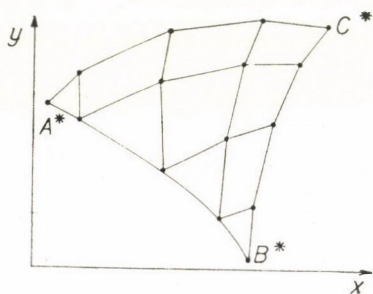


Figure 2.

$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$  and  $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y})$  which may be taken as approximate values of  $u(\bar{x}, \bar{y})$  and  $v(\bar{x}, \bar{y})$  respectively.

Let  $h$  denote the maximum arc length between two adjacent grid points of  $\mathcal{A}$  (that is the maximum of the distance between two adjacent grid points

in the  $x$ ,  $y$ -plane. The grid points on the line  $\xi + \eta = 0$  correspond to grid points on the initial curve  $\mathcal{A}$  such that the distance between two adjacent grid points on the line  $\xi + \eta = 0$  is equal to the arc length between the corresponding grid points on the curve  $\mathcal{A}$ ; the coordinates of these grid points and the corresponding values of  $\bar{u}$  and  $\bar{v}$  can be determined from the initial conditions (5). By successive application of the equations (4a)–(4d) we can find the coordinates  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  of a system of irregularly spaced grid points in the  $x$ ,  $y$ -plane (see Fig. 2) and the corresponding values



of the line  $\xi + \eta = 0$ ), and  $r$  denote the number of grid points on the curve  $\mathcal{A}$ . We shall prove the following theorem:

If the „stability condition”  $rh = O(1)$  is satisfied<sup>2</sup> then as long as the point  $(x, y)$  lies in the region  $S$ , there exists a grid point  $(\bar{x}, \bar{y})$  such that the inequalities

$$x - \bar{x} = O(h); \quad y - \bar{y} = O(h); \quad u(x, y) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = O(h);$$

$$v(x, y) - \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = O(h)$$

hold.

In order to prove our theorem we shall return to the formulation of MASSAU'S method as a process in the  $\xi, \eta$ -plane. Instead of the characteristic equations (3a)–(3d) we shall first consider the simpler characteristic system

$$(6a) \quad \alpha_{11} f_{\xi} + \alpha_{12} g_{\xi} = 0,$$

$$(6b) \quad \alpha_{21} f_{\eta} + \alpha_{22} g_{\eta} = 0$$

for the two unknown functions  $f = f(\xi, \eta)$  and  $g = g(\xi, \eta)$ . We assume that the coefficients  $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(f, g)$  have bounded third partial derivatives in a domain  $D_2$  of the  $f, g$ -plane and the inequality

$$(7) \quad |\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}| \geq \delta > 0$$

holds in  $D_2$ . The functions  $f$  and  $g$  should satisfy on the line  $\xi + \eta = 0$  the initial conditions

$$f(\xi(s), \eta(s)) = f(s), \quad g(\xi(s), \eta(s)) = g(s),$$

where  $f(s)$  and  $g(s)$  are three times continuously differentiable functions of the natural parameter  $s$ , and the points  $(f(s), g(s))$  are in the domain  $D_2$ .

The finite-difference equations corresponding to (6a)–(6b) are

$$(8a) \quad \bar{\alpha}_{11}(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_1)] + \bar{\alpha}_{12}(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_1)] = 0,$$

$$(8b) \quad \bar{\alpha}_{21}(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_2)] + \bar{\alpha}_{22}(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_2)] = 0,$$

where  $\bar{\alpha}_{11}(P_1)$  is an abbreviation for  $\alpha_{11}(\bar{f}(P_1), \bar{g}(P_1))$ .

By the existence theorem of FRIEDRICHs and LEWY the initial value problem for the equations (6a)–(6b) has uniquely determined solutions  $f(\xi, \eta)$  and  $g(\xi, \eta)$  with continuous second partial derivatives in a trapezoid  $T_2$  whose sides are the initial segment of the line  $\xi + \eta = 0$ , the lines  $\xi = \text{const.}$  and  $\eta = \text{const.}$  through the end points of this segment, and a line parallel to the line  $\xi + \eta = 0$ . It is clear from their proof that the points  $(f(R), g(R))$  and  $(\bar{f}(R), \bar{g}(R))$  lie in  $D_2$  for all grid points  $R$  in the trapezoid  $T_2$ .

From the construction of the grid points it follows that

$$\Delta \xi = \overline{P_1 Q} < h; \quad \Delta \eta = \overline{P_2 Q} < h, \quad \overline{P_1 P_2} \leq h.$$

<sup>2</sup> Here and in what follows  $A = O(B)$  means that for all sufficiently small values of  $h$   $|A| \leq c|B|$  where  $c$  is a positive constant whose numerical value may depend on bounds for derivatives of the coefficients and the solutions but not on  $h$  and the coordinates of the grid points.



Let us now assume that the points  $P_1, P_2$  and  $Q$  lie in the trapezoid  $T_2$ . Then since  $f$  and  $g$  have continuous second partial derivatives in  $T_2$

$$(9a) \quad \begin{aligned} & \alpha_{11}(P_1) [f(Q) - f(P_1)] + \alpha_{12}(P_1) [g(Q) - g(P_1)] = \\ & = \alpha_{11}(P_1) f_\xi(P_1) \Delta \xi + \alpha_{12}(P_1) g_\xi(P_1) \Delta \xi + O(h^2) \end{aligned}$$

and since  $f_\eta(P_2) = f_\eta(P_1) + O(h)$ ;  $g_\eta(P_2) = g_\eta(P_1) + O(h)$

$$(9b) \quad \begin{aligned} & \alpha_{21}(P_1) [f(Q) - f(P_2)] + \alpha_{22}(P_1) [g(Q) - g(P_2)] = \\ & = \alpha_{21}(P_1) f_\eta(P_1) \Delta \eta + \alpha_{22}(P_1) g_\eta(P_1) \Delta \eta + O(h^2). \end{aligned}$$

But the functions  $f$  and  $g$  satisfy the equations (6a)–(6b) thus from (9a)–(9b) we get

$$(10a) \quad \alpha_{11}(P_1) [f(Q) - f(P_1)] + \alpha_{12}(P_1) [g(Q) - g(P_1)] = O(h^2)$$

$$(10b) \quad \alpha_{21}(P_1) [f(Q) - f(P_2)] + \alpha_{22}(P_1) [g(Q) - g(P_2)] = O(h^2).$$

Let us now put

$$w(R) = f(R) - \bar{f}(R); \quad z(R) = g(R) - \bar{g}(R)$$

where  $R$  is an arbitrary grid point in  $T_2$ . Then because of the continuous differentiability of the coefficients  $\alpha_{ik}$  in the domain  $D_2$ , we have

$$\alpha_{ik}(P_1) - \bar{\alpha}_{ik}(P_1) = O(w(P_1)) + O(z(P_1)).$$

Substitution of these inequalities into (8a)–(8b) yields for  $i = 1, 2$

$$(11) \quad \begin{aligned} & \alpha_{i1}(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_i)] + \alpha_{i2}(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_i)] = \\ & = O(w(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_i)]) + O(z(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_i)]) + \\ & + O(w(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_i)]) + O(z(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_i)]). \end{aligned}$$

The inequalities

$$\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_i) = O(h); \quad \bar{g}(Q) - \bar{g}(P_i) = O(h)$$

can easily be derived as supplementary results from the existence proof of FRIEDRICHS and LEWY (see [2], pp. 82–83) thus from (11) we get

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_1)] + \alpha_{12}(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_1)] = \\ & = O(w(P_1) h) + O(z(P_1) h) \\ & \alpha_{21}(P_1) [\bar{f}(Q) - \bar{f}(P_2)] + \alpha_{22}(P_1) [\bar{g}(Q) - \bar{g}(P_2)] = \\ & = O(w(P_1) h) + O(z(P_1) h). \end{aligned}$$

Subtraction of these inequalities from (10a)–(10b) then yields

$$(12a) \quad \begin{aligned} & \alpha_{11}(P_1) [w(Q) - w(P_1)] + \alpha_{12}(P_1) [z(Q) - z(P_1)] = \\ & = O(w(P_1) h) + O(z(P_1) k) + O(h^2) \end{aligned}$$

$$(12b) \quad \alpha_{21}(P_1)[w(Q) - w(P_2)] + \alpha_{22}(P_1)[z(Q) - z(P_2)] = \\ = O(w(P_1)h) + O(z(P_1)h) + O(h^2).$$

Let now  $M_j$  denote the maximum of  $|\alpha_{i1}(R)w(R) + \alpha_{i2}(R)z(R)|$  for  $i = 1, 2$  and for all grid points at the  $j$ -th level, and  $N_j$  denote the maximum of  $\max[|w(R)|, |z(R)|]$  for all grid points at the  $j$ -th level. Then<sup>3</sup>

$$(13) \quad M_j \leq c_1 N_j; \quad N_j \leq c_2 M_j.$$

The first of these inequalities immediately follows from the boundedness of the coefficients  $\alpha_{ik}$ , the second is a consequence of (7).

Because of the continuous differentiability of the coefficients  $\alpha_{ik}$  and the solutions  $f$  and  $g$  we have

$$\alpha_{ik}(Q) - \alpha_{ik}(P_1) = O(h)$$

whence for  $i = 1, 2$

$$(14) \quad \alpha_{i1}(P_1)w(Q) + \alpha_{i2}(P_1)z(Q) = \alpha_{i1}(Q)w(Q) + \alpha_{i2}(Q)z(Q) + O(M_j h).$$

From (12a) and (13) we obtain

$$(15a) \quad \alpha_{11}(P_1)w(Q) + \alpha_{12}(P_1)z(Q) = \\ = \alpha_{11}(P_1)w(P_1) + \alpha_{12}(P_1)z(P_1) + O(M_{j-1}h) + O(h^2).$$

Similarly from (12b) using (13) and the continuous differentiability of the coefficients we get

$$(15b) \quad \alpha_{21}(P_1)w(Q) + \alpha_{22}(P_1)z(Q) = \\ = \alpha_{21}(P_1)w(P_2) + \alpha_{22}(P_1)z(P_2) + O(M_{j-1}h) + O(h^2) = \\ = \alpha_{21}(P_2)w(P_2) + \alpha_{22}(P_2)z(P_2) + O(M_{j-1}h) + O(h^2).$$

(14), (15a) and (15b) together yield

$$(1 - c_3 h) M_j \leq M_{j-1} + c_4(M_{j-1}h + h^2) \\ M_j \leq M_{j-1} + c_5(M_{j-1}h + h^2).$$

Since  $M_0 = 0$  it is evident that if  $F_j$  satisfies for  $j \geq 1$  the linear difference equation

$$F_j = (1 + c_5 h) F_{j-1} + c_5 h^2$$

and the initial condition  $F_0 = 0$ , then  $M_j \leq F_j$ . The solution of the latter difference equation problem is

$$F_j = c_5 h^2 (1 + c_5 h)^{j-1} + h [(1 + c_5 h)^{j-1} - 1]$$

thus

$$F_j < (c_5 h^2 + h) e^{c_5 h(j-1)}$$

<sup>3</sup>  $c_1, c_2, c_3, c_4$  and  $c_5$  are positive constants whose numerical value is independent of  $h$  and the coordinates of the grid points (but may depend on bounds for derivatives of the coefficients and the solutions).





## REFERENCES

- [1] FORSYTHE, G. E.—WASOW, W.: *Finite-difference methods for partial differential equations*. Wiley, New York, 1960.
- [2] SAUER, R.: *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen*. 2. Auflage, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
- [3] LISTER, M.: *The numerical solution of hyperbolic differential equations by the method of characteristics*. In the collection "Mathematical methods for digital computers" edited by A. Ralston and H. Wilf, Wiley, New York, 1960. pp. 165—179.
- [4] ПАНОВ, Д. Ю.: Численное решение квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, Москва, 1957.

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК (МЕТОДА МАССО)

L. VEIDINGER

### Резюме

В связи с так называемым методом характеристик (методом Массо) доказывается следующая теорема:

Пусть  $h$  — максимальная длина дуги между двумя соседними точками сетки на начальной кривой  $\mathcal{I}$  и  $r$  — число точек сетки на кривой  $\mathcal{I}$ . Пусть, далее, выполняется «условие устойчивости»  $rh = O(1)$ . Тогда к каждой точке  $(x, y)$  в некоторой области  $S$  ограниченной кривой  $\mathcal{I}$ , характеристиками, проходящими через концы  $\mathcal{I}$  и кривой  $\mathcal{I}'$  параллельной к  $\mathcal{I}$ , можно найти точку сетки  $(\bar{x}, \bar{y})$  так что выполняются неравенства

$$x - \bar{x} = O(h); \quad y - \bar{y} = O(h); \quad u(x, y) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = O(h); \quad v(x, y) - \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = O(h)$$

где  $u$  и  $v$  — точные решения задачи Коши для системы уравнений (1a)—(1b) а  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  — приближенные значения по методу Массо.



# OSZILLATIONSSÄTZE FÜR EINEN TYP VON NICHTLINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

von  
L. PINTÉR<sup>1</sup>

## Einleitung

Die Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichungen verhalten sich in Bezug auf den Oszillationscharakter wesentlich anders als die der linearen. Im Falle einer linearen Differentialgleichung oszilliert entweder jede, oder aber keine der Lösungen, hingegen kann im nichtlinearen Fall vorkommen, dass gleichzeitig oszillatorische und auch nicht-oszillatorische Lösungen existieren (vgl. [1]).

Wir wollen in diesem Artikel die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y'' + f(t) g(y) h(y') = 0$$

und allgemeiner der Differentialgleichungen

$$(D) \quad y'' + \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(y) h_i(y') = 0$$

bezüglich der Oszillation untersuchen.

## § 1.

In diesem und im folgenden Paragraphen erweitern wir zwei Resultate von F. V. ATKINSON [2] über die Differentialgleichung

$$y'' + f(t) y^{2k+1} = 0$$

auf den allgemeineren Typ (D). Wir werden unsere Resultate durch eine weitere Entwicklung der Methode von ATKINSON erzielen.

**Satz 1.** *Es sei in der Differentialgleichung (D), für  $i = 1, \dots, n$ ,*

- a)  $f_i(t)$  eine im Intervall  $[0, \infty)$  definierte, positive, stetige Funktion,
- b)  $g_i(t)$  eine im Intervall  $(-\infty, \infty)$  definierte, monoton wachsende, stetige Funktion mit  $\operatorname{sg} g_i(t) = \operatorname{sg} t$ ,
- c)  $h_i(t)$  eine im Intervall  $(-\infty, \infty)$  definierte, monoton wachsende, positive, stetige Funktion; und man nehme weiter an:
- d) es gibt ein  $a > 0$ , so dass  $g_i(t)$  und  $h_i(t)$  entweder im Intervall  $[0, a]$ , oder im Intervall  $[-a, 0]$  der Lipschitz-Bedingung genügen ( $i = 1, \dots, n$ ).

<sup>1</sup> Bolyai Institut der Universität, Szeged.



Es gelten dann die folgenden Behauptungen:

*a) Damit alle Lösungen von (D) oszillatorisch sind, ist es hinreichend, dass es mindestens für ein  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ )*

$$(A) \quad \int_0^{\infty} t f_k(t) dt = \infty$$

und für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{g_k(s)} < \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{ds}{g_k(s)} < \infty$$

gültig seien.

*β) Für die Existenz einer nichtoszillatorischen Lösung von (D) ist es hinreichend, dass*

$$\int_0^{\infty} t \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \infty$$

besteht.

**Bemerkung.** Man kann von der Behauptung des Satzes folgern, dass z. B. im Falle, in dem für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{g_i(s)} + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{ds}{g_i(s)} \right) < \infty$$

ist, die Gültigkeit der Relation

$$(B) \quad \int_0^{\infty} t \sum_{i=1}^n f_i(t) dt = \infty$$

notwendig und hinreichend dazu ist, dass alle Lösungen der Differentialgleichung (D) oszillatorisch seien.

**Beweis.** Ad *a)* Wir nehmen an, dass es eine nicht-oszillatorische Lösung  $y(t)$  der Differentialgleichung (D) existiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für  $t \geq b > 0$  auch  $y(t) > 0$  ist. Es ist klar, dass  $y'(t)$  im Intervall  $[b, \infty)$  eine monoton abnehmende Funktion ist, also existiert  $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)$  und ist nichtnegativ. Im Intervall  $[b, \infty)$  ist also  $y'(t) \geq 0$ , d. h.  $y(t)$  eine nicht-abnehmende Funktion. Integrieren wir (D) von  $t_0$  bis  $t$  ( $b \leq t_0 < t$ ), so wird:

$$(1) \quad y'(t) - y'(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds = 0.$$

Da nach den vorigen  $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)$  existiert und nichtnegativ ist, wird:

$$(2) \quad y'(t) \geq \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds \quad \text{für } t \geq b.$$

Integrieren wir beide Seiten dieser Ungleichung von  $b$  bis  $t$  ( $b < t$ ), so bekommen wir mit einer einfachen Abschätzung:

$$(3) \quad y(t) \geq \int_b^t (s-b) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds \geq \int_b^t (s-b) f_k(s) g_k(y(s)) h_k(y'(s)) ds,$$

wo  $f_k(t)$  und  $g_k(t)$  den im Satze angegebenen Bedingungen genügen.  $g_k(t)$  und  $h_k(t)$  sind wegen b) und c) monoton wachsende Funktionen, folglich hat man:

$$(4) \quad \frac{g_k(y(t))}{g_k\left(\int_b^t (s-b) f_k(s) g_k(y(s)) h_k(y'(s)) ds\right)} \geq 1,$$

$$(5) \quad \frac{h_k(y'(t))}{h_k(0)} \geq 1.$$

Aus (4) und (5) folgt

$$(6) \quad \frac{(t-b) f_k(t) g_k(y(t)) h_k(y'(t))}{h_k(0) g_k\left(\int_b^t (s-b) f_k(s) g_k(y(s)) h_k(y'(s)) ds\right)} \geq (t-b) f_k(t).$$

Integrieren wir (6) von  $t_1$  bis  $t_2$  ( $b < t_1 < t_2$ ) und führen wir die Bezeichnung:

$$G_k(t) = \int_b^t \frac{ds}{g_k(s)}$$

ein, so wird:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_k(0)} \left[ G_k \left( \int_b^{t_2} (s-b) f_k(s) g_k(y(s)) h_k(y'(s)) ds \right) - \right. \\ & \left. - G_k \left( \int_b^{t_1} (s-b) f_k(s) g_k(y(s)) h_k(y'(s)) ds \right) \right] \geq \int_{t_1}^{t_2} (s-b) f_k(s) ds. \end{aligned}$$

Wenn jetzt  $t_2 \rightarrow \infty$ , so bleibt die linke Seite dieser Ungleichung wegen der Existenz von  $\lim_{t \rightarrow \infty} G_k(t)$  endlich, während die rechte Seite auf Grund von

(A) über allen Grenzen wächst, was ein Widerspruch ist.

Damit haben wir Behauptung  $\alpha$  bewiesen.

Ad  $\beta$ ). Wir nehmen jetzt an, dass

$$\int_0^\infty t \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \infty$$

und die Bedingung d) im Intervall  $[0, a]$  für  $g_i(t)$  und  $h_i(t)$  erfüllt ist, wo  $0 < a < \infty$  besteht. Offenbar können wir  $a \leq 1$  bedingen.

Wir zeigen, dass in diesem Falle (D) eine nicht-oszillatorische Lösung hat.

Man kann durch Ableitung leicht zeigen, dass wenn die Gleichung

$$(7) \quad y(t) = a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds$$

mindestens eine gleichmässig beschränkte stetige Lösung hat, dann diese Lösung auch eine Lösung von (D) ist. Diese Lösung kann wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

gewiss nicht oszillatorisch sein.

Wir konstruieren durch sukzessive Approximation eine solche Lösung.

Es sei

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a, \\ y_2(t) &= a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y_1(s)) h_i(y_1'(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_m(t) &= a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y_{m-1}(s)) h_i(y_{m-1}'(s)) ds, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die auf diese Weise angegebene Folge im Intervalle  $[c, \infty)$  gleichmässig konvergent ist. ( $c$  bestimmen wir später.)

Erstens beweisen wir, dass ein Punkt  $t_0 \geq 0$  existiert, so dass im Intervall  $[t_0, \infty)$  für jedes  $m$  gilt:

$$(8) \quad 0 \leq y_m(t) \leq a \quad \text{und} \quad 0 \leq y_m'(t) \leq a.$$

Wir werden den Beweis durch vollständige Induktion durchführen. Für  $m = 1$  ist (8) offensichtlich erfüllt. Im Falle  $m = 2$  ist nach der Definition

$$\begin{aligned} y_2(t) &= a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(0) ds, \\ y_2'(t) &= \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(0) ds. \end{aligned}$$



Wählen wir jetzt  $t_0$  so gross, dass

$$2 \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(a) ds < a$$

und

$$2 \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(a) ds < a$$

gültig seien, falls  $t \geq t_0$ . Solches  $t_0$  existiert immer, da nach der Annahme

$$\int_0^{\infty} t \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \infty, \quad \text{und umso mehr} \quad \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \infty.$$

Da die Funktionen  $h_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) monoton wachsen, wird für  $t \geq t_0$

$$y_2(t) \geq a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(a) ds > 0,$$

andererseits ist wegen

$$\int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(0) ds > 0$$

$y_2(t) \leq a$ . Ferner ist

$$y_2'(t) = \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(0) ds \leq \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(a) ds < a$$

für  $t \geq t_0$ ; und es ist offensichtlich, dass  $y_2'(t) \geq 0$  ist.

Wir nehmen jetzt an, dass

$$0 \leq y_m(t) \leq a; \quad 0 \leq y_m'(t) \leq a \quad \text{für} \quad t \geq t_0$$

und zeigen, dass

$$0 \leq y_{m+1}(t) \leq a \quad \text{und} \quad 0 \leq y_{m+1}'(t) \leq a \quad \text{für} \quad t \geq t_0.$$

Nach der Definition ist

$$\begin{aligned} y_{m+1}(t) &= a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y_m(s)) h_i(y'_m(s)) ds \geq \\ &\geq a - \int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(a) ds \geq 0. \end{aligned}$$

Andererseits hat man

$$\int_t^{\infty} (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y_m(s)) h_i(y'_m(s)) ds \geq 0,$$

und somit ist  $y_{m+1}(t) \leq a$ , wenn  $t \geq t_0$ .

In ähnlicher Weise ist

$$\begin{aligned} y'_{m+1}(t) &= \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y_m(s)) h_i(y'_m(s)) ds \geq 0, \\ y'_{m+1}(t) &\leq \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a) h_i(a) ds \leq a, \quad \text{wenn } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Somit haben wir bewiesen, dass für jedes  $m$

$$0 \leq y_m(t) \leq a \quad \text{und} \quad 0 \leq y'_m(t) \leq a.$$

Die Funktionen  $g_i(t)$  und  $h_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) genügen im Intervall  $[0, a]$  einer Lipschitz-Bedingung, d. h.

$$\begin{aligned} |g_i(t) - g_i(s)| &\leq G_i |t - s|, \\ |h_i(t) - h_i(s)| &\leq H_i |t - s|, \\ i &= 1, \dots, n; \quad t, s \in [0, a]. \end{aligned}$$

Wählen wir jetzt ein  $t_1$  so, dass für  $t \geq t_1$

$$2 \int_t^{\infty} (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) H_i + h_i(a) G_i] ds \leq q < 1$$

ist. Offenbar existiert nach den auf die Funktionen  $f_i(t)$  gestellten Forderungen ein solches  $t_1$ .

Wir beweisen, dass im Falle  $m \geq 2$  für  $t \geq t_1$

$$(9) \quad |y_{m+1}(t) - y_m(t)| + |y'_{m+1}(t) - y'_m(t)| \leq q^{m-1}$$

ist.

Wir schliessen durch vollständige Induktion. Für  $m = 2$  ist

$$\begin{aligned} & |y_3(t) - y_2(t)| + |y'_3(t) - y'_2(t)| \leq \\ & \leq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) |g_i(y_2(s)) h_i(y'_2(s)) - g_i(y_1(s)) h_i(y'_1(s))| ds \leq \\ & \leq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) |h_i(y'_2(s)) - h_i(y'_1(s))| + h_i(a) |g_i(y_2(s)) - \\ & - g_i(y_1(s))|] ds \leq 2a \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) H_i + h_i(a) G_i] ds \leq q. \end{aligned}$$

Die Behauptung gilt also für  $m = 2$ .

Wir nehmen jetzt an dass (9) für ein  $m (\geq 2)$  besteht und schliessen daraus auf die Gültigkeit von (9) für  $m + 1$ . Man hat nämlich

$$\begin{aligned} & |y_{m+2}(t) - y_{m+1}(t)| + |y'_{m+2}(t) - y'_{m+1}(t)| \leq \\ & \leq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) |g_i(y_{m+1}(s)) h_i(y'_{m+1}(s)) - g_i(y_m(s)) h_i(y'_m(s))| ds \leq \\ & \leq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) |h_i(y'_{m+1}(s)) - h_i(y'_m(s))| + \\ & + h_i(a) |g_i(y_{m+1}(s)) - g_i(y_m(s))|] ds \leq \\ & \leq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) H_i |y'_{m+1}(s) - y'_m(s)| + \\ & + h_i(a) G_i |y_{m+1}(s) - y_m(s)|] ds \leq \\ & \leq q^{m-1} \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) H_i + h_i(a) G_i] ds \leq q^m, \end{aligned}$$

für  $t \geq t_1$ .

Somit wurde (9) für jedes  $m$  und für  $t \geq t_1$  bewiesen. Nach unserer Annahme ist  $0 < q < 1$ , somit ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  konvergent. Diese numerische Reihe ist nach (9) eine Majorante der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y'_{n+2}(t) - y'_{n+1}(t)|,$$



woraus die gleichmässigen Konvergenzen

$$y_n(t) \Rightarrow y(t) \quad \text{und} \quad y'_n(t) \Rightarrow y'(t)$$

folgen. Wir haben also bewiesen, dass eine Lösung  $y(t)$  von (7) existiert, die im Intervall  $[t_1, \infty)$  den Bedingungen  $y(\infty) = a$  und  $y'(\infty) = 0$  genügt, d. h. nicht-oszillatorisch ist.

Ist die Bedingung d) im Intervall  $[-a, 0)$  erfüllt, so konstruieren wir mit der vorigen Methode statt (7) die Lösung von

$$(7') \quad y(t) = -a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds.$$

## § 2.

Im folgenden Satz geben wir eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$(D^*) \quad y'' + \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(y) h(y') = 0$$

eine nicht oszillatorische Lösung habe.

**Satz 2.** Die Funktionen  $f_i(t)$ ,  $g_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $h(t)$  sollen den folgenden Bedingungen genügen:

a)  $f_i(t)$  ist eine im Intervall  $(0, \infty)$  definierte positive, stetig differenzierbare, monoton abnehmende Funktion ( $i = 1, \dots, n$ );

b)  $g_i(t)$  ist eine im Intervall  $(-\infty, \infty)$  definierte stetige, monoton wachsende Funktion,  $\operatorname{sg} g_i(t) = \operatorname{sg} t$ , ferner ist  $g_i(t)$  submultiplikativ, d. h.  $g_i(t_1 t_2) \leq \leq g_i(t_1) g_i(t_2)$  für beliebiges  $t_1$  und  $t_2$ ; endlich ist  $g_i(t) = O(t)$ , wenn  $t \rightarrow 0$ ;

c)  $h(t)$  ist eine im Intervall  $(-\infty, \infty)$  definierte positive, stetige Funktion mit

$$\int_0^t \frac{s}{h(s)} ds \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty.$$

Ist

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t) dt < \infty,$$

so ist jede im Intervall  $[a, \infty)$  definierte Lösung  $y(t)$  der Differentialgleichung  $(D^*)$  gleichmässig beschränkt, und für  $t \rightarrow \infty$  strebt  $y(t)$  nach einem von Null verschiedenen Grenzwert.

**Beweis.** Erstens zeigen wir, dass wenn  $y(t)$  eine im Intervall  $[a, \infty)$  definierte Lösung der Differentialgleichung  $(D^*)$  ist, dann  $y'(t)$  gleichmässig

beschränkt ist. Wir zeigen diese Behauptung durch die Anwendung einer wohlbekannten Methode.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$H(t) = \int_0^t \frac{s \, ds}{h(s)}; \quad G_i(t) = \int_0^t g_i(s) \, ds,$$

$$E(t) = H(y'(t)) + \sum_{i=1}^n f_i(t) G_i(y(t)).$$

So wird

$$E'(t) = \frac{y'(t) y''(t)}{h(y'(t))} + \sum_{i=1}^n f_i(t) G_i(y(t)) + \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(y(t)) y'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^n f'_i(t) G_i(y(t)) \leq 0.$$

$y'(t)$  ist also gleichmässig beschränkt.

Da die in der Differentialgleichung vorkommenden Funktionen ziemlich allgemein sind, kann man nicht hoffen, dass für die Lösungen auch Unizität bestehe. Es kann vorkommen, dass die Nullstellen nicht isoliert sind. Es ist aber offensichtlich, dass eine nicht-isolierte Nullstelle entweder ein innerer Punkt eines Intervalls ist, wo die Lösung verschwindet, oder aber ist sie ein Häufungspunkt von isolierten Nullstellen. Deswegen ist es klar, dass wenn eine Lösung oszillatorisch ist, dann isolierte Nullstellen im Intervall  $t < a$  für beliebiges  $a$  existieren. Von der Differentialgleichung (D\*) ist ersichtlich, dass die Lösung an jeder isolierten Nullstelle das Vorzeichen verändert, andererseits ist  $y'(t)$  zwischen zwei nacheinanderfolgenden Nullstellen monoton wachsend, bzw. monoton abnehmend, je nachdem  $y(t) > 0$ , bzw.  $y(t) < 0$  gilt. Es folgt von den bisherigen, dass es eine aus isolierten Nullstellen von  $y(t)$  bestehende monoton zunehmende Folge  $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{n1}, t_{n2}, \dots$  existiert, so dass im Intervall  $(t_{k1}, t_{k2})$   $y(t) > 0$  ist und  $y'(t)$  nur einmal, etwa im Punkte  $t_k^0$ , ( $t_{k1} < t_k^0 < t_{k2}$ ) verschwindet.

Integrieren wir (D\*) von  $t_{k1}$  bis  $t_k^0$ :

$$y'(t_k^0) - y'(t_{k1}) + \int_{t_{k1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h(y'(s)) \, ds = 0,$$

d. h.

$$y'(t_{k1}) = \int_{t_{k1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h(y'(s)) \, ds;$$

$y'(t)$  ist im Intervall  $(t_{k1}, t_k^0)$  monoton abnehmend, somit ist hier

$$0 \leq y(t) \leq y'(t_{k1}) (t - t_{k1}),$$

Beachten wir diese Relation im vorigen Integral, so wird

$$\begin{aligned} y'(t_{k1}) &\leq \int_{t_{k1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y'(t_{k1})(s - t_{k1})) h(y'(t_{k1})) ds \leq \\ &\leq h(y'(t_{k1})) \int_{t_{k1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(s - t_{k1}) g_i(y'(t_{k1})) ds \end{aligned}$$

$y'(t_{k1}) > 0$  und, da  $y'(t)$  gleichmässig beschränkt ist, hat man

$$1 \leq K \int_{t_{k1}}^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(s) ds.$$

Das ist aber ein Widerspruch.

### § 3.

Es ist leicht zu beweisen, dass im Falle der linearen Differentialgleichungen die Bedingung (B) notwendig dazu ist, dass alle Lösungen oszillatorisch seien. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4(t+1)^2} y = 0.$$

Es ist hier

$$\int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{t}{4(t+1)^2} dt = \infty,$$

und eine Lösung dieser Differentialgleichung ist  $\sqrt{t+1}$ , die nicht-oszillatorisch ist.

Man kann die folgende Frage stellen: Existiert immer eine stetige Funktion  $f(t) > 0$  derart, dass die Differentialgleichung

$$y'' + f(t) g(y) = 0$$

eine nicht-oszillatorische Lösung hat, falls  $g(t)$  solche Eigenschaften besitzt, wie im b), mit der Ausnahme der Bedingung

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = \infty,$$

Die Antwort auf diese Frage ist bejahend. Es sei nämlich

$$f(t) = \frac{1}{4(t+1)^{\frac{3}{2}} g((t+1)^{\frac{1}{2}})}.$$



Wir zeigen zuerst, dass  $\int_0^\infty (t+1) f(t) dt = \infty$ ; daraus folgt offensichtlich auch  $\int_0^\infty t f(t) dt = \infty$ . Nun ist

$$\int_0^s (t+1) f(t) dt = \int_0^s (t+1) \frac{1}{4(t+1)^{\frac{3}{2}} g((t+1)^{\frac{1}{2}})} dt = \frac{1}{2} \int_1^{(s+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{g(u)} \rightarrow \infty$$

für  $s \rightarrow \infty$ .

Die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4(t+1)^{\frac{3}{2}} g((t+1)^{\frac{1}{2}})} g(y) = 0$$

hat nicht-oszillatorische Lösungen, eine solche ist z. B.  $y = \sqrt{t+1}$ .

Geben wir jetzt hinreichende Bedingungen dafür an, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(D) \quad y'' + \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(y(t)) h_i(y'(t)) = 0,$$

wo  $f_i(t)$ ,  $g_i(t)$  und  $h_i(t)$  solche Funktionen sind, wie im ersten Satz, oszillatorisch seien.

Die erste leicht beweisbare Bemerkung ist die folgende:

Wenn für mindestens ein  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ )

$$\int_0^\infty f_k(t) dt = \infty,$$

dann ist jede Lösung von (D) oszillatorisch.

Angenommen, es gebe eine nicht-oszillatorische Lösung  $y(t)$ , dann ist  $y(t) > 0$  für  $t \geq a$  und  $y'(t)$  ist eine monoton abnehmende nichtnegative Funktion. Nach Integration der Differentialgleichung (D) bekommen wir durch eine einfache Abschätzung:

$$y'(a) - y'(t) = \int_a^t \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds \geq g_k(y(a)) h_k(0) \int_a^t f_k(s) ds.$$

Das ist aber ein Widerspruch, da die rechte Seite über allen Grenzen wächst, die linke Seite aber wegen  $y'(a) \geq y'(t) \geq 0$  endlich bleibt.

Im folgenden wollen wir einen Satz beweisen, der ähnlich zu dem für die linearen Differentialgleichungen bestehenden Satze von M. ZLÁMAL [3] ist. Durch die Anwendung unseres Satzes können wir in gewissen Fällen bezüglich unserer Frage auch schärfere Resultate erreichen als bei dem obigen Satze.

**Satz 3.** Es seien  $f_i(t)$ ,  $g_i(t)$ ,  $h_i(t)$  wie in Satz 1 [a), b), c)] und wir nehmen an, dass es eine im Intervall  $[0, \infty)$  definierte, positive, stetig differenzierbare Funktion  $\alpha(t)$  gibt, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

- 1) für mindestens ein  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) ist  $\frac{g_k(t)}{t}$  eine im Intervall  $(-\infty, 0)$  monoton wachsende, im Intervall  $(0, \infty)$  aber monoton abnehmende Funktion, und für jedes  $\varepsilon > 0$  ist

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \alpha(t) f_k(t) \frac{g_k(t)}{t} dt = \infty,$$

2) 
$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha(t)} dt < \infty.$$

Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung

$$(D) \quad y'' + \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(y) h_i(y') = 0$$

oszillatorisch.

**Beweis.** Wir nehmen an, dass es eine nicht-oszillatorische Lösung  $y(t)$  der Differentialgleichung (D) gibt. Man kann annehmen, dass für  $t \geq a$ ,  $y(t) > 0$  ist. Aus der Differentialgleichung (D) bekommen wir, dass

$$\left( \frac{y'(t)}{y(t)} \right)' = \frac{y''(t) y(t) - y'^2(t)}{y^2(t)} = - \sum_{i=1}^n f_i(t) \frac{g_i(y(t))}{y(t)} h_i(y'(t)) - \left( \frac{y'(t)}{y(t)} \right)^2.$$

Multiplizieren wir jetzt beide Seiten mit  $\alpha(t)$ . Nach partieller Integration von  $t_1$  bis  $t$  erhält man unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \alpha(t) \frac{y'(t)}{y(t)} &= \alpha(t_1) \frac{y'(t_1)}{y(t_1)} - \int_{t_1}^t \alpha(s) \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} h_i(y'(s)) ds - \\ &- \int_{t_1}^t \alpha(s) \left( \frac{y'(s)}{y(s)} \right)^2 ds + \int_{t_1}^t \alpha'(s) \frac{y'(s)}{y(s)} ds \leq \alpha(t_1) \frac{y'(t_1)}{y(t_1)} - \\ &- \int_{t_1}^t \alpha(s) \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} h_i(y'(s)) ds - \int_{t_1}^t \alpha(s) \left( \frac{y'(s)}{y(s)} \right)^2 ds + \\ &+ \left\{ \int_{t_1}^t \frac{\alpha'^2(s)}{\alpha(s)} ds \int_{t_1}^t \alpha(s) \left( \frac{y'(s)}{y(s)} \right)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\alpha(t) \frac{y'(t)}{y(t)} &\leq K_1 - \int_{t_1}^t \alpha(s) \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(t)} h_i(y'(s)) ds \leq \\ &\leq K_1 - \int_{t_1}^t \alpha(s) f_k(s) \frac{g_k(y(s))}{y(s)} h_k(y'(s)) ds,\end{aligned}$$

wo  $K_1$  eine geeignete positive Konstante ist.

Beachten wir jetzt a), b) und c), so erhalten wir, dass  $y(t)$  für  $t \geq a$  monoton wachsend,  $y'(t)$  aber monoton abnehmend ist; daraus folgt, dass  $y(t) \leq y(a) + y'(a)(t - a)$ .  $y'(a) > 0$ , somit ist von einem  $t_0$   $y(t) \leq K_2 t$ , wo  $K_2 \geq 1$  eine geeignete Konstante bedeutet. Es sei  $t_1 \geq t_0$ , dann wird unter Verwendung von 1.:

$$\alpha(t) \frac{y'(t)}{y(t)} \leq K_1 - h_k(0) \int_{t_1}^t \alpha(s) f_k(s) \frac{g_k(K_2 s)}{K_2 s} ds \leq K_1 - \frac{h_k(0)}{K_2} \int_{t_1}^t \alpha(s) f_k(s) \frac{g_k(s)}{s} ds.$$

Die rechte Seite wird wegen 1) für hinreichend grosse  $t$  negativ. Das ist aber ein Widerspruch, da nach unserer Annahme  $\alpha(t) \frac{y'(t)}{y(t)} > 0$  ist. Somit ist der Satz bewiesen.

Wir geben eine Anwendung. Es sei

$$\alpha(t) = \frac{(t+1)^{2-\varepsilon}}{g(t+1)},$$

mit konstantem  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} &= (2-\varepsilon)^2 \frac{(t+1)^{-\varepsilon}}{g(t+1)} - \frac{2(2-\varepsilon)(t+1)^{1-\varepsilon} g'(t+1)}{g^2(t+1)} + \\ &+ \frac{(t+1)^{2-\varepsilon} g''(t+1)}{g^3(t+1)}.\end{aligned}$$

Ist  $g'(t)$  gleichmässig beschränkt, so ist für die Gültigkeit von

$$\int_0^\infty \frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)} ds < \infty$$

hinreichend, dass  $\varepsilon$  so gross sei, dass

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^\varepsilon g(t+1)} < \infty$$



bestehe. Jetzt ist die erste Bedingung:

$$\int_a^{\infty} \alpha(t) f_k(t) \frac{g(t)}{t} dt = \int_a^{\infty} t^{1-\varepsilon} f_k(t) \frac{(t+1)^{2-\varepsilon}}{t^{2-\varepsilon}} \frac{g(t)}{g(t+1)} dt = \infty.$$

Das bedeutet, dass

$$\int_0^{\infty} t^{1-\varepsilon} f_k(t) dt = \infty$$

hinreichend ist dazu, dass jede Lösung von (D) oszillatorisch sei.

#### § 4.

Sind die Bedingungen a), b) und c) im Satze 1 gültig, so sind alle nicht-oszillatorische Lösungen der Differentialgleichung (D) monoton, im Intervalle  $(b, \infty)$ , wo  $b$  genügend gross ist. In dem Beweis des Satzes 1 haben wir gezeigt, dass im Falle  $\int_0^{\infty} t \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \infty$ , und  $\alpha \neq 0$ , eine solche Lösung  $y(t)$  der Differentialgleichung (D) existiert, für welche  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \alpha$ . Wir werden jetzt über die nicht-beschränkte, nicht-oszillatorische Lösungen der Differentialgleichung (D) beweisen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = p \neq 0$$

ist. Die Beweisführung ist ähnlich zu der von R. A. MOORE und Z. NEHARI [1].

**Satz 4.** Sind die Bedingungen des Satzes 1 gültig, und sind die Funktionen  $\frac{g_i(t)}{t}$  für  $t \geq 0$  monoton wachsend und für  $t \leq 0$  monoton abnehmend ( $i = 1, \dots, n$ ), ferner ist  $g_i(st) \leq g_i(s) g_i(t)$  und

$$\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t) dt < \infty,$$

so ist die nicht-oszillatorische Lösung  $y(t)$  der Differentialgleichung (D) entweder gleichmässig beschränkt, oder es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = p \neq 0.$$

**Beweis.**  $y(t)$  sei eine nicht-oszillatorische, nichtbeschränkte Lösung der Differentialgleichung (D). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für  $t \geq a$ ,  $y(t) > 0$  ist. Diese Lösung ist also im Intervall

$[a, \infty)$  monoton wachsend. Integrieren wir (D) zweimal von  $a_1$  bis  $t$  ( $a_1 > a \geq 0$ ). Wir bekommen dann:

$$(1) \quad y(t) = y(a_1) + (t - a_1) y'(t) + \int_{a_1}^t (s - a_1) \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds$$

Da  $y'(a) > 0$  ist, so für ein geeignetes  $\alpha$ ,  $\alpha y'(a) \geq y(a)$ , und so bekommen wir mit Benützung des Lagrangeschen Mittelwertsatzes, dass für

$$t > \max(|\alpha - a|, a) = \beta,$$

$$(2) \quad y(t) \leq y(a) + y'(a)(t - a) \leq y'(a)(t + \alpha - a) \leq 2y'(a)t$$

ist. Wählen wir jetzt  $a_1$  so gross, dass  $a_1 > \beta$  sei, dann wird wegen (2)

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{ty'(t)}{y(t)} + \int_{a_1}^t s \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(2y'(a)) g_i(s)}{2y'(a)s} h_i(y'(s)) ds \leq \\ &\leq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{ty'(t)}{y(t)} + \frac{1}{2y'(a)} \int_{a_1}^t \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(2y'(a)) g_i(s) h_i(0) ds. \end{aligned}$$

Es ist immer möglich für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  ein  $a^*$  zu finden, so dass für  $a_1 > a^*$

$$\frac{1}{2y'(a)} \int_{a_1}^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(2y'(a)) g_i(s) h_i(0) ds < \varepsilon$$

sei. Dann bekommen wir aus (3) für  $a_1 > a^*$

$$1 - \varepsilon \leq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{ty'(t)}{y(t)}.$$

Wegen der Voraussetzung  $y(t) \rightarrow \infty$ , ist nach (D) offensichtlich, dass  $y(t)$  von unten konkav ist, d. h.

$$y'(t) \leq \frac{y(t) - y(a)}{t - a} \leq \frac{y(t)}{t} \frac{t}{t - a},$$

also

$$1 - \varepsilon \leq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{t}{t - a}.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig klein sein kann, und die rechte Seite gegen 1 konvergiert ( $t \rightarrow \infty$ ), folgt die Gültigkeit der Relation:

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ty'(t)}{y(t)} = 1.$$

Wir müssen noch beweisen, dass  $y'(t)$  eine positive untere Grenze hat. Wählen wir  $a_1$  so gross, dass  $ty'(t) > (1 - \varepsilon) y(t)$ , falls  $t > a_1$  ist, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) (y'(a_1) - y'(t)) &= (1 - \varepsilon) \int_{a_1}^t \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(y(s)) h_i(y'(s)) ds = \\ &= \int_{a_1}^t \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} (1 - \varepsilon) y(s) h_i(y'(s)) ds \leq \\ &\leq \int_{a_1}^t \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} s y'(s) h_i(y'(s)) ds \leq \\ &\leq \int_{a_1}^t \sum_{i=1}^n f_i(s) \frac{g_i(2y'(a_1))}{2y'(a_1)} \frac{g_i(s)}{s} s y'(a_1) h_i(0) ds \leq y'(a_1) \max_{1 \leq i \leq n} h_i(0) \varepsilon, \end{aligned}$$

d. h.

$$y'(a_1) (1 - \varepsilon (1 + \max_{1 \leq i \leq n} h_i(0))) \leq y'(t) (1 - \varepsilon).$$

Ist  $\varepsilon < (1 + \max h_i(0))^{-1}$ , so folgt aus der vorigen Ungleichung, dass  $y(t)$  für  $t \geq a$  eine positive untere Grenze  $p$  hat. Da  $y'(t)$  monoton abnehmend ist, wird  $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = p$  bestehen.

Aus (4) bekommen wir also:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = p.$$

**Bemerkung 1.** Die Abschätzung  $|y(t)| \leq Kt$  ist auch für allgemeinere Differentialgleichungen gültig. Betrachten wir die Differentialgleichung (D). Für die Funktionen  $f_i(t), g_i(t), h_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) seien die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt, ferner seien die  $g_i(t)$  submultiplikativ,  $|g_i(t)| \leq c g_i(|t|)$ , wo  $c > 0$  konstant ist, und die  $h_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) seien gleichmässig beschränkte Funktionen,  $f_i(t)$  müssen aber jetzt nicht positiv sein. Die Anwendung des verallgemeinerten Bellmanschen Lemmas [4] ergibt, dass

$$|y(t)| \leq Kt,$$

wenn  $\int_a^\infty \sum_{i=1}^n |f_i(s)| g_i(s) ds < \infty$  und der Wertbereich der Funktionen  $G_i(t) =$   
 $= \int_a^t \frac{ds}{g_i(s)}$  die ganze Gerade ist.



Es ist leicht zu beweisen, dass auch  $y'(t)$  gleichmässig beschränkt ist.

**Bemerkung 2.** Wir werden jetzt noch einen Satz formulieren.

**Satz 5.** Sind die Bedingungen a), b), c) des Satzes 1, 2 erfüllt, dann ist die Gültigkeit der Bedingung d) notwendig und hinreichend dafür, dass eine Lösung  $y(t)$  existiere, für die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = a \neq 0$$

ist.

Dieser Satz ist mit den vorigen Methoden leicht beweisbar.

(Eingegangen: 20. April, 1961.)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MOORE, R. A.—NEHARI, Z.: „Nonoscillation theorems for a class of nonlinear differential equations”. *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959) 30—52.
- [2] ATKINSON, F. V.: „On second-order non-linear oscillations”. *Pacific J. Math.* **5** (1955) 643—647.
- [3] ZLÁMAL, M.: „Oscillation criterions”. *Cas. Mat. Phys.* **75** (1950) 217—221.
- [4] BIHARI, I.: „A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations.” *Acta Math. Hungarica* **7** (1956) 81—95.

### ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО ТИПА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

L. PINTÉR

#### Резюме

**Теорема 1.** Все решения уравнения (D) колеблющиеся, если выполняются условия:

- а)  $f_i(t) > 0$ , непрерывная функция,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,
- б)  $g_i(t)$  непрерывная, возрастающая функция,  $\operatorname{sg} g_i(t) = \operatorname{sg} t$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,
- в)  $h_i(t) > 0$  непрерывная, возрастающая функция,  $1 \leq i \leq n$ ,
- г) является такой  $a > 0$ , что  $g_i(t)$  и  $h_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) либо в  $[-a, 0]$ , либо в  $[0, a]$  удовлетворяют условием Липшица,
- д) является  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), что

$$\int_0^{\infty} t f_k(t) dt = \infty$$

и если  $\varepsilon > 0$ , то

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{g_k(s)} < \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{ds}{g_k(s)} < \infty,$$

Если же

$$\int_0^{\infty} t \sum_{k=1}^n f_k(t) dt < \infty,$$

то (D) обладает неколеблущиеся решениями. (Но может быть, что существуют и колеблущиеся решения.)

**Теорема 3.**  $f_i(t)$ ,  $g_i(t)$  и  $h_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) такие же, как в теореме I. Существует  $\alpha(t) > 0$  ( $0 \leq t < \infty$ ) непрерывно дифференцируемая функция, и

1) существует по крайней мере одно  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), что  $\frac{g_k(t)}{t}$  возрастающая в  $(-\infty, 0)$ , и убывающая в  $(0, \infty)$ , и если  $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\infty} \alpha(t) f_k(t) \frac{g_k(t)}{t} dt = \infty$$

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha(t)} dt < \infty,$$

то решения (D) колеблущиеся.

**Теорема 4.**  $f_i(t)$ ,  $g_i(t)$  и  $h_i(t)$  удовлетворяют условием а, б, в теоремы 1 и функция  $\frac{g_i(t)}{t}$  возрастающая если  $t \geq 0$ , и убывающая если  $t \leq 0$ ,  $g_i(st) \leq \leq g_i(s) g_i(t)$  и

$$\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t) dt < \infty,$$

то неколеблущиеся решения (D) либо равномерно ограниченная либо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} = p \neq 0.$$

# О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ОПЕРАТОРА, САМОСОПРЯЖЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКИ

JÁNOS BOGNÁR

## § 1. Введение

Пусть  $H_k$  — комплексное линейное пространство, в котором задана эрмитова билинейная функция  $(x, y)$ , называемая скалярным произведением векторов  $x, y \in H_k$ . Из эрмитовости следует, что  $(x, x)$  всегда является вещественным числом, но ее положительности для  $x \neq 0$  не предполагается.

Вектор  $x \in H_k$  называется положительным, отрицательным, нулевым, неположительным, неотрицательным, если  $(x, x) > 0$ ,  $(x, x) < 0$ ,  $(x, x) = 0$ ,  $(x, x) \leq 0$ ,  $(x, x) \geq 0$ , соответственно. Линеал (т. е. линейное многообразие)  $L \subset H_k$  называется положительным, отрицательным, нулевым, неположительным, неотрицательным, если все его элементы, отличные от 0, положительны, отрицательны, нулевы, неположительны, неотрицательны, соответственно.

Понятие ортогональности вводится обычным образом. Множество всех векторов, ортогональных к линеалу  $L$ , будем обозначать через  $L^\perp$ .

Говорят, что на линеале  $L \subset H_k$  скалярное произведение вырождается, если существует вектор  $x \in L$ ,  $x \neq 0$ , ортогональный к  $L$ .

Теперь мы можем сформулировать дальнейшие аксиомы пространства  $H_k$ .

I. На  $H_k$  скалярное произведение не вырождается.

II. Максимальная размерность положительных линеалов в  $H_k$  равна  $k$  ( $k$  — заданное целое число,  $1 \leq k < \infty$ ).

Из I, II вытекает (см. [1], лемма 1.1), что ортогональное дополнение любого  $k$ -мерного положительного линеала в  $H_k$  является отрицательным линеалом.

III.  $k$ -мерный положительный линеал  $H^+ \subset H_k$  можно выбрать так, чтобы его ортогональное дополнение  $H^-$  было полно по отношению к норме

$$(1) \quad |x| = \sqrt{-(x, x)} \quad (x \in H^-).$$

Примером пространства  $H_k$  служит совокупность всех последовательностей  $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  комплексных чисел, для которых  $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$ , если в ней ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(2) \quad (x, y) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_k \bar{\eta}_k - \xi_{k+1} \bar{\eta}_{k+1} - \xi_{k+2} \bar{\eta}_{k+2} - \dots,$$

где  $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ ,  $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ . Это пространство и его линейные операторы были изучены Л. С. Понтрягиным [2].



Теория операторов в общем пространстве  $H_k$  была развита М. Г. Крейном и И. С. Иохвидовым. Значительная часть их результатов изложена в монографии [1] (относительно применений и некоторых дальнейших достижений см. тоже [3]).

Линейный оператор  $A$ , определенный всюду в  $H_k$ , называется самосопряженным, если

$$(3) \quad (Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех } x, y \in H_k.$$

(Понятие самосопряженности можно ввести и для операторов, определенных не всюду, но это нам не понадобится.)

В гильбертовом пространстве среди самосопряженных операторов особую роль играют неотрицательные операторы. Класс этих операторов характеризуется разными способами. В случае пространства  $H_k$  эти способы характеризования не приводят к одному и тому же классу. Возникает вопрос о взаимных связях разных «свойств неотрицательности» в  $H_k$ .

В работе [4] Ю. П. Гинзбург рассматривал самосопряженные операторы  $A$  в индефинитно-метрическом пространстве (более общем, чем  $H_k$ ), обладающие свойством, что  $(Ax, x) \geq 0$  для всех  $x$ , а также операторы с положительным спектром. В настоящей статье указываются некоторые условия существования самосопряженного квадратного корня из данного самосопряженного оператора. Одно из наших условий является необходимым, а другое — достаточным.

## § 2. Перечисление некоторых фактов из теории пространств $H_k$

В этом пункте на основе работы [1] мы приводим некоторые определения и теоремы относительно пространств  $H_k$  и их самосопряженных операторов.

Пусть  $H^+$  — любой  $k$ -мерный положительный линеал и  $H^-$  — его ортогональное дополнение. Тогда  $H^-$  является отрицательным линеалом, полным относительно нормы (1), и  $H_k$  представляется в виде ортогональной суммы

$$(4) \quad H_k = H^+ \oplus H^-$$

(см. [1], лемма 1.1 и теорема 1.1). Если ввести новое скалярное произведение

$$(5) \quad [x, y] = (x^+, y^+) - (x^-, y^-),$$

где

$$(6) \quad x = x^+ + x^-, \quad y = y^+ + y^-; \quad x^+, y^+ \in H^+; \quad x^-, y^- \in H^-,$$

то  $H_k$  превращается в гильбертово пространство. Норма в этом пространстве задается формулой

$$(7) \quad \|x\| = \sqrt{[x, x]}.$$

2.1. Нормы (7), принадлежащие всевозможным разложениям вида (4) ( $H^+$  всегда обозначает  $k$ -мерный положительный линеал), топологически

эквивалентны (см. [1], теорема 1.3). Понятия конвергенции, замкнутости, непрерывности в  $H_k$  употребляются в смысле этих эквивалентных норм.

Замкнутые линеалы, среди них конечномерные, называются подпространствами. Разложения вида (4) будем называть допустимыми разложениями, а принадлежащие им метрики (5) — допустимыми дефинитными метриками пространства  $H_k$ .

2.2. Скалярное произведение  $(x, y)$  непрерывно по обоим аргументам (см. [1], § 3, п. 1). Поэтому ортогональное дополнение любого линеала является подпространством.

2.3. Если на подпространстве  $L \subset H_k$  скалярное произведение не вырождается, то оно не вырождается и на  $L^\perp$ , и мы имеем (см. [1], теорема 1.5)

$$(8) \quad H_k = L \oplus L^\perp.$$

Следовательно,  $L$  есть ортогональное дополнение  $L^\perp$ .

2.4. Подпространство  $L$  с невырожденной метрикой является пространством типа  $H_{k'}$  ( $k' \leq k$ ), итак допускает разложение

$$(9) \quad L = L^+ \oplus L^-,$$

где  $L^+$  — любое  $k'$ -мерное положительное подпространство, содержащееся в  $L$ . Аналогично, на основе 2.3  $L^\perp = M$  имеет допустимые разложения вида

$$(10) \quad M = M^+ \oplus M^-.$$

Положив

$$H^+ = L^+ \oplus M^+, \quad H^- = L^- \oplus M^-,$$

из формул (8), (9), (10) следует, что  $H^+ \oplus H^-$  является допустимым разложением всего пространства  $H_k$ .

2.5. Размерность любого неотрицательного (в частности, нулевого) линеала в  $H_k$  не превышает  $k$  (см. [1], лемма 1.2).

Пусть  $L$  — произвольный линеал в  $H_k$ . Линеал  $M = LL^\perp$  является нулевым и, в силу 2.5, его размерность не превышает  $k$ .  $M$  называется изотропным подпространством линеала  $L$ , его элементы — изотропными векторами линеала  $L$ . Очевидно, что  $M = \{0\}$  в том и только в том случае, если на  $L$  скалярное произведение не вырождается.

2.6. Изотропное подпространство неотрицательного или неположительного линеала  $L$  состоит из всех нулевых векторов в  $L$ . (Это вытекает из того, что в таких линеалах имеет место неравенство Коши—Буняковского.) В частности, на любом нулевом подпространстве  $L \subset H_k$  скалярное произведение тождественно равно нулю.

2.7. Любой линеал  $L$  можно представить в виде  $L = M \oplus L_1$ , где  $M$  — изотропное подпространство  $L$ , и на  $L_1$  скалярное произведение не вырождается. Если  $L$  — подпространство, то можно добиться, чтобы и  $L_1$  был подпространством (см. [1], теорема 1.7).

Нулевые подпространства  $F, G$  называются кососвязанными друг с другом, если ни один вектор  $x \in G$  ( $x \neq 0$ ) не ортогонален к  $F$  и ни один вектор  $y \in F$  ( $y \neq 0$ ) не ортогонален к  $G$ . Это равносильно тому, что на  $F \dot{+} G$  скалярное произведение не вырождается.

2.8. Для любого нулевого подпространства  $F \subset H_k$  найдется кососвязанное с ним подпространство  $G$  (см. [1], лемма 2.3). Размерности  $F$  и  $G$  равны



между собой, и для каждого базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  подпространства  $F$  существует биортогональный базис  $f_1, f_2, \dots, f_n$  в  $G$ , т. е. такой, что  $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  (см. [1], доказательство теоремы 3.5).

Перейдем к некоторым свойствам самосопряженных операторов в  $H_k$ .

2.9. Самосопряженный оператор, определенный во всем пространстве  $H_k$ , непрерывен (см. [1], § 6, п. 1).

Пусть  $A$  — самосопряженный оператор в  $H_k$ , а  $\lambda$  — его собственное значение. Линеал  $S_\lambda$ , состоящий из всех векторов  $x$ , для каждого из которых существует такое натуральное  $r$ , что  $(A - \lambda I)^r x = 0$  ( $I$  — тождественный оператор), называется корневым линеалом оператора  $A$ , отвечающим собственному числу  $\lambda$ . Отметим, что  $A$  может иметь и невещественные собственные значения, но, как доказано в [1], они образуют не более  $k$  пар, расположенных симметрично относительно вещественной оси.

2.10. Если  $\lambda \neq \bar{\mu}$ , то  $S_\lambda \perp S_\mu$  (см. [1], теорема 2.3 вместе с § 8, п. 7). Отсюда вытекает, что если  $\text{Im } \lambda \neq 0$ , то на  $S_\lambda$  скалярное произведение тождественно равно нулю.

2.11. Для каждого самосопряженного в  $H_k$  оператора  $A$  существуют  $k$ -мерные инвариантные неотрицательные подпространства  $M$  и  $M'$  так, что все собственные значения оператора  $A$  в  $M$  ( $M'$ ) имеют неотрицательную (неположительную) мнимую часть.  $M$  ( $M'$ ) содержит все корневые подпространства  $S_\lambda$  оператора  $A$ , отвечающие собственным числам  $\lambda$  с  $\text{Im } \lambda > 0$  ( $\text{Im } \lambda < 0$ ). (См. [1], теоремы 3.3' и 3.4').

### § 3. Условия существования самосопряженного квадратного корня

**Теорема 1.** Если  $A$  — самосопряженный оператор, определенный всюду в  $H_k$ , и

$$(11) \quad A = B^2,$$

где  $B$  — самосопряженный (всюду определенный) оператор, то среди  $k$ -мерных неотрицательных подпространств, инвариантных по отношению к  $A$ , существует хотя одно подпространство  $M_1$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1°.  $(Ax, x) \geq 0$  для всех  $x \in M_1$ .

2°.  $(Ay, y) \leq 0$  для всех  $y \in M_2 = M_1^\perp$ .

3°. Если  $A_0$  обозначает ограничение  $A$  на  $M_1 M_2 = M_0$ , и  $M_3$  — прямая сумма всех корневых подпространств оператора  $A_0$ , принадлежащих отрицательным собственным значениям, то найдется кососвязанное с  $M_3$  подпространство  $M_4 \subset H_k$ , инвариантное относительно  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $M_1$  — некоторое  $k$ -мерное неотрицательное подпространство, инвариантное относительно  $B$  и такое, что все собственные значения оператора  $B$  в  $M_1$  имеют неотрицательную мнимую часть. Такого  $M_1$ , в силу 2.11, существует. Из (11) вытекает, что  $M_1$  инвариантно по отношению к  $A$  тоже. Покажем, что  $M_1$  обладает свойствами 1°—3°.

Если  $x \in M_1$ , то  $Bx \in M_1$ , так что на основе (11), самосопряженности  $B$  и неотрицательности  $M_1$  имеем:

$$(Ax, x) = (B^2 x, x) = (Bx, Bx) \geq 0.$$

Поэтому условие 1° выполняется.



Из инвариантности подпространства  $M_1$  относительно самосопряженного оператора  $B$  следует как обычно, что и  $M_2$  инвариантно относительно  $B$ . Далее,  $M_2$  является неположительным, так как из  $(z, z) > 0$ ,  $z \in M_2$  вытекало бы  $z \notin M_1$ , и линейная оболочка  $M_1$  и  $z$  была бы  $(k+1)$ -мерное неотрицательное подпространство, что невозможно (см. 2.5). Следовательно, если  $y \in M_2$ , то  $By \in M_2$  и

$$(Ay, y) = (B^2 y, y) = (By, By) \leq 0.$$

Условие 2° выполнено.

Пусть  $B_0$  обозначает ограничение оператора  $B$  на инвариантное подпространство  $M_0 = M_1 M_2$ . В силу (11) имеем:

$$(12) \quad A_0 = B_0^2.$$

$A_0$  и  $B_0$  — операторы в конечномерном пространстве, и из  $M_0 \subset M_1$  и выбора  $M_1$  следует, что собственные значения  $B_0$  имеют неотрицательную мнимую часть. Таким образом  $M_3$  (см. условие 3°) есть прямая сумма всех корневых подпространств оператора  $B_0$ , отвечающих собственным значениям вида  $\mu i$ , где  $\mu > 0$ . Больше того, так как  $M_0$  является изотропным подпространством неотрицательного подпространства  $M_1$ , в силу 2.11, 2.10 и 2.6 следует, что в последнем предложении вместо  $B_0$  можно писать оператор  $B$ , определенный во всем  $H_k$ .

В качестве  $M_4$  (см. 3°) выберем прямую сумму всех корневых подпространств оператора  $B$ , отвечающих собственным значениям вида  $-\mu i$  ( $\mu > 0$ ). Тогда  $M_4$  инвариантно по отношению к  $B$  итак, на основе (11), также по отношению к  $A$ . Из 2.10 вытекает, что  $M_4$  — нулевое подпространство.

Кососвязанность  $M_3$  и  $M_4$  проверяется следующим образом. На основе 2.11 имеем:

$$M_3 \subset M_1.$$

$M_1$  есть прямая сумма  $M_3$  и всех корневых подпространств оператора  $B$  в  $M_1$ , принадлежащих немнимым собственным значениям. Эти последние являются частями некоторых корневых подпространств оператора  $B$ , рассмотренного во всем пространстве  $H_k$ , отвечающих немнимым собственным значениям. Отсюда с помощью 2.10 получим, что если  $z \in M_4$  и  $z \perp M_3$ , то  $(z, z) = 0$  и  $z \perp M_1$ . Итак  $z = 0$ , ибо в противном случае линейная оболочка  $z$  и  $M_1$  была бы  $(k+1)$ -мерное неотрицательное подпространство, а это (см. 2.5) невозможно.

Пусть  $M'$  —  $k$ -мерное неотрицательное подпространство, инвариантное относительно  $B$  и такое, что все собственные значения оператора  $B$  в  $M'$  имеют неположительную мнимую часть. Тогда

$$M_4 \subset M'$$

и из  $z \in M_3$ ,  $z \perp M_4$  следует как выше, что  $z = 0$ .

Следовательно, условие 3° тоже выполнено. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Условие 3° тривиально выполнено, если  $A_0$  не имеет отрицательных собственных значений (в частности, в случае  $M_0 = \{0\}$ ). Однако простые примеры показывают, что 3° нельзя заменить этим, более сильным, условием.

**Замечание 2.** Легко показать на примерах, что необходимое условие существования самосопряженного квадратного корня, заданное в теореме 1, не является достаточным. Одно достаточное условие сформулируется в теореме 2.

При доказательстве теоремы 2 нам понадобится следующее обобщение утверждения 2.3, доказанное в [1] иным путем.<sup>1</sup>

**Лемма.** Пусть  $L$  — любое подпространство (см. 2.1) в  $H_k$ . Положим  $L^\perp = M$ . Тогда  $M = L$ , и пространство  $H_k$  можно представить в виде прямой суммы

$$(13) \quad H_k = L_1 \oplus M_1 \oplus (G \dot{+} F),$$

где  $G$  — изотропное подпространство подпространства  $L$ ;  $F$  — подпространство, кососвязанное с  $G$ ;  $L_1$  и  $M_1$  — подпространства, для которых

$$(14) \quad L = G \oplus L_1,$$

$$(15) \quad M = G \oplus M_1.$$

Одно из подпространств  $F$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  может быть выбрано, кроме упомянутых условий, произвольным образом.

**Доказательство.** В случае  $G = \{0\}$  лемма перейдет в 2.3, так что мы можем предполагать, что  $G \neq \{0\}$ .

Пусть  $F$  — любое кососвязанное с  $G$  подпространство (см. 2.8). Положим

$$(16) \quad (G \dot{+} F)^\perp \cdot L = L_1.$$

Из 2.2 и (16) вытекает, что  $L_1$  есть пересечение двух подпространств, значит  $L_1$  сам — подпространство. Так как на  $G \dot{+} F$  скалярное произведение не вырождается и  $L_1 \perp G \dot{+} F$ , то подпространства  $L_1$  и  $G \dot{+} F$  линейно независимы, и можно построить ортогональную прямую сумму

$$(17) \quad G \oplus L_1 \subset L.$$

Если  $x \in L$ , то с помощью 2.8 найдется элемент  $y \in G$ , для которого  $x + y \perp F$  итак, на основе (16) и  $L \perp G$  заключаем, что  $x + y \in L_1$ ,  $x \in G \oplus L_1$ . Следовательно, знак включения в (17) может быть заменен знаком равенства, т. е. имеет место (14).

В силу (14) и определения изотропного подпространства, скалярное произведение не вырождается на  $L_1$ , итак оно не вырождается и на  $L_1 \oplus (G \dot{+} F)$ . Подпространства  $L_1$  и  $G \dot{+} F$  ортогональны между собой и по отношению к допустимой дефинитной метрике (см. 2.1), определенной с помощью допустимых разложений подпространств  $L_1$  и  $L_1^\perp$  (см. 2.4); отсюда вытекает замкнутость линеала  $L_1 \oplus (G \dot{+} F)$ . Следовательно, если положить

$$(18) \quad (L_1 \oplus (G \dot{+} F))^\perp = M_1,$$

<sup>1</sup> См. [1], лемма 4.1 и теорема 4.1. Наше доказательство кажется более непосредственным, и из него выявляется, что любое из подпространств  $F$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  может быть предписано произвольным образом.



то применением 2.3 получим, что  $M_1$  является подпространством с невырожденной метрикой и имеет место (13).

Формулу (18) можно, ввиду (14), переписать следующим образом:

$$(19) \quad (G \dot{+} F)^\perp \cdot M = M_1.$$

Отсюда (15) выводится точно так, как (14) из (16).

Из определения  $M$  ясно, что

$$(20) \quad L \subset M^\perp.$$

Из  $M_1 \subset M$  следует  $M^\perp \subset M_1^\perp$  или, в силу (13) и (14),

$$(21) \quad M^\perp \subset L \dot{+} F.$$

Пусть  $x \in M^\perp$ . В соответствии с (21) имеем:

$$(22) \quad x = y + z \quad (y \in L, \quad z \in F).$$

Умножая обе части (22) скалярно любым элементом  $g \in G$ , и воспользовавшись соотношением  $G \perp L$  и вытекающим из него соотношением  $G \perp M^\perp$ , получим, что  $z \perp G$ . Но  $z \in F$ , и  $F$  является кососвязанным с  $G$  подпространством, поэтому  $z = 0$ , т. е.  $x \in L$ ,  $M^\perp \subset L$  и, ввиду (20),  $M^\perp = L$ .

Пусть теперь  $L_1$  — произвольное подпространство, удовлетворяющее требованию (14). Очевидно, что на  $L_1$  скалярное произведение не вырождается и имеет место разложение:

$$H_k = L_1 \oplus L_1^\perp,$$

где  $L_1^\perp$  — подпространство с невырожденной метрикой. Так как, в силу (14),  $G \subset L_1^\perp$ , то в  $L_1^\perp$  найдется подпространство  $F$ , кососвязанное с  $G$ . Если определить  $M_1$  снова с помощью (18), то можно вывести (13) и (15) точно так, как это сделано выше.

Мы видели, что  $L$  есть ортогональное дополнение подпространства  $M$ , и отсюда следует, что  $G$  является изотропным подпространством для  $M$  тоже. Следовательно, роли  $L$  и  $M$  симметричны, и произвольность выбора подпространства  $M_1$  в (13) доказывается аналогично, как для  $L_1$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — самосопряженный оператор, определенный на всем пространстве  $H_k$ , для которого существует  $k$ -мерное неотрицательное инвариантное подпространство  $M_1$ , удовлетворяющее условиям 1°, 2°, 3° теоремы 1 и следующему дополнительному условию:

4°. Число 0 не является собственным значением оператора  $A_0$  (обозначения см. в теореме 1).

Тогда  $A$  имеет хотя один самосопряженный квадратный корень, т. е. найдется самосопряженный (всюду определенный) оператор  $B$ , удовлетворяющий уравнению (11). Больше того, можно потребовать, чтобы  $M_1$  было инвариантно по отношению к  $B$  тоже и чтобы выполнялись условия:

1\*.  $(Bx, x) \geq 0$  для всех  $x \in M_1$ .

2\*.  $(By, y) \leq 0$  для всех  $y \in M_2$ .

3\*.  $B_0$  не имеет отрицательных собственных значений ( $B_0$  обозначает ограничение оператора  $B$  на подпространство  $M_0$ ).

4\*. Число 0 не является собственным значением оператора  $B_0$ .



**Доказательство.** Через  $M_3$  мы обозначили прямую сумму всех корневых подпространств оператора  $A_0$ , отвечающих отрицательным собственным значениям. Обозначим через  $M'_0$  прямую сумму всех остальных корневых подпространств  $A_0$ . Очевидно, что  $M'_0$  и  $M_3$  инвариантны относительно  $A$ , и имеем разложение

$$(23) \quad M_0 = M'_0 \oplus M_3.$$

(Мы пользовались тем фактом, что в силу изотропности  $M_0$ , любое его прямое разложение является ортогональным.)

Из кососвязанности  $M_3$  с  $M_4$  и самосопряженности  $A$  вытекает, что если взять базисы в  $M_3$  и  $M_4$  так, что они составляют биортогональную систему, то соответствующие матрицы оператора  $A$  являются сопряженными друг другу. В частности, все собственные значения  $A$  в  $M_4$  отрицательны, итак, на основе 2.10,  $M_4 \perp M'_0$ . Следовательно,

$$(24) \quad M'_0 \subset (M_3 \dot{+} M_4)^\perp.$$

Из (24) заключаем с помощью 2.3 и 2.8, что существует подпространство

$$(25) \quad M_5 \subset (M_3 \dot{+} M_4)^\perp,$$

кососвязанное с  $M'_0$ . Легко видеть, что  $M'_0 \oplus M_3$  и  $M_4 \oplus M_5$  тоже кососвязанные подпространства. Применяя (23) и лемму, получим, что

$$(26) \quad H_k = M'_1 \oplus M'_2 \oplus ((M'_0 \oplus M_3) \dot{+} (M_4 \oplus M_5))$$

или, ввиду (24) и (25),

$$(27) \quad H_k = M'_1 \oplus M'_2 \oplus (M'_0 \dot{+} M_5) \oplus (M_3 \dot{+} M_4),$$

где подпространства  $M'_1$ ,  $M'_2$  удовлетворяют условиям:

$$(28) \quad M_1 = M'_1 \oplus M_0.$$

$$(29) \quad M_2 = M'_2 \oplus M_0.$$

Оставляя без внимания соотношения ортогональности, (27) можно переписать следующим образом:

$$(30) \quad H_k = M'_0 \dot{+} M'_1 \dot{+} M'_2 \dot{+} M_3 \dot{+} M_4 \dot{+} M_5.$$

Относительно разложения (30) оператор  $A$  задается операторной матрицей

$$(31) \quad \mathbf{A} = (A_{ij})_{i,j=0,\dots,5},$$

где второй индекс указывает область определения, а первый — область значений.

Отметим, что подпространства  $M'_0$  и  $M_3$  инвариантны по определению. Далее, инвариантность  $M_4$  вытекает из условия 3°. Применением (27) и (3) получим, что и  $(M_3 \dot{+} M_4)^\perp = M'_0 \dot{+} M'_1 \dot{+} M'_2 \dot{+} M_5$  является инвариантным по отношению к  $A$ . Наконец,  $M'_0 \dot{+} M'_1$  и  $M'_0 \dot{+} M'_2$  тоже инвариантны, так как  $M'_0 \dot{+} M'_1$  есть пересечение инвариантных подпространств  $M'_0 \dot{+} M'_1 \dot{+} M'_2 \dot{+} M_5$  и  $M'_0 \dot{+} M'_1 \dot{+} M_3 = M_1$ , а  $M'_0 \dot{+} M'_2$  — пересечение  $M'_0 \dot{+} M'_1 \dot{+} M'_2 \dot{+} M_5$  и  $M'_0 \dot{+} M'_2 \dot{+} M_3 = M_2$ .

На основе перечисленных фактов матрица (31) имеет следующий вид:

$$(32) \quad A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & 0 & 0 & A_{05} \\ 0 & A_{11} & 0 & 0 & 0 & A_{15} \\ 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{25} \\ 0 & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{pmatrix}.$$

В силу (29) скалярное произведение не вырождается на подпространстве  $M'_2$ , следовательно, из  $M'_0 \perp M'_2$  с помощью 2.4 следует так же, как аналогичное утверждение при доказательстве леммы, что  $M'_0$  и  $M'_2$  ортогональны между собой и по отношению к некоторой допустимой дефинитной метрике. Итак, из непрерывности  $A$  на  $M'_2$  (см. 2.9) и соотношения

$$Ax_2 = A_{02}x_2 + A_{22}x_2 \quad (x_2 \in M'_2)$$

вытекает непрерывность операторов  $A_{02}$ ,  $A_{22}$ . Области определения других элементов матрицы (32) являются конечномерными. Следовательно, все операторы  $A_{ij}$  ( $i, j = 0, \dots, 5$ ) непрерывны.

В дальнейшем буквами  $x_i$ ,  $y_i$  будем обозначать произвольные элементы подпространства  $M'_i$  в случае  $i = 0, 1, 2$  и подпространства  $M_i$  в случае  $i = 3, 4, 5$ . Воспользовавшись соотношениями ортогональности, изображенными в (27), и ортогональностью подпространств  $M'_0, M_3, M_4, M_5$  к самим себе, ввиду (32) получим, что свойство самосопряженности (3) эквивалентно тождественному выполнению следующих равенств:

$$(33) \quad (A_{00}x_0, y_5) = (x_0, A_{55}y_5),$$

$$(34) \quad (A_{11}x_1, y_1) = (x_1, A_{11}y_1),$$

$$(35) \quad (A_{01}x_1, y_5) = (x_1, A_{15}y_5),$$

$$(36) \quad (A_{22}x_2, y_2) = (x_2, A_{22}y_2),$$

$$(37) \quad (A_{02}x_2, y_5) = (x_2, A_{25}y_5),$$

$$(38) \quad (A_{33}x_3, y_4) = (x_3, A_{44}y_4),$$

$$(39) \quad (A_{05}x_5, y_5) = (x_5, A_{05}y_5).$$

Условия 1°, 2° равносильны тому, что

$$(40) \quad (A_{11}x_1, x_1) \geq 0,$$

$$(41) \quad (A_{22}x_2, x_2) \leq 0,$$

а условия 3°, 4° означают, что все собственные значения оператора  $A_{33}$  отрицательны, причем  $A_{00}$  не имеет вещественных, неположительных собственных чисел.



Легко видеть, что для доказательства теоремы достаточно построить матрицу

$$(42) \quad \mathbf{B} = (B_{ij})_{i,j=0,\dots,5}$$

вида (32) с непрерывными, в соответственном подпространстве всюду определенными элементами, для которых а) выполняются соотношения, аналогичные соотношениям (33) — (41); б) ни  $B_{00}$ , ни  $B_{33}$  не имеют вещественных, неположительных собственных значений; в) выполняются следующие равенства, равносильные уравнению (11):

$$(43) \quad B_{00}^2 = A_{00},$$

$$(44) \quad B_{00} B_{01} + B_{01} B_{11} = A_{01},$$

$$(45) \quad B_{00} B_{02} + B_{02} B_{22} = A_{02},$$

$$(46) \quad B_{00} B_{05} + B_{01} B_{15} + B_{02} B_{25} + B_{05} B_{55} = A_{05},$$

$$(47) \quad B_{11}^2 = A_{11},$$

$$(48) \quad B_{11} B_{15} + B_{15} B_{55} = A_{15},$$

$$(49) \quad B_{22}^2 = A_{22},$$

$$(50) \quad B_{22} B_{25} + B_{25} B_{55} = A_{25},$$

$$(51) \quad B_{33}^2 = A_{33},$$

$$(52) \quad B_{44}^2 = A_{44},$$

$$(53) \quad B_{55}^2 = A_{55}.$$

$A_{00}$  — оператор в конечномерном пространстве, не обладающий вещественными, неположительными собственными значениями. Отсюда следует (см. [5]), что (43) имеет решение  $B_{00}$ , все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть.

Пусть  $\{e_i\}_1^n$  — базис  $M'_0$ , а  $\{f_i\}_1^n$  — базис  $M_5$ , составляющие биортонормальную систему (см. 2.8). Пусть матрица оператора  $B_{55}$  относительно  $\{f_i\}$  есть сопряженная матрицы оператора  $B_{00}$  относительно  $\{e_i\}$ . Тогда выполняется аналог равенства (33). С помощью (43), (33) и кососвязанности подпространств  $M'_0$  и  $M_5$  можно убедиться в том, что  $B_{55}$  удовлетворяет уравнению (53).

$A_{33}$  — оператор в конечномерном пространстве с отрицательным спектром. Обозначим через  $B_{33}$  любой квадратный корень (см. [5]) оператора  $A_{33}$ , и определим  $B_{44}$  с его помощью тем же способом, как это сделано для  $B_{55}$  с помощью  $B_{00}$ .

Из неотрицательности подпространства  $M_1$  применением (28) и 2.6 следует, что  $M'_1$  положительно. Итак, ввиду (40),  $A_{11}$  является неотрицательным оператором в гильбертовом пространстве (конечной размерности), и имеет неотрицательный квадратный корень  $B_{11}$ .

Мы видели при доказательстве теоремы 1, что  $M_2$  — неположительное подпространство, так что, в силу (29) и 2.6,  $M'_2$  отрицательно. Переменяя знаки всех скалярных произведений в  $M'_2$ , получим гильбертово простран-



ство  $\tilde{M}'_2$  (его полнота следует из 2.4). На основе (41)  $A_{22}$  есть неотрицательный оператор на  $\tilde{M}'_2$  и имеет квадратный корень  $B_{22}$  того же свойства.

Положим

$$(54) \quad B_{01} = \int_{-\varepsilon}^{\|B_{11}\|} (B_{00} + \lambda I_0)^{-1} A_{01} dE_1(\lambda),$$

$$(55) \quad B_{02} = \int_{-\varepsilon}^{\|B_{22}\|} (B_{00} + \lambda I_0)^{-1} A_{02} dE_2(\lambda),$$

$$(56) \quad B_{15} = \int_{-\varepsilon}^{\|B_{11}\|} dE_1(\lambda) A_{15} (B_{55} + \lambda I_5)^{-1},$$

$$(57) \quad B_{25} = \int_{-\varepsilon}^{\|B_{22}\|} dE_2(\lambda) A_{25} (B_{55} + \lambda I_5)^{-1},$$

где  $E_1(\lambda)$ ,  $E_2(\lambda)$  — спектральные функции операторов  $B_{11}$  в  $M'_1$  и  $B_{22}$  в  $M'_2$ , соответственно;  $I_0$ ,  $I_5$  — тождественные операторы в  $M'_0$  и  $M_5$ ;  $\varepsilon > 0$  и такое, что ни одно из собственных значений операторов  $B_{00}$ ,  $B_{55}$  не содержится в промежутке  $(-\infty, \varepsilon)$ ; наконец, нормы  $\|B_{11}\|$ ,  $\|B_{22}\|$  понимаются в смысле метрики  $M'_1$  и  $\tilde{M}'_2$ , соответственно.

Так как  $M'_1$  конечномерно, интегралы в (54) и (56) перейдут в конечные суммы. Интегралы в (55), (57) существуют как пределы по норме операторов (в смысле некоторой допустимой дефинитной метрики) римановых сумм. Это вытекает из того, что  $(B_{00} + \lambda I_0)^{-1}$  и  $(B_{55} + \lambda I_5)^{-1}$  непрерывно дифференцируемы в упомянутом смысле, итак можно применить теорему 1.1 работы [6] Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна. (В [6] предполагается, что все операторы действуют в одном и том же гильбертовом пространстве, но легко видеть, что всё доказательство остается в силе, если значения операторной функции под знаком интеграла действуют из данного гильбертова пространства в некоторое банахово пространство или, в случае «правого интеграла», из некоторого банахова пространства в данное гильбертово пространство.)

Из тождества (см. [6])

$$\int_a^b F(\lambda) dE(\lambda) \cdot \int_a^b dE(\mu) G(\mu) = \int_a^b F(\lambda) dE(\lambda) G(\lambda)$$

и свойств спектральной функции следует, что операторы (54)–(57) удовлетворяют уравнениям (44), (45), (48), (50). На основе определения интеграла и 2.2 легко проверить, что другие требования тоже выполняются.

Неизвестным является еще оператор  $B_{05}$ . Полагая

$$(58) \quad C_{05} = A_{05} - B_{01} B_{15} - B_{02} B_{25}$$

уравнение (46) перепишется в виде

$$(59) \quad B_{00} B_{05} + B_{05} B_{55} = C_{05},$$

причем

$$(60) \quad (C_{05} x_5, y_5) = (x_5, C_{05} y_5).$$

Так как, на основе построения,  $B_{00}$  и  $-B_{55}$  не имеют общих собственных значений, то (59) имеет (см. [5]) одно и только одно решение  $B_{05}$ .

Для проверки аналога (39) заменим в (59) каждый оператор своей матрицей относительно базисов  $\{e_i\}$ ,  $\{f_i\}$ , фигурировавших при построении  $B_{55}$ . Беря сопряженные обеих частей матричного уравнения (59), получим, что матрица  $B_{05}^*$  тоже является решением. Следовательно,  $B_{05}^* = B_{05}$ , а это эквивалентно требуемому свойству оператора  $B_{05}$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Условие  $4^\circ$  нельзя опустить в теореме 2 (см. замечание 2 к теореме 1). Однако, можно показать на примерах, что  $4^\circ$  не является необходимым для существования самосопряженного квадратного корня.

(Поступила 2 мая 1961 г.)

#### БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Иохвидов, И. С. — Крейн, М. Г.: "Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I—II." *Труды Московского математического общества* **5** (1956) 367—432, **8** (1959) 413—496.
- [2] Понтрягин, Л. С.: "Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой." *Известия Академии наук СССР, серия математическая* **8** (1944) 243—280.
- [3] Иохвидов, И. С.: "Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой." *Труды третьего всесоюзного математического съезда (Москва 1956)*, том III, 254—261.
- [4] Гинзбург, Ю. П.: "О  $J$ -нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве." *Научные записки физико-математического факультета Одесского педагогического института* **22** (1958) 13—20.
- [5] ГАНТМАХЕР, Ф. Р.: *Теория матриц*. Гостехиздат, Москва, 1953.
- [6] Далецкий, Ю. Л. — Крейн, С. Г.: "Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и приложения к теории возмущений." *Труды семинара по функциональному анализу Воронежского университета*, вып. 1 (1956) 81—105.

#### ON THE EXISTENCE OF SQUARE ROOTS OF OPERATORS, SELFADJOINT WITH RESPECT TO AN INDEFINITE METRIC

by

J. BOGNÁR

#### Abstract

A space of type  $H_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) is a complex linear space with a hermitian bilinear functional  $(x, y)$  (the "inner product" of the vectors  $x, y \in H_k$ ) satisfying the following axioms:

I. 0 is the only vector orthogonal to the whole space.

II.  $H_k$  contains at least one positive subspace of dimension  $k$ , but no one of dimension  $k + 1$ . (A subspace  $M$  is called positive if  $(x, x) > 0$  for every  $x \in M$ ,  $x \neq 0$ .)



III. There can be found at least one positive subspace  $H^+$  of dimension  $k$  whose orthogonal complement  $H^-$  is complete with respect to the norm (1).

Two subspaces  $F, G$  of equal finite dimension are said to be skewly linked if both  $F$  and  $G$  are orthogonal to themselves but 0 is the only vector in  $F \perp G$  orthogonal to  $F \perp G$ .

The linear operator  $A$  defined everywhere in  $H_k$  is called selfadjoint if it satisfies (3).  $A$  may have non-real eigenvalues too but these form no more than  $k$  pairs lying symmetrically with respect to the real axis (see [1]). It is also known [1] that  $A$  has at least one non-negative invariant subspace of dimension  $k$ . (The subspace  $M$  is non-negative if  $(x, x) \geq 0$  for every  $x \in M$ .)

In Hilbert space a selfadjoint operator has a selfadjoint square root if and only if it is non-negative. In the present paper we prove the following theorems.

**Theorem 1.**  *$A$  is a selfadjoint, everywhere defined operator in  $H_k$  having a selfadjoint square root then among the  $k$ -dimensional non-negative invariant subspaces of  $A$  there exists at least one subspace  $M_1$  satisfying the conditions:*

- 1°.  $(Ax, x) \geq 0$  for every  $x \in M_1$ .
- 2°.  $(Ay, y) \leq 0$  for every  $y \in M_2 = M_1^\perp$  (the orthogonal complement of  $M_1$ ).
- 3°. If  $A_0$  is the restriction of  $A$  to  $M_1$ ,  $M_2 = M_0$  and  $M_3$  is the direct sum of the principal subspaces of  $A_0$  belonging to real, negative eigenvalues, then there exists a subspace  $M_4 \subset H_k$  skewly linked to  $M_3$  and invariant with respect to  $A$ . (The principal subspace of  $A_0$  belonging to  $\lambda$  is the set of vectors  $x$  satisfying  $(A_0 - \lambda I)^r x = 0$  for some natural number  $r = r(x)$ .)

**Theorem 2.** *If the selfadjoint operator  $A$ , defined everywhere in  $H_k$ , has a  $k$ -dimensional non-negative invariant subspace  $M_1$  satisfying the conditions 1°, 2°, 3° of theorem 1 and the additional condition*

- 4°. *0 is not an eigenvalue of  $A_0$ , then  $A$  has at least one selfadjoint square root  $B$ . The operator  $B$  can be chosen so that  $M_1$  be invariant also with respect to  $B$  and that we have:*

- 1\*.  $(Bx, x) \geq 0$  for every  $x \in M_1$ .
- 2\*.  $(By, y) \leq 0$  for every  $y \in M_2$ .
- 3\*.  $B$  (the restriction of  $B$  to  $M_0$ ) has no negative eigenvalues.
- 4\*. 0 is not an eigenvalue of  $B_0$ .





# ON LIMITING DISTRIBUTIONS FOR SUMS OF A RANDOM NUMBER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

by  
J. MOGYORÓDI<sup>1</sup>

## § 1. Introduction

In paper [1] F. J. ANSCOMBE proved the following

**Theorem 1.** *Let  $Y_n (n = 1, 2, \dots)$  be an infinite sequence of random variables. We suppose that there exists a sequence  $B_n (n = 1, 2, \dots)$  of positive numbers and a proper distribution function  $F(x)$ , such that the following conditions hold :*

a) *For any continuity point of  $F(x)$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{Y_n < x B_n\} = F(x),$$

where  $\mathbf{P}\{A\}$  denotes the probability of the event  $A$ .

b) *Given any positive  $\varepsilon$  and  $\eta$  there is a positive integer  $n_0$  and a positive number  $c$ , such that for any  $n \geq n_0$*

$$\mathbf{P}\{|Y_n - Y_{n'}| < \varepsilon B_n \text{ simultaneously for all integers } n' \text{ such that } |n - n'| < cn\} > 1 - \eta.$$

*Let further  $v_n (n = 1, 2, \dots)$  be an infinite sequence of positive integer-valued random variables and  $k_n (n = 1, 2, \dots)$  a sequence of positive integers tending to infinity. We suppose that  $v_n/k_n$  converges to 1 in probability as  $n \rightarrow +\infty$ . Then, if the sequence of random variables  $Y_n$  satisfies conditions (a) and (b),*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{Y_{v_n} < x B_{k_n}\} = F(x)$$

*at all continuity points of  $F(x)$ .*

We mention that nothing is supposed about the dependence of  $v_n$  on the random variables  $Y_k$ .

The importance of the investigation of the behaviour of the sum of a random number of random variables is well known in sequential analysis, in random walk problems and in connection with Monte Carlo methods.

The conditions of the above mentioned Theorem 1 are sufficient. F. J. ANSCOMBE conjectured that condition (b) is also necessary if no further condition than (a) is supposed. The present paper deals with the proof of the necessity in the case when

$$Y_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

where  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$  is a sequence of independent random variables, and gives in this case a simpler condition equivalent to (b).

<sup>1</sup> Eötvös Lóránd University, Mathematical Institute, Budapest.

We will prove the following

**Theorem 2.** *Let us suppose that  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  is a sequence of independent random variables and there exists a sequence  $B_n$  ( $B_n \rightarrow +\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$ ) of positive numbers such that the random variables  $\xi_k/B_n$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) are infinitesimal [2] and*

$$(a) \quad \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{B_n} < x \right\} \rightarrow F(x) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

*at all continuity points  $x$  of the proper distribution function  $F(x)$ . Let us suppose further that  $v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) is a sequence of positive integer-valued random variables and  $k_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) is a sequence of positive integers tending to infinity such that  $v_n/k_n$  converges to 1 in probability as  $n \rightarrow +\infty$ . In order that the distribution function of the sums*

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{v_n}}{B_{k_n}}$$

*converge to the law  $F(x)$ , it is necessary and sufficient that the condition*

$$(b') \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_{k_n}}{B_{[k_n(1+\delta)]}} = 1$$

*be satisfied.*

Here  $\delta$  is a real number ( $\delta > -1$ ) and  $[x]$  denotes the integral part of the real number  $x$ .

We will prove this theorem in the case when  $k_n = n$ . The general case can be proved similarly.

We mention here without proof two lemmas needed in the proof of Theorem 2.

**Lemma 1.** *Let us suppose that  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  is a sequence of independent random variables and  $\{B_n\}$  is a sequence of positive numbers tending to infinity, such that  $\xi_k/B_n$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) are infinitesimal [2] and*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{B_n} < x \right\} = F(x),$$

*where  $F(x)$  is a proper distribution function. Then there exists also a monotonically increasing sequence  $\{C_n\}$  of positive numbers tending to infinity such that  $B_n/C_n \rightarrow 1$  and*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{C_n} < x \right\} = F(x).$$

Lemma 1 is an easy consequence of Theorem 2, p. 155 of the book [2]. By virtue of Lemma 1 we will suppose in the sequel that  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) is a monotonically increasing sequence tending to infinity.



**Lemma 2.** Let  $\{B_n\}$  be a sequence of positive numbers tending monotonically to infinity and suppose that the sequence  $\{B_n\}$  satisfies condition (b') with  $k_n = n$ . Then

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} = 1.$$

Lemma 2 is almost obvious and therefore we omit here the proof. It follows from Lemma 2 that for any  $0 < \varepsilon < 1$  there exist a positive integer  $n_0$  and a positive number  $\delta$  such that for  $n \geq n_0$

$$1 - \varepsilon < \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} < 1 + \varepsilon.$$

This fact will be used in the sufficiency part of the proof of Theorem 2.

## § 2. Proof of Theorem 2

*Necessity.* Let us suppose that condition (a) holds and that  $v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) is a sequence of positive integer-valued random variables for which  $v_n/n$  converges to 1 in probability. Let us suppose further that

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{Y_{v_n}}{B_n} < x \right\} \rightarrow F(x) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

at all continuity points of the proper distribution function  $F(x)$ . Then (b') necessarily holds.

Let us suppose the contrary. Then

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} = 1$$

does not hold. This means that there exist an  $\varepsilon > 0$  and a sequence  $\delta_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) such that  $\delta_l \rightarrow 0$  and

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta_l)]}} < 1 - \varepsilon.$$

(The case, when

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta_l)]}} > 1 + \varepsilon$$

hold, can be treated similarly.)

It follows from (1) that for fixed  $l$  there exists an infinite sequence of indices  $n_{1l}, n_{2l}, \dots, n_{kl}, \dots$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) for which

$$(2) \quad \frac{B_{n_{kl}}}{B_{[n_{kl}(1+\delta_l)]}} < 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

We have thus for any  $l = 1, 2, \dots$  a monotonically increasing sequence of positive integer-valued indices  $\{n_{kl}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) tending to infinity. It is

easy to see that one can pick out from these sequences a new sequence  $m_1, m_2, \dots, m_l, \dots$  for which  $m_l < m_{l+1}$  and  $m_l \rightarrow +\infty$  as  $l \rightarrow +\infty$ .

We define now the random variable  $v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) as follows: if  $m_l \leq n < m_{l+1}$  we put

$$v_n = \begin{cases} n & \text{with probability } 1/n \\ [n(1 + \delta_l)] & \text{with probability } 1 - 1/n. \end{cases}$$

It is easy to see that if  $n \rightarrow +\infty$  then  $l \rightarrow +\infty$  and thus  $v_n/n$  converges in probability to 1.

Denoting by  $F_k(x)$  the distribution function of the random variable  $Y_k/B_k$ , the relation

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{Y_{v_n}}{B_n} < x \right\} = \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_n}{B_n} < x, v_n = n \right\} + \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_{[n(1+\delta_l)]}}{B_n} < x, v_n = [n(1 + \delta_l)] \right\}$$

gives

$$(3) \quad \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_{v_{m_l}}}{B_n} < x \right\} \leq F_{[n(1+\delta_l)]} \left( x \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta_l)]}} \right) + \frac{1}{n}.$$

Now if we take especially  $n = m_l$  then for  $l = 1, 2, \dots$  by (2) and (3) we have

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{Y_{v_m}}{B_{m_l}} < x \right\} \leq F_{[m_l(1+\delta_l)]} \left( x \frac{B_{m_l}}{B_{[m_l(1+\delta_l)]}} \right) + \frac{1}{m_l}.$$

Let now  $l$  tend to infinity. Then from the preceding inequality we obtain

$$F(x) \leq F \left( x \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

for all continuity points of  $F(x)$ . This is a contradiction since  $F(x)$  is a proper distribution function.

*Sufficiency.* We will prove the equivalence of conditions (a), (b) and of conditions (a), (b'). Thus we prove that condition (b') is sufficient, if no further condition than (a) is supposed.

First we shall show that (a) and (b) follow from (a) and (b'). For the sake of brevity and simplicity we restrict our treatment to the case when the variance of random variables  $\xi_k$  exists and  $\text{Var } \xi_k = D_k$ . We can suppose without loss of generality that the mean value of random variable  $\xi_k$  is zero. Now  $Y_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  and we can put  $B_n = \sqrt{D_1^2 + \dots + D_n^2}$  ([2], p. 153, Theorem 1.). Clearly the probability in condition (b) is larger than

$$(4) \quad \mathbf{P} \{ |Y_n - Y_{[n(1-c)]}| + \max_{|n-n'| < cn} |Y_{[n(1-c)]} - Y_{n'}| < \varepsilon B_n \}.$$

Thus it is sufficient to show that for arbitrary  $\varepsilon > 0$  and  $\eta > 0$  there exist a positive integer  $n_0$  and a positive number  $c$  such that (4) is larger than  $1 - \eta$  if  $n \geq n_0$ . For this purpose we will prove that the following inequalities

$$(5) \quad \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=[n(1-c)]+1}^n \xi_k \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} B_n \right\} \leq \frac{\eta}{2}$$



and

$$(6) \quad \mathbf{P} \left\{ \max_{|n-n'| < cn} \left| \sum_{k=[n(1-c)]+1}^{n'} \xi_k \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} B_n \right\} \leq \frac{\eta}{2}$$

hold for suitably chosen  $c > 0$  and  $n_0 (n_0 \leq n)$ .

By TCHEBYCHEFF'S resp. KOLMOGOROFF'S inequality we have

$$(7) \quad \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=[n(1-c)]+1}^n \xi_k \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} B_n \right\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \left( 1 - \left( \frac{B_{[n(1-c)]}}{B_n} \right)^2 \right)$$

and

$$(8) \quad \mathbf{P} \left\{ \max_{|n-n'| < cn} \left| \sum_{k=[n(1-c)]+1}^{n'} \xi_k \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} B_n \right\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{B_{[n(1+c)]}^2 - B_{[n(1-c)]}^2}{B_n^2}.$$

It follows from Lemma 2 that there exist a positive integer  $n_0$  and a positive number  $c$  such that for  $n \geq n_0$

$$\left| 1 - \left( \frac{B_{[n(1 \pm c)]}}{B_n} \right)^2 \right| \leq \frac{\varepsilon^2 \eta}{16}$$

and thus the right-hand sides of (7) and (8) are smaller than  $\eta/2$ . We have from (7) and (8)

$$\mathbf{P} \{ |Y_n - Y_{[n(1-c)]}| + \max_{|n-n'| < cn} |Y_{[n(1-c)]} - Y_{n'}| \geq \varepsilon B_n \} \leq \eta$$

and thus we conclude that (4) is larger than  $1 - \eta$  if  $n_0$  and  $c > 0$  are chosen suitably.

The general case, when the variance of the random variables does not exist, can be treated similarly using the so called "truncation method". We omit here the proof because it is similar to that of the above simple case.

Next we turn to the proof of the second part of the equivalence. We prove that (b') follows from (a) and (b). First we show that if  $x$  is any continuity point of  $F(x)$  then

$$(9) \quad F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{[n(1+\delta)]} \left( x \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{[n(1+\delta)]} \left( x \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} \right).$$

It follows from (b) that for arbitrary chosen  $\varepsilon > 0$  and  $\eta > 0$  there exist a positive integer  $n_0$  and a positive number  $c$  such that if  $n \geq n_0$  and  $|\delta| < c$

$$\mathbf{P} \{ |Y_{[n(1+\delta)]} - Y_n| < \varepsilon B_n \} > 1 - \eta.$$

An easy calculation shows that from this inequality

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{Y_n}{B_n} < x - \varepsilon \right\} - \eta \leq \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_{[n(1+\delta)]}}{B_n} < x \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \frac{Y_n}{B_n} < x + \varepsilon \right\} + \eta,$$



or, expressing this by the language of distribution functions,

$$F_n(x - \varepsilon) - \eta \leq F_{[n(1+\delta)]} \left( x \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} \right) \leq F_n(x + \varepsilon) + \eta.$$

We obtain from this inequality by virtue of (a) for  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F(x - \varepsilon) - \eta &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_{[n(1+\delta)]} \left( x \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} \right) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{[n(1+\delta)]} \left( x \frac{B_n}{B_{[n(1+\delta)]}} \right) \leq \\ &\leq F(x + \varepsilon) + \eta. \end{aligned}$$

Let now  $\varepsilon$  and  $\eta$  tend to zero. Then if  $\delta \rightarrow 0$  we obtain (9). It is easy to see that condition (b') follows immediately from (9). Q. e. d.

**Remarks.** Condition (b') is satisfied if the monotonically increasing sequence  $\{B_n\}$  is in the sense of KARAMATA "slowly oscillating", i. e.  $B_n = n^\alpha L(n)$ , ( $\alpha > 0$ ), where  $L([cn])/L(n) \rightarrow 1$  for any positive number  $c$ .

Recently A. RÉNYI [3] proved that if  $\frac{v_n}{n}$  converges in probability to a positive random variable  $\lambda$ , having a discrete distribution and the random variables  $\xi_k$  are independent and identically distributed with mean value 0 and variance 1,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v_n}}{\sqrt{v_n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

In a following paper we shall generalize this theorem in the case when  $v_n/n$  converges to a positive random variable  $\lambda$ , having arbitrary distribution.

I am indebted to Prof. A. RÉNYI and P. RÉVÉSZ for their valuable remarks and helpful criticism.

(Received May 18, 1961.)

#### REFERENCES

- [1] ANSCOMBE, F. J.: "Large sample theory of sequential estimation". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **48** (1952) 600—607.
- [2] GNEDENKO, B. V. and KOLMOGOROFF, A. N.: *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley Cambridge, 1954.
- [3] RÉNYI, A.: "On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 97—102.
- [4] RÉNYI, A.: "On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 193—199.

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

J. MOGYORÓDI

## Резюме

Доказывается следующая

**Теорема.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  последовательность независимых случайных величин, такая что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{B_n} < x \right\} = F(x),$$

где  $F(x)$  не вырожденная функция распределения, и случайные величины  $\xi_k/B_n$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) бесконечно малы.

Пусть далее  $v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) последовательность неотрицательных и целочисленных случайных величин, таких что  $v_n/k_n$  стремится по вероятности к 1, где  $k_n$  последовательность положительных целых чисел, стремящаяся к бесконечности. Независимость величин  $v_n$  от величин  $\xi_k$  не предполагается. Тогда для того, чтобы функция распределения случайной величины

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v_n}}{B_{k_n}}$$

стремилась к закону распределения  $F(x)$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_{k_n}}{B_{[k_n(1+\delta)]}} = 1.$$





# ON SOME PROBLEMS OF P. VERMES

by

J. H. E. COHN<sup>1</sup>

## 1. Introduction

At the end of a recent paper [1], P. VERMES lists some problems which arose in his work and we are now in a position to answer four of his questions, all in the negative. We first list these questions.

(a) Is the convolution of two sequences in  $\mathcal{P}'$  always in  $\mathcal{P}'$ ? In other words if the power series of  $u(z)$  and  $v(z)$  are convergent at the rational points on the unit circle, is the same true for the power series of  $u(z)v(z)$ ?

(b) if  $u$  is in  $\mathcal{P}'$ , i. e. if  $u(z) = \sum u_k z^{k-1}$  is convergent at every rational point on the unit circle, is the set of values of  $u(z)$  at such points bounded?

(c) is  $\mathcal{S}^+$  a ring?

(d) if  $A, B$  are in  $\mathcal{S}$ ,  $x$  in  $\mathcal{P}'$  is always  $A(Bx) = (AB)x$ ?

## 2. Solutions

In the first place, as VERMES points out, if (d) were true it would imply (c) and if (c) were true it would imply (a). Hence to show that the answer to all four questions is no it is sufficient to show that the answers to both (a) and (b) are no.

Let  $u_k = \binom{\alpha}{k-1} e^{i(k-1)} = e^{i(k-1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k-1)! \Gamma(\alpha-k+2)}$ . Then, the series

$\sum_1^\infty u_k z^{k-1}$  is  $\sum_{k=1}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k-1)! \Gamma(\alpha-k+2)} (e^i z)^{k-1}$ , or the binomial expansion of  $(1 + ze^i)^\alpha$ . If  $0 > \alpha > -1$  the series is convergent for  $|ze^i| \leq 1$  except if  $ze^i = -1$ , that is  $z = e^{i(\pi-1)}$ , which is not a rational point. Hence the series is convergent at all rational points on the unit circle. However, the value of  $u(z)$  is  $(1 + ze^i)^\alpha$  and since  $0 > \alpha > -1$ , if  $\{t_n\}$  is a sequence of rational numbers with limit point  $\frac{1}{2}(1 - 1/\pi)$ , then the sequence  $\{u(e^{2it_n\pi})\}$  is unbounded. This answers (b).

<sup>1</sup> Bedford College (University of London).

Now consider two such series, and let

$$u_k = v_k = e^{i(k-1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(k-1)! \Gamma(\alpha - k + 2)}$$

where now  $-\frac{1}{2} > \alpha > -1$ .

Then  $u(z) = v(z) = (1 + ze^i)^\alpha$ , and both the series are convergent at every rational point on  $|z| = 1$ . But  $u(z) v(z) = (1 + ze^i)^{2\alpha}$ , and since  $-1 > 2\alpha$  this binomial expansion is *not* convergent at any point on  $|ze^i| = 1$ , that is  $|z| = 1$ . Hence the answer to (a) is also no.

(Received May 24, 1961.)

#### REFERENCE

- [1] P. VERMES: "Transformations of Periodic Sequences." This journal **5** (1960) 153—163.



# ÜBER DIE ANALOGA DER GANZEN RATIONALEN FUNKTIONEN IN VERALLGEMEINERTEN KLASSEN VON FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN I.

von  
K. SZILÁRD

In den letzten drei Jahrzehnten sind von einer Reihe von Verfassern Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die als Verallgemeinerungen der Klasse der analytischen Funktionen aufgefasst werden, behandelt worden. Vergleiche z. B. den Artikel von SCHABAT [6], oder den zusammenfassenden Bericht von H. KÜNZI [1], beide mit ausgiebigen Literaturverzeichnissen.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, dass unter gewissen Bedingungen in diesen Klassen Funktionen enthalten sind, die analoge Eigenschaften, wie die der ganzen rationalen Funktionen aufweisen. Die nächstfolgenden Ausführungen sind zum Teil auch in meiner im Jahre 1927 erschienenen Arbeit [2] enthalten. Als Analogon einer ganzen rationalen Funktion wird eine Funktion  $\zeta = f(z)$  der komplexen Veränderlichen  $z$  genommen, die für alle Werte der  $z$ -Ebene definiert ist ( $z = \infty$  ausgenommen) und mit  $|z|$  gleichmässig gegen Unendlich strebt (d. h. für eine jede gegebene positive Zahl  $M$  gibt es eine Zahl  $r > 0$  so, dass  $|f(z)| > M$  wenn nur  $|z| > r$  ist). Ein einfaches Beispiel:  $f(z) = Re^{i\Phi}$ ,  $z = re^{i\varphi}$ , wo  $R = r^{10}$ ,  $\Phi = \varphi$  ist.

## § 1. Die Klasse aller eindeutigen stetigen Funktionen der komplexen Veränderlichen $z$

**Hilfssatz 1.** *In einem Jordanschen Bereiche  $\mathfrak{L}$  mit der Randkurve  $\Gamma$  in der  $z$ -Ebene sei eine eindeutige stetige (komplexwertige) Funktion  $f(z)$  definiert. Auf  $\Gamma$  sei immer  $f(z) \neq a$  ( $a$  — eine komplexe Zahl) und es sei  $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - a] \neq 0$ . Dann gibt es einen inneren Punkt  $z_0$  in  $\mathfrak{L}$  so, dass  $f(z_0) = a$ . (Mit » $\text{Var}_{\Gamma} \arg f(z)$ « wird die Änderung des Argumentes der komplexen Zahl  $f(z)$  bezeichnet, wenn  $z$  die Kurve  $\Gamma$  in positiver Richtung durchläuft). Wenn es also in  $\mathfrak{L}$  keinen inneren Punkt  $z_0$  gibt so, dass  $f(z_0) = a$ , so ist  $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - a] = 0$ .*

**Beweis.** Den Bereich  $\mathfrak{L}$  zerlegt man in endlichviele Jordansche Bereiche  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots, \mathfrak{L}_q$  mit den Begrenzungskurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$  die alle einen Durchmesser  $< \varepsilon$  haben, wo  $\varepsilon > 0$  beliebig klein vorgegeben ist. Wenn es auf einer dieser Begrenzungskurven einen Punkt  $z_0$  gibt, so dass  $f(z_0) = a$ , so ist der Beweis fertig. Wenn nicht, so ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - a] = \sum_{v=1}^q \text{Var}_{\Gamma_v} \arg [f(z) - a]$$



und aus diesem Grunde für wenigstens eine der Kurven  $\Gamma_\nu$  ist

$$\text{Var}_{\Gamma_\nu} \arg [f(z) - a] \neq 0.$$

Mit dem zugehörigen Bereiche  $\mathfrak{Q}_\nu$  verfährt man genau so, wie mit dem Bereiche  $\mathfrak{Q}$  mit dem Unterschied, dass  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon/2$  ersetzt wird usw. Wenn dabei niemals vorkommt, dass auf einer der erhaltenen Begrenzungskurven  $f(z) = a$  wird, so bekommt man eine unendliche Folge ineinandergeschachtelter Bereiche  $\mathfrak{Q}^{(1)} = \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^{(2)}, \dots, \mathfrak{Q}^{(n)}, \dots$  von der Breite  $\leq \varepsilon/2^{n-1}$  auf deren Grenzkurven

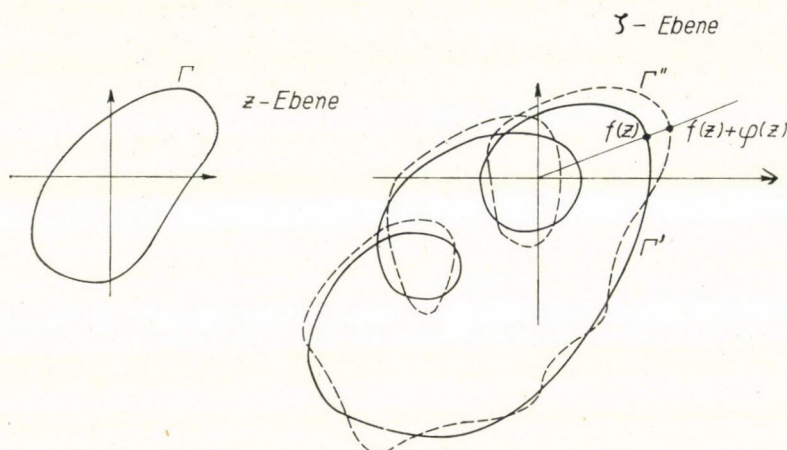


Fig. 1.

$\Gamma^{(n)}$  die Funktion  $f(z)$  von  $a$  verschieden ist und  $\text{Var}_{\Gamma^{(n)}} \arg [f(z) - a] \neq 0$ . Es ist leicht zu sehen, dass in dem einzigen gemeinsamen Punkte  $z_0$  aller dieser Bereiche  $f(z_0) = a$  ist w. z. b. w. Dieser Hilfssatz kann sinngemäss auch für durch endlichviele Jordankurven begrenzte Bereiche ausgesprochen werden (zum Beweise zerlegt man sie in endlichviele Jordansche Bereiche).

**Hilfssatz 2.** Es seien  $f(z)$  und  $\varphi(z)$  zwei in dem Jordanschen Bereiche  $\mathfrak{Q}$  stetige Funktionen. Auf der Randkurve  $\Gamma$  sei  $|\varphi(z)| < |f(z)|$ . Dann ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z)] = \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) + \varphi(z)].$$

Der Beweis wird mit denselben Überlegungen geführt, wie der des bekannten Satzes von Rouché (s. GOURSAT [3] S. 127, TÔKI und SHIBATA [4], S. 162 oder WHYBURN [5] S. 90). Eine anschauliche Deutung S. Fig. 1.

**Folgerung:** Die stetige Funktion  $f(z)$  sei in dem Jordanschen Bereiche  $\mathfrak{Q}$  definiert und auf der Randkurve  $\Gamma$  des Bereiches sei  $|f(z)| > \zeta_0$ , wo  $\zeta_0$  eine komplexe Konstante ist. Dann ist  $\text{Var}_{\Gamma} \arg f(z) = \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - \zeta_0]$ . Geometrisch kann man diese Folgerung so deuten: In der  $\zeta$ -Ebene sei  $\Gamma'$  das durch  $f(z)$  entworfene Bild von  $\Gamma$  und  $P$  ein nicht auf  $\Gamma'$  liegender Punkt der  $\zeta$ -Ebene. Wenn man um  $P$  als Mittelpunkt einen Kreis schlägt dessen Radius kleiner als der Abstand von  $P$  von  $\Gamma'$  ist, so hat  $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - \zeta_0]$  für alle Punkte  $\zeta_0$  dieses Kreises denselben Wert.



**Satz 1.** Es sei  $f(z)$  eine eindeutige, für alle endlichen Werte von  $z$  definierte stetige Funktion und es sei  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$  gleichmässig. Dann gelten folgende Aussagen. 1. Es existieren eine positive Zahl  $r_0$  und eine ganze Zahl  $n_0$  so, dass wenn die Jordan'sche Kurve  $\Gamma$  in der  $z$ -Ebene in ihrem Innengebiete den Kreis  $|z| \leq r_0$  enthält,

$$\text{Var}_\Gamma \arg f(z) = 2 \pi n_0$$

ist, 2. Wenn eine beliebige komplexe Zahl  $\zeta_0$  vorgegeben wird, so gibt es eine positive Zahl  $r_{\zeta_0}$  so, dass wenn die Jordan'sche Kurve  $\Gamma$  in der  $z$ -Ebene in ihrem Innengebiete den Kreis  $|z| \leq r_{\zeta_0}$  enthält,

$$\text{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = 2 \pi n_0$$

ist.

**Beweis.** Es sei  $M_0$  eine beliebige positive Zahl. Laut Voraussetzung existiert dann eine Zahl  $r_0 > 0$  so, dass  $|f(z)| > M_0$  wenn nur  $|z| > r_0$  ist. Es seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  irgendwelche (beliebige) Jordansche Kurven, die in ihren Innengebieten den Kreis  $|z| \leq r_0$  enthalten. Nehmen wir dann eine dritte ebensolche Jordansche Kurve, zum Beispiel einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius  $R$  (bezeichnen wir ihn durch  $\Gamma_3$ ) der beide Kurven  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  umfasst (d. h. für welchem  $\max_{z \in \Gamma_1} |z| < R$  und  $\max_{z \in \Gamma_2} |z| < R$  ist). Dann ist  $\text{Var}_{\Gamma_3} \arg f(z) = \text{Var}_{\Gamma_1} \arg f(z)$  und auch  $\text{Var}_{\Gamma_3} \arg f(z) = \text{Var}_{\Gamma_2} \arg f(z)$ , da in dem zweifach zusammenhängenden Bereiche, der durch  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_3$  (bzw.  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_3$ ) begrenzt wird  $f(z) \neq 0$  ist und daher laut Hilfssatz 1  $\text{Var}_{\Gamma_3} \arg f(z) - \text{Var}_{\Gamma_1} \arg f(z) = 0$ , ( $v = 1, 2$ ) sein muss.

Es ist daher für alle Jordansche  $n$  Kurven  $\Gamma$  welche den Kreis  $|z| \leq r_0$  in ihren Innengebieten enthalten  $\text{Var}_\Gamma \arg f(z)$  eine Konstante Grösse, die wir durch  $2\pi n_0$  bezeichnen ( $n_0$  ist, wie bekannt, eine ganze Zahl). Es sei nun  $\zeta_0$  eine beliebige komplexe Zahl. Laut Voraussetzung gibt es eine positive Zahl  $r_{\zeta_0}$  derart, dass ausserhalb des Kreises  $|z| \leq r_{\zeta_0}$  immer  $|f(z)| > |\zeta_0|$  ist. Laut Folgerung aus dem 2-ten Hilfssatze ist dann

$$\text{Var}_\Gamma \arg [f(z)] = \text{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = 2 \pi n_0$$

für eine jede Jordansche Kurve  $\Gamma$  die in ihrem Innengebiete den Kreis  $|z| \leq r_{\zeta_0}$  enthält. Damit ist der Satz 1 bewiesen. Die ganze Zahl  $n_0$  ist ein Analogon des Grades einer ganzen rationalen Funktion, doch für den allgemeinen Fall einer stetigen Funktion  $n_0$  kann sowohl positiv, als auch negativ, oder Null sein.

## § 2. Die Klasse aller eindeutigen stetigen Funktionen, welche orientierungstreue Abbildungen vermitteln.

Die Aufschrift dieses Paragraphen sei durch drei Bedingungen präzisiert die die nunmehr zu untersuchenden Funktionen  $f(z)$  erfüllen sollen.

1. Der Definitionsbereich von  $f(z)$  hat innere Punkte und  $f(z)$  ist in diesen eindeutig und stetig.

2. Wenn  $f(z) \neq \text{Const.}$ , so nimmt sie ihre Werte in den inneren Punkten ihres Definitionsbereiches isoliert an (d. h. wenn  $f(z_0) = \zeta_0$ , so gibt es um  $z_0$  als Mittelpunkt einen Kreis in dem sonst  $f(z) \neq \zeta_0$  ist).



3. Liegt der Punkt  $z_0$  im Innengebiete einer Jordanschen Kurve  $\Gamma$  die selbst, samt Innengebiete aus lauter inneren Punkten des Definitionsbereiches von  $f(z)$  besteht, so ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] > 0,$$

wenn  $z$  die Kurve  $\Gamma$  in »positiver Richtung« durchläuft (es wird selbstverständlich angenommen, dass auf der Kurve  $\Gamma$   $f(z) \neq f(z_0)$  ist).

Der Kürze halber wollen wir die Funktionen, welche den Bedingungen 1, 2 und 3 genüge leisten, Funktionen der Klasse P nennen.  $f(z)$  sei eine Funktion der Klasse P und  $z_0$  sei ein innerer Punkt ihres Definitionsbereiches. Dann können wir dem Punkte  $z_0$  eine positive ganze Zahl  $n$  zuordnen die wir als Multiplizität des Funktionswertes  $\zeta_0 = f(z_0)$  im Punkte  $z_0$  bezeichnen. Es gilt nämlich

**Hilfssatz 3.** *Wenn die zur Klasse P gehörige Funktion  $f(z) \neq \text{Const.}$  ist, so gibt es um jeden inneren Punkt  $z_0$  ihres Definitionsbereiches (mit  $z_0$  als Mittelpunkt) einen Kreis so, dass für alle Jordanschen Kurven  $\Gamma$  die zu dieser Kreisfläche gehören und  $z_0$  in ihrem Innengebiete enthalten,*

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] = 2\pi n = \text{Const.}$$

ist. ( $n$  — eine natürliche Zahl.)

**Beweis.** Wegen Bedingung 2 gibt es mit  $z_0$  als Mittelpunkt einen Kreis, der ganz zum Definitionsbereich von  $f(z)$  gehört, so dass im Inneren und auf dem Rande  $\gamma$  dieses Kreises  $f(z) \neq f(z_0)$  ist, wenn nur  $z \neq z_0$ . Es sei  $\Gamma$  eine Jordansche Kurve die ganz im Inneren dieses Kreises liegt und  $z_0$  in ihrem Innengebiete enthält. Im zweifach zusammenhängenden Bereiche, der durch  $\Gamma$  und  $\gamma$  begrenzt wird, ist  $f(z) \neq f(z_0)$  und daher laut Hilfssatz 1

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] = \text{Var}_{\gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] = 2\pi n$$

für alle Jordanschen Kurven  $\Gamma$  der betrachteten Art. Wegen Bedingung 3 ist  $n$  eine natürliche Zahl (die Multiplizität des Funktionswertes  $\zeta_0 = f(z_0)$  in  $z_0$ ; wir sagen auch,  $\zeta_0$  wird in  $z_0$  durch  $f(z)$   $n$ -fach angenommen).

**Hilfssatz 4.** *Es sei  $\mathfrak{L}$  ein von endlich vielen Jordanschen Kurven begrenzter beschränkter Bereich der  $z$ -Ebene, der (samt Rand) ganz im Inneren des Definitionsbereiches von  $f(z)$  liegt. Auf dem Rande  $\Gamma$  sei immer  $f(z) \neq \zeta_0$ . Dann ist die Anzahl  $A$  der  $\zeta_0$  Stellen (die wegen Bedingung 2 endlich ist und wobei die mehrfachen  $\zeta_0$ -Stellen entsprechend ihrer Multiplizität gezählt werden) in  $\mathfrak{L}$  gleich*

$$\frac{1}{2\pi} \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - \zeta_0].$$

Der Beweis wird so geführt, wie der des analogen Satzes der klassischen Funktionentheorie (vergl. auch TÔKI und SHIBATA [4] S. 161 und WHYBURN [5] S. 92). Wenn wir von nun an die »Anzahl der  $\zeta_0$ -Stellen« im Sinne dieses Hilfssatzes verstehen, so können wir folgenden Satz beweisen.



**Satz 2.** *Es sei die zur Klasse P gehörige Funktion  $f(z)$  für alle endlichen Werte von  $z$  definiert und es sei gleichmässig*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty.$$

*Dann nimmt  $f(z)$  alle komplexen Werte an und zwar einen jeden gleich oft (d. h.  $n_0$ -mal, wo  $n_0$  eine natürliche Zahl ist).*

**Beweis.** Laut Satz 1 gibt es eine ganze Zahl  $n_0$  so, dass für alle komplexe Zahlen  $\zeta_0$

$\text{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = 2\pi n_0$  ist, wenn nur das Innengebiet der Jordanschen Kurve  $\Gamma$  einen genügend grossen Kreis um den Nullpunkt (als Mittelpunkt) enthält. Laut Bedingung 3 kann  $n_0$  nur positiv (d. h. eine natürliche Zahl) sein, und aus dem Hilfssatz 4 folgt, dass  $n_0$  die Anzahl der  $\zeta_0$  Stellen innerhalb der Kurve  $\Gamma$  (d.h. überhaupt die Anzahl der  $\zeta_0$  Stellen) von  $f(z)$  ist. w. z. b. w.

(Eingegangen: 26. Mai, 1961.)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KÜNZI, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
- [2] SZILÁRD, K.: "Über die Grundlagen der Funktionentheorie." *Math. Zeitschrift* **26** (1927) 5, 653—671.
- [3] GOURSAT, É.: *Cours d'analyse mathématique*. Bd. 2. Paris, 1949.
- [4] TÔKI, Y. and SHIBATA, K.: "On the Pseudo-Analytic Functions." *Osaka Math. Journal*. **6** (1954) 1, 145—165.
- [5] WHYBURN, G. T.: *Topological Analysis*. Princeton 1958.
- [6] SCHABAT, B. W.: "Über Abbildungen, die durch Lösungen von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung verwirklicht werden." *Suom. Tiedeakat. Toimituksia, S. A. I.* 251/8 (1958).

## ОБ АПОЛОГАХ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, I

K. SZILÁRD

### Резюме

Доказываются следующие теоремы.

1. Пусть  $\zeta = f(z)$  непрерывная комплекснозначная функция, определена для всех конечных точек комплексной  $z$ -плоскости и пусть

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$$

равномерно. Тогда для любого комплексного числа  $\zeta_0$  существует круг с центром  $z = 0$  и с радиусом  $r_{z_0}$  такой, что для любой жордановой кривой  $\Gamma$  содержащей в своей внутренней области этот круг, величина

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - z_0] = 2\pi n$$

если  $z$  обходит кривую  $\Gamma$  в положительном направлении и где  $n$  целое число (одно и то же для всех значений  $\zeta_0$ ).

2. Пусть функция теоремы 1,  $\zeta = f(z)$  имеет еще следующие свойства: она принимает все его значения  $\zeta_0$  изолированно (т. е., если  $f(z_0) = \zeta_0$ , тогда существует круг с центром  $z_0$  в котором  $f(z) \neq \zeta_0$  если только  $z \neq z_0$ ) и  $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] > 0$ , если  $f(z)$  определена в некоторой замкнутой жордановой области ограниченной кривой  $\Gamma$  и где  $z_0$  — внутренняя точка этой области (на  $\Gamma$   $f(z) \neq f(z_0)$ ). Тогда  $n$  предыдущей теоремы означает число точек  $z$  в которых  $f(z) = \zeta_0$  (с учетом возможных кратностей этих значений).



## ON A FAMILY OF SUBMONOIDS

by

M. P. SCHÜTZENBERGER<sup>1</sup>

### § 1. Introduction

As it is well known, only few of the properties of the subgroups of a group are still enjoyed by all the submonoids of a monoid [1] and in the applications it is sometimes useful to consider more restricted families of stable subsets (i. e. of subsets  $A$  which are such that  $A^2 \subset A$ ).

In remote connection with a problem in communication theory (Cf. [12]) one encounters a family  $\mathfrak{R}(F)$  of submonoids of a monoid  $F$  that is characterized by extremal properties and that, consequently, admits several slightly different definitions. When  $F$  is a group,  $\mathfrak{R}(F)$  reduces to the lattice of the subgroups of  $F$ ; in the general case, it is not necessarily a lattice and its simplest definition is the following one.

**Definition.** The submonoid  $A$  of a monoid  $F$  belongs to  $\mathfrak{R}(F)$  if and only if it satisfies the following three conditions :

1. There exists at least one homomorphism  $\gamma$  of  $F$ , compatible with  $A$  (i. e.  $\gamma^{-1}\gamma A = A$ ) which is such that  $\gamma A$  is isomorphic to a monoid admitting minimal left and right ideals ;
2.  $(N_k) : A$  intersects every right and every left ideal of  $F$  ;
3.  $A$  is maximal among the submonoids of  $F$  that have the same intersection with an arbitrarily small two-sided ideal of  $F$ .

Let us abbreviate by  $N_d(N_r, N_l, N_k)$  the condition that  $A$  intersects every two sided (right, left, right and left) ideal of  $F$  (i. e. that  $A$  is "net" in P. DUBREIL's theory [5]), by  $M_d(M_r, M_l, M_k)$  the condition that  $\gamma F$  admits minimal two-sided (right, left, right and left) ideals for some homomorphism  $\gamma$  compatible with  $A$ .

We shall verify that  $\mathfrak{R}(F)$  can also be defined by the following set of three conditions :  $A$  satisfies

- 1'.  $M_r$  ;
- 2'.  $N_l$  ;
- 3'. There exists some right representation of  $F$  by mappings of a set into itself that is such that  $A$  is submonoid which lets invariant one element from the set.

---

<sup>1</sup> Cambridge (Mass).



Let us recall that LEVY's condition [8] that a stable subset  $A$  of a free monoid  $F$  is isomorphic to a free monoid can be expressed in the form (Cf. [12]).

$$(U_d): fA \cap Af \cap A \neq \emptyset \text{ only if } f \in A$$

which remains meaningful even when  $F$  is not a free monoid.

We shall also verify that  $\mathfrak{R}(F)$  is characterized by the following set of conditions on  $A$ :

- 1".  $M_k$ ;
- 2".  $N_k$ ;
- 3".  $U_d$ .

When  $F$  is finite, the conditions 1, 1' or 1" become vacuous. Then  $\mathfrak{R}(F)$  can be characterized by 3, 3' or 3" and the requirement that  $A$  contains at least one positive power of each element from  $F$ .

In § 2, as a preliminary step, we apply the classical theory of SUSCHKEWITSCH [18] and REES [11] for obtaining a direct characterization of  $\mathfrak{R}(F)$  when  $F$  admits minimal left and right ideals. In §§ 3 and 4 respectively we discuss the sets of conditions (1", 2", 3") and (1', 2', 3'). In order to make the paper self contained several results which are special cases of theorems due to other authors are given complete proofs.

Applications of the remarks developed here to the less restricted family of the submonoids which satisfy  $U_d$  only will be considered in another paper.

## § 2. A direct definition of $\mathfrak{R}(F)$

Let us verify first the following

**Remark 2.1.** If the stable subset  $A$  of a monoid  $F$  satisfies  $N_r$  and admits minimal right ideals, then,  $F$  also admits minimal right ideals.

**Proof.** Let us consider any  $a \in A$  such that  $aA$  is a minimal right ideal of  $A$ ; by definition this is equivalent to the statement that, for any  $a' \in A$ , there exists at least one  $a'' \in A$  which is such that  $aa'a'' = a$  since, unless, the right ideal  $aa'A$  would be a proper subset of  $aA$ .

Trivially, if  $aA$  is minimal, the same is true of any  $a'''A$  where  $a''' \in AaA$ .

Let us show that if  $A$  satisfies  $N_r$ ,  $a^2F$  is a minimal right ideal of  $F$ . Indeed, for any  $f \in F$ ,  $N_r$  implies that  $A \cap afF \neq \emptyset$ , i. e. that  $aff' = a_1 \in A$  for some  $f' \in F$ ; multiplying on the left by  $a$ , we obtain  $a^2ff' = aa_1$ . By our previous remark, there exists at least one  $a'_1 \in A$  which satisfies  $aa_1a'_1 = a$ . Thus,  $a^2ff'a'_1 = a^2$  and the result is verified.

We observe that when the homomorphism  $\gamma$  is compatible with  $A$  any of the conditions  $M_x$ ,  $N_x$  or  $U_x(x = d, r, l, k)$  defined in the introduction (or later) is true for  $\gamma A$  in  $\gamma F$  if and only if it is true for  $A$  in  $F$ . Since we have seen that when  $A$  satisfies  $N_k$  the condition 1 implies  $M_k$ , there will be no loss in generality for the description of a given  $A$  from  $\mathfrak{R}(F)$  in assuming that  $F$  itself admits minimal ideals.

This convention will be kept in the §§ 2 and 3 and we shall use the following standing notations:

The monoid  $F$  admits the minimal right ideals  $R_i$  ( $i \in I$ ) and the minimal left ideals  $L_j$  ( $j \in J$ ). The minimal two-sided ideal of  $F$  is denoted by  $D$  and the following facts are classical (Cf. [18], [3], [16])

$$1. \quad D = \bigcup_{i \in I} R_i = \bigcup_{j \in J} L_j$$

2. every quasi ideal  $K_{i,j} = R_i \cap L_j$  is isomorphic to a certain group  $G$ , the SUSCHKEWITSCH group of  $F$ . (A quasi ideal is the intersection of a left and of a right ideal [16]).

3. The idempotent  $e_{i,j}$  of  $K_{i,j}$  is such that  $de_{i,j} = d$  and  $e_{i,j}d' = d'$  for any  $d \in L_j$  and  $d' \in R_i$ ; thus, identically,  $K_{i,j} = e_{i,j} F e_{i,j}$ .

We select a fixed arbitrary quasi ideal  $K_{1,1}$  and isomorphism  $\sigma : K_{1,1} \rightarrow G$  and we introduce the following standing notations :  $g_{j,i} = \sigma(e_{1,j} e_{i,1}) (= e_G$ , the neutral element of  $G$  when  $i$  or  $j$  is equal to 1 since  $e_{1,j} e_{1,1} e_{i,1} = e_{1,1}$  identically).

$G_0$  = the subgroup of  $G$  generated by the elements  $g_{j,i}$ .

$\sigma'$  = the mapping  $D \rightarrow G$  which is defined by  $\sigma'd = \sigma(e_{1,j} d e_{1,1})$  where  $j$  is the index of the left ideal  $L_j$  containing  $d$ .

$\tau_{i,j}$  = the mapping  $G \rightarrow K_{i,j}$  which is defined by  $\tau_{i,j}g = e_{i,1} \cdot \sigma^{-1}(g_{j,i}^{-1}g) \cdot e_{1,j}$ .

It is classical that  $\tau_{i,j}$  and the restriction of  $\sigma'$  to  $K_{i,j}$  are mutually inverse isomorphisms (onto) (Cf. [11], [2], [10]). Indeed,  $\tau_{i,j}$  is a homomorphism because of the following more general formula valid for any  $g, g' \in G$

$$\begin{aligned} (\tau_{i,j}g)(\tau_{i',j'}g') &= e_{i,1} \cdot \sigma^{-1}(g_{j,i}^{-1}g) \cdot e_{1,j} \cdot e_{i',1} \cdot \sigma^{-1}(g_{j',i'}^{-1}g') \cdot e_{1,j'} = \\ &= e_{i,1} \cdot \sigma^{-1}(g_{j',i}^{-1}g'') \cdot e_{1,j'} = \tau_{i,j'}g'' \end{aligned}$$

where

$g'' = g_{j',i} g_{j,i}^{-1} g g_{j,i} g_{j',i}^{-1} g'$ ; thus, when  $i = i'$  and  $j = j'$ , we have simply

$$(\tau_{i,j}g)(\tau_{i,j}g') = \tau_{i,j}(gg').$$

Because of the formula

$$\begin{aligned} \sigma' \tau_{i,j}g &= \sigma(e_{1,j}(e_{i,1} \sigma^{-1}(g_{j,i}^{-1}g) e_{1,1}) e_{1,1}) = \\ &= \sigma(e_{1,j} e_{i,1}) \cdot g_{j,i}^{-1}g \cdot \sigma(e_{1,j} e_{1,1}) = g, \end{aligned}$$

we see that  $\tau_{i,j}$  is a monomorphism (i. e. isomorphism into). Finally, it is proved that  $\tau_{i,j}$  (and consequently the restriction of  $\sigma'$ ) is an isomorphism (onto) by the formula valid for any  $d \in K_{i,j}$

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} \sigma' d &= e_{i,1} \cdot \sigma^{-1}(g_{j,i}^{-1} \sigma(e_{1,j} d e_{1,1})) \cdot e_{1,j} = \\ &= (e_{i,1} \cdot \sigma^{-1}(g_{j,i}^{-1} e_G) \cdot e_{1,j}) \cdot d \cdot e_{1,j} = e_{i,j} d e_{1,j} = d. \end{aligned}$$

We still need to recall the following simple statement. (Cf. [15], [17]).

**Theorem 2.2.** For any non empty stable subset  $B$  of  $D$  the three following conditions are equivalent

(i) For at least one  $K_{i,j}$  having a non empty intersection  $Q$  with  $B$  the subset  $\sigma'Q$  of  $G$  contains the inverse of each of its elements;



- (ii) *There exist nonempty subsets  $I_B$  of  $I$  and  $J_B$  of  $J$  and a subgroup  $G'$  of  $G$  that have the following properties:  $G'$  contains every  $g_{j,i} \{(i,j) \in I_B \times J_B\}$ ,  $B = \{d \in D : \sigma'd \in G' \text{ and } d \in K_{i,j} [(i,j) \in I_B \times J_B]\}$*   
 (iii)  *$B$  admits minimal right (and left) ideals.*

**Proof.** (i) *implies* (ii). Because of the fact that the restriction of  $\sigma'$  to  $K_{i,j}$  is an isomorphism, there is no loss in generality in taking  $(i,j) = (1,1)$  in the condition (i) which then, (because  $B$  is stable) becomes equivalent to the condition that  $G' = \sigma Q$  is a subgroup of  $G$ . Thus  $e_{1,1} = \sigma^{-1} e_G$  belongs to  $B$ .

Trivially, if  $b \in R_i \cap B$  and  $b' \in L_j \cap B$ , we have  $bb' \in K_{i,j} \cap B$  and, thus,  $K_{i,j} \cap B \neq \emptyset$  if and only if  $(i,j) \in I_B \times J_B$  where  $I_B$  and  $J_B$  are subsets of  $I$  and  $J$  respectively.

Let  $b$  be any element from  $K_{i,j} \cap B$ ; we have  $\sigma(e_{1,1} b^3 e_{1,1}) = g' \in G'$  and, since  $G'$  is a group,  $b' = b\sigma^{-1}(g'^{-1})b$  belongs to  $K_{i,j} \cap B$ . A straightforward computation shows that  $bb' = e_{i,j}$  and, thus, we have  $e_{i,j} \in B$  and  $g_{j,i} \in G'$  for all  $(i,j) \in I_B \times J_B$ . Consequently, for any such pair  $(i,j)$ , the mappings  $\tau_{i,j}$  and  $\sigma'$  can be carried out by using multiplications by elements from  $B$  only. It follows instantly that for any such  $(i,j)$  and  $g \in G$  (respectively,  $d \in K_{i,j}$ ) one has  $\tau_{i,j}g \in B$  (resp.  $\sigma'd \in G'$ ) if and only if  $g \in G'$  (resp.  $d \in B$ ) and this is precisely the formula given in (ii).

(ii) *implies* (iii). Let  $I_B$  and  $J_B$  be any non empty subsets of  $I$  and  $J$  and  $G'$  any subgroup of  $G$  containing all the elements  $g_{j,i} (i,j) \in I_B \times J_B$ . In order to prove that  $B$  as defined in (ii) admits right and left ideals it is enough to show that for any  $(i,j) \in (I_B \times J_B)$  one has

$$(\tau_{i,j} G') B(\tau_{i,j} G') = \tau_{i,j} G'.$$

This again is a straightforward computation, which also shows that  $B^2$  is contained in  $B$ , i. e. that  $B$  is stable.

(iii) *implies* (i). Let us assume only that the stable subset  $B$  admits minimal right ideals and, for simplicity, that  $b \in K_{1,1} \cap B$  is such that  $bB$  is minimal. This implies in particular that, to any  $b' \in K_{1,1} \cap B$ , there corresponds at least one  $b''$  in some suitable  $K_{1,1}$  that is such that  $bb'b'' = b$ ; writing  $g = \sigma b$ ,  $g' = \sigma b'$ ,  $g'' = \sigma b''$ , it follows that  $gg'g'' = g$ , i. e. that  $g'' = g'^{-1}$ . Thus, since  $b'b''b'' \in K_{1,1}$ , the set  $G' = \sigma(K_{1,1} \cap B)$  contains  $\sigma(b'b''b'') = g'^{-1}$  whenever it contains  $g'$ . Consequently,  $G'$  is a subgroup of  $G$  and the proof is concluded.

It is useful to observe that the apparently weaker conditions (iii)' below is in fact equivalent to (iii).

(iii)'. *There exists a homomorphism  $\gamma$  of  $F$  which is such that  $D \cup \gamma^{-1}\gamma B = B$  and that  $\gamma B$  admits minimal right ideals.*

Indeed, since  $K_{1,1} F K_{1,1} = K_{1,1}$ , any homomorphism  $\gamma$  of  $F$  sends  $K_{1,1}$  onto a minimal quasi-ideal of  $\gamma F = \overline{F}$  and, consequently,  $\gamma$  induces an epimorphism  $\gamma'$  (homomorphism onto) of  $G$  onto the SUSCHKEWITSCH group  $\overline{G}$  of  $\overline{F}$ :

Let us assume now that  $\gamma B$  admits minimal right ideals; because of theorem 2.2,  $\gamma B$  admits minimal quasi-ideals and, since  $(K_{1,1} \cap B) B(K_{1,1} \cap B)$  is contained in  $K_{1,1} \cap B$ , at least one of these minimal quasi ideals,  $Q_{1,1}$  say, is contained in  $\overline{K}_{1,1} = \gamma K_{1,1}$ . Thus  $\gamma' Q_{1,1}$  is a subgroup  $\overline{G}'$  of  $\overline{G}$  and the stable



subset  $\bar{G}'' = \gamma' \gamma(K_{1,1} \cap B)$  of  $\bar{G}$  satisfies the conditions  $\bar{G}' \bar{G}'' \bar{G}' = \bar{G}'$  and  $\bar{G}' \subset \bar{G}''$ .

From this we conclude that  $\bar{G}' = \bar{G}''$ , that is,  $Q_{1,1} = \gamma(K_{1,1} \cap B)$ .

This ends the proof because, when  $D \cap \gamma^{-1} \gamma B = B$ , it shows that the stable subset  $K_{1,1} \cap B = D \cap \gamma^{-1} Q_{1,1}$  is equal to  $\sigma^{-1} \gamma'^{-1} G'$  where  $\gamma'^{-1} \bar{G}'$  is a subgroup of  $G$ , and that, consequently, the condition (i) is satisfied.

Let us define a mapping  $\chi$  from  $F$  to the set of right cosets of  $G$  over  $G_0$  by the rule

$$\chi f = G_0 \sigma(e_{1,i} f e_{1,1}).$$

We have

**Remark 2.3.** (i) If  $f \in D$ ,  $\chi f = G_0 \sigma' d$ ;

(ii) for any  $f, f' \in F$ ,  $\chi(ff') \subset (\chi f)(\chi f')$ .

**Proof.** We verify first that for any  $f \in F$  and  $j \in J$ ,  $\sigma(e_{1,j} f e_{1,1})$  belongs to  $\chi f$ . Indeed,  $f e_{1,1}$  belongs to a well defined  $K_{i,1}$  and, using  $\tau_{i,1}$  we obtain

$$f e_{1,1} = e_{i,j} \cdot \sigma^{-1}(g_{1,i}^{-1} \sigma'(f e_{1,1})) \cdot e_{1,1} = e_{i,1} \cdot \sigma^{-1}(\sigma'(f e_{1,1})).$$

Thus, for any  $e_{1,j}$ ,

$$\sigma(e_{1,j} f e_{1,1}) = \sigma(e_{1,j} e_{i,1}) \sigma'(f e_{1,1}) \in G_0 \chi f.$$

This proves the statement (i).

Let now  $f, f' \in F$ . The product  $e_{1,1} f$  belongs to a well defined  $K_{1,j}$  and we have

$$\sigma(e_{1,1} f f' e_{1,1}) = \sigma(e_{1,1} f e_{1,j} f' e_{1,1}) = \sigma(e_{1,1} f e_{1,1}) \sigma(e_{1,j} f' e_{1,1}),$$

that is,

$\chi(ff') = (\chi f) \sigma(e_{1,j} f' e_{1,1})$  and the statement (ii) follows from our initial remark.

**Theorem 2.4.** A necessary and sufficient condition that  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}(F)$  is that

$$A = \{f \in F : \chi f \subset G'\}$$

where  $G'$  is any subgroup of  $G$  that contains  $G_0$ .

**Proof.** The condition is necessary because, if  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}(F)$ , its intersection  $B$  with any  $K_{i,j}$  is not empty (condition 2) and, according to the condition 1, it satisfies the condition (iii)' of theorem 2.2. Thus, by theorem 2.2 and remark 2.3 (i), we have  $B = A \cap D = \{d \in D : \chi d \subset G'\}$  where  $G'$  is a subgroup containing  $G_0$ . Since remark 2.3 (ii) shows trivially that  $BfB$  is contained in  $B$  if and only if  $\chi f$  is contained in  $G'$  the condition 3 of the introduction implies that  $A$  is precisely the set of those elements from  $F$ .

The condition is sufficient because, if  $A = \{f : \chi f \subset G'\}$ , remark 2.3 (i) and (ii) show that  $A^2 \subset A$ , and that  $A \cap D = B$  is a stable subset which satisfies the conditions of theorem 2.2 and  $BAB = B$ . Thus the conditions 1 and 2 are satisfied and since, as above,  $BfB$  is contained in  $B$  only if  $\chi f \subset G'$ , the maximality condition 3 is also verified.

As a consequence we have

**Corollary 2.5.** If  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}(F)$  and if the index  $m$  in  $G$  of the subgroup  $G'$  defined above is finite, at least one positive power  $f^{m'}$ ,  $m' \leq m$  of each  $f$  belongs to  $A$ .

**Proof.** Let us observe that, for any  $f, f' \in F$ , one has  $G'\chi(ff') = G'\chi f'$  if and only if  $G'\chi f = G'$ , that is, by theorem 2.4, if and only if  $f$  belongs to  $A$ .

Since, by hypothesis, not all the  $m + 1$  cosets

$$G', G'\chi f, G'\chi f^2, \dots, G'\chi f^m$$

are distinct, one must have  $G'\chi f^{m''} = G'\chi f^{m'+m''}$ , i. e.  $f^{m'} \in A$  for some positive  $m'$  at the most equal to  $m$ .

### § 3. The conditions $U_x$ .

In this § we use the following conditions  $U_x$  ( $x = d, r, f, k$ ) for characterizing  $\mathfrak{R}(F)$ . We recall that  $U_d$  is defined by

$$(U_d): fA \cap Af \cap A \neq \emptyset \text{ only if } f \in A.$$

Thus, if  $A$  is a nonempty stable subset satisfying  $U_d$ , it is a submonoid (i. e. it contains the neutral element  $e$  of  $F$ ) because  $eA \cap Ae \cap A \neq \emptyset$ . It is readily verified that, when  $A$  is stable, equivalent forms of  $U_d$  are

$$fA \cap A \neq \emptyset \text{ and } Af \cap A \neq \emptyset \text{ only if } f \in A;$$

$$\begin{aligned} & \text{(because } a, af = a_1 \in A, \text{ and } a', fa' = a'_1 \in A \text{ imply } (a'_1 a) f = f(a'_1 a_1) = \\ & = a_1 a'_1 \in A) \end{aligned}$$

and, also

$$a, af, fa \in A \text{ only if } f \in A.$$

We define  $U_r$  by

$$(U_r): Af \cap A \neq \emptyset \text{ only if } f \in A.$$

Then,  $U_r$  (or the symmetric condition  $U_l$ ,  $fA \cap A \neq \emptyset$  only if  $f \in A$ ) implies  $U_d$ . As it is easily checked (Cf. the beginning of 4 below),  $U_r$  is equivalent to the condition 2' of the introduction.

When  $A$  is a submonoid, the conjunction  $U_k$  of the conditions  $U_r$  and  $U_l$  is more expeditiously written as

$$(U_k): A \cap AfA \neq \emptyset \text{ only if } f \in A.$$

A theory of the subsets, which satisfy  $U_x$  ( $x = r, l, k$ ) ("les complexes unitaires") is due to P. DUBREIL [6].

We first verify the following

**Remark 3.1.** When the submonoid  $A$  of  $F$  satisfies  $M_k, N_d$  and  $U_d$ , the condition  $N_r$  (respectively  $N_l$ ) is a necessary and sufficient condition that it satisfies  $U_r$  (respectively  $U_l$ ).

**Proof.** Because of  $M_k$  we can assume without loss of generality that  $F$  itself admits minimal right and left ideals and we use freely the notations of § 2. The condition  $N_d$  can be taken as the hypothesis that  $A \cap K_{1,1}$  is not empty.

Let us first verify that  $B = A \cap D$  satisfies the condition (i) of theorem 2.2 (i. e.  $G' = \sigma(A \cap K_{1,1})$  is a subgroup of  $G$ ). Indeed, if  $g = \sigma a \in G'$ , for some



$a \in A \cap K_{1,1}$ , the element  $b = \sigma^{-1}g^{-1}$  satisfies the relation  $ba^2 = a^2b = a$ , that is,  $bA \cap Ab \cap A \neq \emptyset$ . Thus, by  $U_d$ ,  $b \in A$  and, finally,  $g^{-1} = \sigma b \in G'$ .

(Reciprocally if  $F$  reduces to the union of  $D$  and a neutral element  $e$ , it is easily checked that for any  $B$  satisfying the conditions of theorem 2.2 the submonoid union of  $B$  and  $e$ , satisfies the condition  $U_d$ . Indeed, for any  $d \in D$ ,

$$dB \cap B \neq \emptyset \text{ and } Bd \cap B \neq \emptyset \text{ imply } d \in K_{i,j} \text{ with } (i, j) \in I_B \times J_B$$

and, then  $b, db \in B$  implies  $\sigma'd \in G'$ ).

Now we have :

$N_r$  implies  $U_r$ .

Because of our hypothesis,  $N_r$  is equivalent to the requirement that every  $e_{i,1}$  ( $i \in I$ ) belongs to  $A$ , or, in the notations of theorem 2.2, that  $I = I_B$ . It follows that for any  $d \in D$ , if  $bd \in A$  for some  $b \in B$ , then  $d$  belongs to  $A$ ; indeed,  $bd \in A$  implies  $d \in L_j$ , where  $j \in J_B$  and  $\sigma'd \in G'$  since  $G'$  is a subgroup which contains all the elements  $g_{j,i}$  with  $(i, j) \in I \times J_B$ .

This practically ends the proof because if  $a, af \in A$ , the element  $d = fe_{1,1}$  from  $D$  satisfies the condition  $bd \in A$  with  $b = e_{1,1}a \in B$ . Thus we have,  $a, af, e_{1,1}, fe_{1,1} \in A$  and, by  $U_d$ , we conclude that  $a, af \in A$  only if  $f \in A$ , that is,  $U_r$ .

The reciprocal statement ( $U_r$  implies  $N_r$ ) is contained in the following slightly less special implication which will be needed later :

When  $M_r, N_d$  and  $U_r$  imply  $N_r$ .

We assume that  $F$  itself contains an element  $r$  which is such that the ideal  $rF$  is minimal ; thus, because of  $N_d$ ,  $A$  contains at least one element  $b \in FrF \cap A$  which is such that  $bF$  is a minimal right ideal.

Let us show that  $A \cap fF \neq \emptyset$  for all  $f \in F$ , (i. e.,  $N_r$ ); indeed since  $bF$  is minimal, there exists at least one  $f'$  which is such that  $b = bff'$ . Because of  $U_r$ , the product  $ff'$  belongs to  $A$  and this concludes the proof.

**Theorem 3.2.** *If the submonoid  $A$  satisfies  $M_k$ , necessary and sufficient conditions that it belongs to  $\mathfrak{R}(F)$  are  $U_d$  and  $N_k$  or  $U_r$  and  $N_l$  or  $U_k$  and  $N_d$ .*

**Proof.** Let us assume that  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}(F)$  and use the notations of theorem 2.4 ; by corollary 2.5 every idempotent of  $F$  belongs to  $A$ , and consequently  $A$  satisfies  $N_k$ ; the fact that  $AfA \cap A \neq \emptyset$  only if  $f \in A$  (i. e.  $U_k$ ) has already been verified in the proof of theorem 2.4.

Reciprocally, we observe that, according to remark 3.1, the three conditions " $U_x$  and  $N_x$ " are equivalent to " $U_k$  and  $N_k$ " when  $A$  satisfies  $M_k$ . Using the notations of remark 3.1, the condition  $N_k$  imposes that  $B = A \cap D$  intersects every  $K_{i,j}$  and consequently  $B = \{d \in D : \chi d \subset G'\}$  where  $G'$  is a subgroup containing  $G_0$ ; once more, since  $BfB \subset B$  only if  $\chi f$  is contained in  $G'$  we finally obtain  $A = \{f : \chi f \cap G'\}$  and the result is entirely proved.

#### § 4. The set of conditions (1', 2', 3')

In order to make the proof clearer we recall first the following well known result (Cf. [19]) :

**Theorem 4.1.** *To any nonempty subset  $X$  of  $F$  there corresponds one quotient monoid  $\gamma_X F$  which is characterized by the following properties*

- (i) *The homomorphism  $\gamma_X$  is compatible with  $X$  ;*



(ii) If  $\gamma'$  is any homomorphism of  $F$  compatible with  $X$ ,  $\gamma_X F$  is a homomorphic image of  $\gamma' F$ .

**Proof.** Let us consider the mapping  $\lambda_X$  of  $F$  to the subsets of  $F$  that is defined by

$$\lambda_X f = \{f' \in F : ff' \in X\}$$

(Cf. [5]).

We have

1. if  $x \in X$ ,  $\lambda_X f = \lambda_X x$  only if  $f \in X$  (because  $\lambda_X f$  contains  $e$  if and only if  $f \in X$ );

2. if  $\lambda_X f = \lambda_X f'$ , then  $\lambda_X(ff'') = \lambda_X(f'f'')$  for all  $f'' \in F$ .

Consequently, if  $S$  denotes the set of all  $\lambda_X f (f \in F)$ , we can define a representation  $(S, F) \rightarrow S$  by

$$(\lambda_X f) f' = \lambda_X(ff') \text{ for any } \lambda_X f \in S \text{ and } f' \in F.$$

We denote the corresponding homomorphism of  $F$  by  $\gamma_X$  and we observe that the congruence relation  $\gamma_X f = \gamma_X f'$  (i. e.  $\lambda_X(f''f) = \lambda_X f(f''f')$  for all  $f'' \in F$ ) can be expressed in the symmetrical form:

for all  $f_1, f_2 \in F$ ,  $f_1 f f_2 \in X$  if and only if  $f_1 f' f_2 \in X$ .

This shows instantly that  $\gamma_X$  is compatible with  $X$  since  $e f e \in X$  if and only if  $f \in X$ .

Let now  $\gamma' : F \rightarrow \bar{F}$  be any homomorphism and define  $\bar{X} = \gamma' X$ ; we can construct in the same manner as above a quotient monoid  $\gamma_{\bar{X}} \bar{F}$  and for any  $f, f' \in F$  we have  $\gamma_{\bar{X}} \gamma' f = \gamma_{\bar{X}} \gamma' f'$  only when for all  $f_1, f_2 \in F$

$\gamma' f_1 f f_2 \in \gamma' X$  if and only if  $\gamma' f_1 f' f_2 \in \gamma' X$ .

Consequently, when  $\gamma'^{-1} \gamma' X = X$ , we have  $\gamma_{\bar{X}} \gamma' f = \gamma_{\bar{X}} \gamma' f'$  only if  $\gamma_X f = \gamma_X f'$  and the result is proved.

Incidentally, the notations introduced provide the formal verification that  $U_r$  is equivalent to the condition 2' of the introduction, because on the one hand, if  $A$  is stable and if it satisfies  $U_r$ , we have  $e \in A$  and  $\lambda_A a = A$  for any  $a \in A$ ; thus  $\lambda_A e = \lambda_A f$  if and only if  $f \in A$  and  $A$  is precisely the submonoid which lets  $\lambda_A e$  invariant in the representation  $(S, F) \rightarrow S$  described above. On the other hand, if  $S'$  is any set and  $(S', F) \rightarrow S'$  a representation, for any given  $s \in S'$ , the submonoid  $A' = \{f \in F : sf = s\}$  satisfies  $U_r$  because of the associativity.

**Theorem 4.2.** If the stable subset  $A$  of  $F$  satisfies  $M_r$ ,  $N_l$  and  $U_r$ , it belongs to  $\mathfrak{R}(F)$ .

**Proof.** Since  $N_l$  is stronger than  $N_d$ , we already know by the last part of the proof of remark 3.1 that  $A$  satisfies  $N_r$  and we shall repeatedly use this fact.

Without loss of generality we shall assume that  $F = \gamma_A F$ ; consequently, because of theorem 2.1 and  $M_r$ , the monoid  $F$  itself admits minimal right ideals; it will be enough to verify that it admits also minimal left ideals, because, then, by remark 3.1,  $U_l$  is a simple consequence of  $M_k$ ,  $N_k$  and  $U_r$ .

The verification involves three steps.

i. Let  $b \in A$  be a fixed element such that  $bF$  is a minimal right ideal (such an element exists because of  $N_d$ ). We verify that for any  $f \in F$  there exists at least one  $f' \in F$  which is such that  $\lambda_A f b = \lambda_A f' b^2$ .

Indeed, by  $N_r$ ,  $fbf_1 \in A$  for some  $f_1$ ; by  $N_l$ ,  $f'b^2f_1 \in A$  for some  $f'$ ; by the hypothesis that  $bF$  is minimal,  $bf_1f'_1 = b$  for some  $f'_1$ . Thus

$$\lambda_A fbf_1 = \lambda_A f' b^2 f_1 = A$$

because of the hypothesis that  $A$  satisfies  $U_r$ . Finally, multiplying by  $f'_1$  we get

$$\lambda_A fb = \lambda_A fbf_1f'_1 = \lambda_A f' b^2 f_1f'_1 = \lambda_A f' b^2$$

and our remark is proved.

ii. Let us keep the same notations and define  $\bar{b}$  by the condition that  $b^2\bar{b} = b$ .

From the relation  $\lambda_A fb = \lambda_A f'b^2$ , we deduce by multiplication by  $\bar{b}b$  that

$$\lambda_A f\bar{b}b = \lambda_A f' b^2 \bar{b}b = \lambda_A f' b^2 = \lambda_A fb.$$

Since this holds for each  $f \in F$ , it follows from the hypothesis  $\gamma_A F = F$  that  $b\bar{b}b = b$ . Consequently  $b\bar{b}$  is an idempotent.

The last step is classical (cf. [3], [15], [16]) but we include its proof here for the sake of completeness:

iii. If  $F$  contains an idempotent  $c$  which is such that  $cF$  is a minimal right ideal, then,  $Fc$  is a minimal left ideal.

Indeed, for any  $f_1 \in F$ , we have  $cf_1cf_2 = c$  for some  $f_2$  and  $cf_2cf_3 = c$  for some  $f_3$  because of the minimal character of  $cF$ . Multiplying the last equality by  $cf_1$  we get

$$cf_1cf_2cf_3 = cf_1c, \text{ that is } cc f_3c = cf_1c.$$

Consequently,  $cf_2cf_1c = c^2 = c$  and the result is proved since we have shown that  $c$  belongs to any left ideal  $Ff_1c$ .

**Remark.** Counter examples (cf. [13]) show that it is not possible to dispense entirely with some requirement on the minimal ideals in the various implications between the conditions  $N_x$  and  $U_x$ , described here.

For example, let  $F$  be the monoid of permutations of the set of integers generated by the translation  $n \rightarrow n + 1$ , and  $n \rightarrow n - 1$  and the permutation which lets invariant the negative integers and which consists of the cycles

$$(1,2)(3,4,5)(6,7,8,9) \dots \left( \frac{n \cdot n - 1}{2}, \frac{n \cdot n - 1}{2} + 1, \dots, \frac{n \cdot n + 1}{2} - 1 \right) \dots$$

Let  $A$  be the submonoid of  $F$  that lets 0 invariant. It is easily checked that  $\gamma_A F = F$ , that  $F$  has no minimal ideals and that  $A$  satisfies  $N_k$  and  $U_k$ .

We conclude by giving a simple characterization of  $\gamma_A F$  for any  $A$  from  $\mathfrak{R}(F)$  (cf. [14]).

The notations are that of §§ 2 and 3.

**Remark. 4.3.** If  $A$  belongs to  $\mathfrak{R}(F)$ , a necessary and sufficient condition that  $\gamma_A F = F$  is that  $f = f'$  if and only if

$$\pi\sigma(e_{1,j} f e_{i,1}) = \pi\sigma(e_{1,j} f' e_{i,1})$$

for all  $(i, j) \in I \times J$  where  $\pi$  is a homomorphism of  $G$  whose kernel,  $E$ , is the largest normal subgroup of  $G$  contained in  $G'$ .



**Proof.** Let us observe that because of  $U_k$  and  $N_k$ , the relation  $f_1 f f_2 \in A$  is equivalent to  $e_{1,1} f_1 f f_2 e_{1,1} \in A$  for any three elements  $f_1, f$  and  $f_2$  of  $F$ . With the help of the mapping  $\tau_{i,j}$  (cf. § 1) can we write  $e_{1,1} f_1$  and  $f_2 e_{1,1}$  as  $(\sigma^{-1} g_1) e_{1,i}$  and  $e_{j,1} (\sigma^{-1} g_2)$  respectively, for suitable  $g_1, g_2 \in G$  and idempotents  $e_{1,i}$  and  $e_{j,1}$ .

Thus,  $f_1 f f_2 \in A$  is equivalent to  $g_1 \sigma(e_{1,i} f e_{j,1}) g_2 \in G'$  where  $g_1, g_2$  and  $(i, j)$  do not depend upon  $f$ . It follows from the definitions of  $\gamma_A$  that  $\gamma_A f$  if and only if for each  $(i, j) \in I \times J$  and, then, for all  $g_1, g_2 \in G$ , one has  $g_1 \sigma(e_{1,i} f e_{j,1}) g_2 \in G'$  when and only when  $g_1 \sigma(e_{1,i} f' e_{j,1}) g_2 \in G'$ . Since for each  $(i, j)$  this relation between  $g = \sigma(e_{1,i} f e_{j,1})$  and  $g' = \sigma(e_{1,i} f' e_{j,1})$  is precisely  $\gamma_{G'} g = \gamma_{G'} g'$  and since  $E$  is, trivially, the kernel of  $\gamma_{G'}$ , the result is proved.

It follows that a set of necessary and sufficient conditions that  $D = \gamma_{G'} D$  is :

- i. the only normal subgroup of  $G$  contained in  $G'$  is  $\{e_G\}$  ;
- ii. the  $J \times I$  matrix  $(g_{j,i})$  has all its rows and columns distinct.

As an application we can display the following example which shows that, even if  $F$  is finitely generated, the condition that for some fixed finite  $m$ ,  $f^m$  belongs to  $A$  for all  $f \in F$  does not insure that  $\gamma_A F$  has only finitely many minimal quasi ideals.

**Example.** Let  $F$  consist of  $e$ , all the powers  $a^m$  of a certain element  $a$  and of a minimal two-sided ideal  $D$  of the type described in § 1. The group  $G$  will be the symmetric group on three elements generated by  $a$  and  $\beta$  satisfying the relations  $\alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 = e_G$  ;  $I$ , and  $J$  will be the set of positive integers.

The element  $a$  is entirely defined by the rules :

$$e_{1,j} a = \begin{cases} \tau_{1,j+1}(e_G) & \text{if } j \text{ is not a power of 2,} \\ \tau_{1,j+1}(\alpha) & \text{if } j \text{ is a power of 2.} \end{cases}$$

We define the right ideals  $R_i$  by  $R_1 = e_{1,1} F$ ,  $R_{i+1} = a R_i$  and, accordingly, the matrix  $(g_{j,i})$  has all its entries in the subgroup  $G_0 = \{e_G, \alpha\}$ .

Finally,  $A = \{f \in F : f^6 \in G_0\}$  contains the sixth power of every element of  $F$  and it belongs to  $\mathfrak{R}(F)$ .

By considering for each value of  $m \geq 0$  the sub-block of the matrix  $(g_{j,i})$  determined by  $1 \leq i \leq 2^m$ ,  $1 + 2^m \leq j \leq 2^{m+1}$ , one easily checks that no two rows of this matrix are the same and that consequently, it also contains infinitely many distinct columns.

Thus  $\gamma_A F$  is not finite and, since  $F$  is generated by  $a$  and  $b = \tau_{1,1}(\beta)$ , the example has all the properties stated.

(Received May 28, 1961.)

#### REFERENCES

- [1] CHEVALLEY, C.: *Fundamental concepts of Algebra* (N. Y. 1956) chap. 1.
- [2] CLIFFORD, A. H.: *Am. J. Math.* (66), 1942. 327.
- [3] CLIFFORD, A. H.: *Am. J. Math.* (70), 1948. 521.
- [4] CLIFFORD, A. H.: *Am. J. Math.* (82), 1960. 430.
- [5] DUBREIL, P.: *Mem. Acad. Institut France.* (63), 1941. 1.
- [6] DUBREIL, P.: *Rendiconti Circ. Mat. Palermo* 1951. 183.



- [7] DUBREIL, P.: *Bull. Soc. Math. France.* (82), 1953. 289.
- [8] LEVY, F. W.: *Bull. Calcutta Math. Soc.* (36), 1944. 191.
- [9] MILLER, D. D. and CLIFFORD, A. H.: *Trans. Am. Math. Soc.* (92), 1956. 270.
- [10] PRESTON, G. B.: *Quart. J. Math.* (9), 1958. 169.
- [11] REES, D.: *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (36), 1958. 169.
- [12] SCHÜTZENBERGER, M. P.: *Trans. Institute of Radio Engineers.* vol. IT2. 1956. 47.
- [13] SCHÜTZENBERGER, M. P.: *Publ. Scien. Univ. Alger.* (6), 1959. 85.
- [14] SCHÜTZENBERGER, M. P.: *O. R. Acad. Sci. Paris* (244), 1957. 2219.
- [15] SCHWARTZ, St.: *Czechoslovak Math. J.* (76), 1951. 229.
- [16] STEINFELD, O.: *Publ. Math. Debrecen.* (4), 1956. 262.
- [17] STOLL, R. R.: *Duke Math. J.* (11), 1944. 251.
- [18] SUSCHKEWITSCH, A.: *Math. Annalen.* (99), 1928. 30.
- [19] TEISSIER, M.: *O. R. Acad. Sci. Paris* (232), 1951. 1987.

## ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПОДМОНОИДОВ

M. P. SCHÜTZENBERGER

### Резюме

В этой заметке описывается некоторое семейство  $K(F)$  подмоноидов моноида  $F$ , имеющих свойства, возможно близкие к свойствам подгрупп некоторой группы. Если  $F$  — свободный моноид, тогда подмоноиды семейства  $K(F)$  имеют приложения к некоторым вопросам кодирования как особому случаю свободных подмоноидов моноида  $F$ . Характерно, что если  $A$  принадлежит  $K(F)$ , то для каждого  $f \in F$  найдется хотя бы один  $f'$  такой, что  $ff'f \in A$  (существование слабого обратного элемента) и, наоборот, если  $f$  и  $ff'f$  принадлежат  $A$ , то  $f'$  тоже принадлежит  $A$  (каждый слабый обратный некоторого элемента подмоноида  $A \in K(F)$  принадлежит  $A$ ).

Большая часть статьи посвящена дискуссии того заслуживающего внимания факта, что при обычных ограничениях относительно существования минимальных идеалов эти двухсторонние условия содержатся в еще более слабых аналогичных односторонних условиях.



# SUR LE MODULE DE CONTINUITÉ INTÉGRALE

par  
J. CZIPSZER

## § 1.

Cette note a pour l'objet d'améliorer le théorème suivant de HILLE — KLEIN — IZUMI.

Soit  $f$  une fonction réelle, mesurable, de période  $2\pi$  et à  $p$ -ième puissance intégrable sur  $[0, 2\pi]$  pour un  $p \geq 1$ .<sup>1</sup> Supposons encore que  $f$  n'est pas équivalent à une constante. Alors l'inégalité

$$(1.1) \quad \int_x^{x+h} |f(t)|^p dt \leq c_{f,p} \omega_p^p(f, h)/h^{p-1}$$

$$(-\infty < x < \infty, 0 < h \leq 2\pi)$$

est valable, où  $c_{f,p}$  signifie une constante indépendante de  $x$  et de  $h$  et  $\omega_p(f, h)$  désigne le  $p$ -ième module de continuité de  $f$ , c'est-à-dire

$$\omega_p(f, h) = \sup_{0 \leq t \leq h} \left( \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour  $p = 1$  ce théorème est dû à MM. E. HILLE et G. KLEIN (voir [1], Théorème 1). C'est M. S. IZUMI qui l'a démontré pour  $p \geq 1$  quelconque (voir [2]).

En adoptant les mêmes hypothèses que plus haut, nous allons établir l'inégalité

$$(1.2) \quad \int_E |f(t)|^p dt \leq c'_{f,p} \omega_p(f, h)$$

pour tout ensemble  $E \subset [0, 2\pi]$  mesurable et de mesure  $2\pi$ , la constante  $c'_{f,p}$  étant indépendante de  $E$ .

$f$  n'étant pas équivalent à une constante, on a  $h = O(\omega_p(f, h))$  ( $h \rightarrow 0$ ) (cf. [3], p. 45 et (2.9) plus bas). Par conséquent (1.2) entraîne (1.1). Vu encore que pour tout  $p \geq 1$  il existe des  $f \in L^p$  tels que  $\omega_p(f, h) \neq O(h)$ , (1.2) est effectivement plus fin que (1.1) lorsque  $p > 1$ .

Quant aux premiers membres des inégalités (1.1) et (1.2), remarquons ce qui suit:

En prenant la limite supérieure des quantités  $\int_x^{x+h} |f(t)|^p dt$  lorsque  $x$  parcourt les nombres réels et celle des quantités  $\int_E |f(t)|^p dt$  lorsque  $E$  parcourt

<sup>1</sup> Dans la suite nous désignerons par  $L^p$  la classe de ces fonctions.



les parties mesurables de  $[0, 2\pi]$  de mesure  $h$ , le quotient de ces deux nombres devient infiniment petit pour certains  $f$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Cela veut dire que la généralisation du domaine d'intégration au premier membre de (1.1) signifie aussi une amélioration essentielle de cette inégalité.

La démonstration de (1.1) pour  $p = 1$ , resp. pour  $p \geq 1$  utilise, dans chacune des notes citées, certaines moyennes de la série de Fourier de  $f$  (moyenne de Jackson chez HILLE—KLEIN, moyenne d'Abel—Poisson chez IZUMI). Or nous avons réussi à établir (1.2) par une voie tout à fait directe et du même coup extrêmement simple.

L'inégalité (1.2) peut être étendue à la classe  $L^p(-\infty, \infty)$  des fonctions réelles, mesurables et à  $p$ -ième puissance intégrables sur tout l'axe réel. Bien entendu, pour ces fonctions le  $p$ -ième module de continuité se définit par

$$\omega_p(f, h) = \sup_{0 \leq t \leq h} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Dans la suite nous nous servirons encore des notations suivantes:

$$\|f\|_p = \left( \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{pour } f \in L^p,$$

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{pour } f \in L^p(-\infty, \infty),$$

$$m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad \text{pour } f \in L.$$

Nous convenons encore de poser  $0^0 = 1$ .

## § 2.

(2.1) **Théorème.** Si  $f \in L^p(-\infty, \infty)$  et  $E$  est un ensemble linéaire de mesure finie  $h$ , alors

$$\int_E |f(x)|^p dx \leq c_p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h),$$

où la constante  $c_p$  ne dépend que de  $p$ .

(2.2) **Théorème.** Si  $f \in L^p$  n'est pas équivalent à une constante et si  $E$  est une partie mesurable de  $[0, 2\pi]$ , alors

$$(2,3) \quad \int_E |f(x)|^p dx \leq c'_p \frac{\|f\|_p^p}{\omega_p(f, 2\pi)} \omega_p(f, h),$$

où  $h$  désigne la mesure de  $E$  et la constante  $c'_p$  ne dépend que de  $p$ .

Les démonstrations de ces théorèmes se laissent mener en partie simultanément. Désignons par  $I$  l'axe réel ou l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , suivant que nous envisageons le premier ou le deuxième théorème.

En posant

$$F(x) = \int_E |f(x+u)|^p du,$$

nous partons de la formule évidente

$$(2.4) \quad \int_0^h F(t) dt - \int_0^h F(x+t) dt = \int_0^h (F(t) - F(t+h)) dt.^2$$

En tenant compte de l'inégalité

$$a^p - b^p \leq p a^{p-1} |a-b| \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

et de celle de Hölder, on obtient les formules

$$\begin{aligned} F(0) - F(t) &= \int_E (|f(u)|^p - |f(t+u)|^p) du \leq \\ (2.5) \quad &\leq p \int_E |f(u)|^{p-1} |f(u) - f(t+u)| du \leq \\ &\leq p \left( \int_E |f(u)|^p du \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_E |f(u) - f(t+u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^x (F(t) - F(t+h)) dt &= \int_E \int_0^x (|f(t+u)|^p - |f(t+u+h)|^p) dt du \leq \\ (2.6) \quad &\leq p \int_E \int_I |f(t+u)|^{p-1} |f(t+u) - f(t+u+h)| dt du \leq \\ &\leq p \left( \int_E \int_I |f(t+u)|^p dt du \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_E \int_I |f(t+u) - f(t+u+h)|^p dt du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq ph \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h), \end{aligned}$$

valables pour  $0 \leq t \leq h, 0 \leq x \in I$ .

On déduit de (2.5), (2.4) et (2.6)

$$(2.7) \quad F(0) \leq 2p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) + \frac{1}{h} \int_0^h F(x+t) dt \quad (0 \leq x \in I)$$

où nous avons supposé  $h > 0$  ce qui est bien légitime.

Si  $f \in L^p(-\infty, \infty)$ , on a évidemment  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$  et par conséquent

$$F(0) \leq 2p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h).$$

(2.1) est donc démontré avec  $c_p = 2p$ .

<sup>2</sup> L'emploi de cette formule nous a été suggéré par un passage du traité de M. ZYGMUND ([3], p. 45) où il s'agit de démontrer que  $\omega_p(f, h) = o(h)$  pour  $f \in L^p$  n'a pas lieu à moins que  $f$  ne soit équivalent à une constante.



Passons maintenant au théorème (2.2). Intégrons suivant  $x$  sur  $[0, 2\pi]$  dans (2.7):

$$(2.8) \quad F(0) \leq 2p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) + \frac{h}{2\pi} \|f\|_p^p.$$

En vertu de l'inégalité de Minkowski  $\omega_p(f, t)$  vérifie l'inégalité

$$\omega_p(f, t_1 + t_2) \leq \omega_p(f, t_1) + \omega_p(f, t_2) \quad (t_1 \geq 0, t_2 \geq 0).$$

Celle-ci entraîne grâce à la monotonie de  $\omega_p(f, t)$

$$\omega_p(f, \lambda t) \leq (\lambda + 1) \omega_p(f, t) \quad (t \geq 0, \lambda \geq 0).$$

En posant  $t = h$ ,  $\lambda = \frac{2\pi}{h}$ , on en tire

$$(2.9) \quad h \leq \frac{4\pi}{\omega_p(f, 2\pi)} \omega_p(f, h).$$

$\omega_p(f, 2\pi) \neq 0$ , puisque  $f$  n'est pas équivalent à une constante. (Cf. [3], p. 45 ou (3.1) plus bas.) Observons encore que

$$(2.10) \quad \omega_p(f, t) \leq 2 \|f\|_p \quad (t \geq 0).$$

Enfin (2.8), (2.9) et (2.10) entraînent

$$F(0) \leq 6p \frac{\|f\|_p^p}{\omega_p(f, 2\pi)} \omega_p(f, h)$$

ce qui équivaut à (2.3) avec  $c'_p = 6p$ .

Remarquons que notre démonstration peut être simplifiée si l'on suppose que  $E$  est un intervalle. En effet, l'introduction de la fonction auxiliaire  $F$  devient alors superflue. Soit p. e.  $E = [0, h]$ . En appliquant (2.4) à  $|f(t)|^p$  au lieu de  $F(t)$  et en évaluant le deuxième membre par un calcul analogue à (2.6), nous obtenons

$$\int_E |f(t)|^p dt \leq p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) + \int_0^h |f(x+t)|^p dt \quad (0 \leq x \in I).$$

La conclusion de la démonstration reste la même que plus haut.

### § 3.

Dans ce qui suit nous cherchons à donner une forme plus expressive au coefficient de  $\omega_p(f, h)$  qui figure au second membre de (2.3). Démontrons à cette fin le lemme suivant:

(3.1) *Toute fonction  $f \in L^p(p \geq 1)$  vérifie l'inégalité*

$$\omega_p(f, 2\pi) \geq \frac{1}{2} \|f - m(f)\|_p.$$

La démonstration sera basée sur l'inégalité

$$(3.2) \quad |\alpha + 1|^p \geq \frac{1}{2^p} |\alpha|^p + \frac{\alpha}{2},$$



valable pour tout nombre réel  $\alpha$  et  $p \geq 1$ . Pour  $\alpha \geq 0$  (3.2) s'ensuit des relations

$$\frac{1}{2}(\alpha + 1)^p > \frac{1}{2}\alpha^p \geq \frac{1}{2^p}\alpha^p$$

et

$$\frac{1}{2}(\alpha + 1)^p \geq \frac{1}{2}(\alpha + 1) > \frac{1}{2}\alpha,$$

tandis qu'il est évident pour  $-2 \leq \alpha < 0$ , le deuxième membre étant non-positif dans ce cas. Soit enfin  $\alpha < -2$  et posons  $\gamma = -\alpha$ . Observons que par suite de la convexité de la fonction  $t \rightarrow t^p$ , on a pour tout couple  $a, b$  de nombres non négatifs

$$a^p + b^p \geq 2 \left( \frac{a+b}{2} \right)^p.$$

En posant  $a = \gamma - 1$ ,  $b = 1$ , il vient

$$(\gamma - 1)^p \geq 2 \left( \frac{\gamma}{2} \right)^p - 1 > \left( \frac{\gamma}{2} \right)^p > \left( \frac{\gamma}{2} \right)^p - \frac{\gamma}{2},$$

ce qui entraîne (3.2).

En remplaçant dans (3.2)  $\alpha$  par  $\frac{\alpha}{\beta}$ , nous obtenons l'inégalité

$$(3.3) \quad |\alpha + \beta|^p \geq \frac{1}{2^p} |\alpha|^p + \frac{\alpha}{2} |\beta|^{p-1} \operatorname{sg} \beta,$$

valable quelques soient les nombres réels  $\alpha, \beta$ .

Passons maintenant à la démonstration de (3.1). Posons  $g(x) = f(x) - m(f)$ . Il vient

$$\begin{aligned} \omega_p^p(f, 2\pi) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(y) - f(x)|^p dy dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(y) - g(x)|^p dy dx. \end{aligned}$$

En appliquant (3.3) avec  $a = g(y)$ ,  $\beta = -g(x)$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \omega_p^p(f, 2\pi) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2^p} |g(y)|^p - \frac{1}{2} g(y) |g(x)|^{p-1} \operatorname{sg} g(x) \right\} dy dx = \\ &= \frac{1}{2^p} \|g\|_p^p = \frac{1}{2^p} \|f - m(f)\|_p^p, \end{aligned}$$

c. q. f. d.

Notre lemme nous permet d'énoncer la variante suivante du théorème (2.2):

(3.4) **Théorème.** *En admettant les hypothèses de (2.2) on a*

$$\int_E |f(x)|^p dx \leq c_p'' \frac{\|f\|_p^p}{\|f - m(f)\|_p^p} \omega_p(f, h).$$

(Reçu le 28 mai 1961.)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HILLE, E.—KLEIN, G.: „Riemann's localization theorem for Fourier series”. *Duke Mathematical Journal* **21** (1954) 587—591.
- [2] IZUMI, S.: „Some trigonometrical series”. XIV. *Proceedings of the Japan Academy* **31** (1955) 324—326.
- [3] ZYGMUND, A.: *Trigonometric series*, vol. I. Cambridge University Press, 1959.

### ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

J. CZIPSZER

#### Резюме

Доказывается следующее обобщение теорем Е. HILLE, G. KLEIN и S. IZUMI (см. [1], [2]):

Если функция  $f \in L^p(0, 2\pi)$  неэквивалентна константой и  $E \subset [0, 2\pi]$  измеримое множество меры  $h$ , тогда имеет место неравенство (1.2), где

$$\omega_p(f, h) = \sup_{0 \leq t \leq h} \left( \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

а  $c_{f,p}$  константа, зависящая только от  $f$  и  $p$ . Доказывается еще аналогичная теорема для класса  $L^p(-\infty, \infty)$ .

## ЗАМЕТКА ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ П. ТУРАНА

А. К. ХАРАДЗЕ<sup>1</sup>

В статье [1] П. Туран показал, что, если многочлен  $f(z)$  представлен в виде линейной комбинации многочленов Эрмита чётных степеней, то по коэффициентам этого представления можно определить область, ограниченную сопряжёнными гиперболами, внутри которой находятся все нули многочлена  $f(z)$ , именно, имеет место

**Теорема.** Если  $f(z) = \sum_{m=0}^n c_{2m} H_{2m}(z)$ ,  $|c_{2n}| \neq 0$ ,  $M = \max_{m=0, \dots, n-1} |c_{2m}|$ ,  $z = x + iy$ , то все нули многочлена  $f(z)$  лежат в области

$$|xy| \leq \frac{5}{4} \left( 1 + \frac{M}{|c_{2n}|} \right).$$

В настоящей заметке показывается, что теорема может быть распространена на случай обобщённых эрмитовых многочленов, рассмотренных П. Чаттерджи [2], причём граница области расположения нулей представляет плоскую кривую, принадлежащую семейству синус-спиралей, частным видом которых является гипербола.

Пусть  $k \geq 2$  — фиксированное натуральное число. Обозначим через  $D_k^{(mk)}$  результат  $m$ -кратной операции  $D_k^{(k)} \equiv \frac{d}{dz} \frac{1}{z^{k-2}} \frac{d}{dz}$ . Символ же  $D_k^{(mk+k-1)}$  означает операцию  $\frac{1}{z^{k-2}} \frac{d}{dz} D_k^{(mk)}$ . Дифференциальные операторы  $D_k^{(mk)}$  и  $D_k^{(mk+k-1)}$  в применении к функции  $e^{-z^k}$  порождают две последовательности многочленов  $H_{(mk)}(z)$  и  $H_{(mk+1)}(z)$ , определяемых равенствами типа Родрига (см. [2]):

$$H_{(mk)}(z) \equiv e^{z^k} D_k^{(mk)}(e^{-z^k}), \quad H_{(mk+1)} \equiv -e^{z^k} D_k^{(mk+k-1)} e^{-z^k}.$$

Очевидно, при  $k = 2$  получим классические многочлены Эрмита чётных и нечётных степеней. Легко заметить, что многочлены вида  $H_{(mk)}(z)$  состоят лишь из степеней вида  $z^{pk}$ , многочлены же  $H_{(mk+1)}(z)$  — из степеней вида  $z^{pk+1}$ , ( $p = 0, 1, \dots, m$ ).

<sup>1</sup> Тбилиси, СССР.



Имеют место следующие тождества (см. [2]:

$$(1) \quad H'_{(mk+1)}(z) \equiv k(mk+1) H_{(mk)}(z), \quad H'_{(mk)}(z) \equiv mk^2 z^{k-2} H_{[(m-1)k+1]}(z),$$

$$(2) \quad H_{(mk)}(z) \equiv kz^{k-1} H_{[(m-1)k+1]}(z) - k[(m-1)k+1] H_{[(m-1)k]}(z),$$

$$(3) \quad H_{(mk+1)}(z) \equiv kz H_{(mk)}(z) - mk^2 H_{[(m-1)k+1]}(z).$$

Нули многочленов  $H_{(mk)}(z)$  и  $H_{(mk+1)}(z)$  простые и расположены на симметричном пучке, состоящем из  $k$  лучей с центром в начале и наклоном  $\frac{2\pi}{k} p$  ( $p = 0, 1, \dots, k-1$ ).

Пусть  $z_{mk,j}$  ( $j = 1, \dots, mk$ ) обозначают нули многочлена  $H_{(mk)}(z)$ . Тогда

$$(4) \quad \frac{H_{(mk-k)}(z)}{H_{(mk)}(z)} \equiv \sum_{j=1}^{mk} \frac{H_{(mk-k)}(z_{mk,j})}{H'_{(mk)}(z_{mk,j})} \frac{1}{z - z_{mk,j}}.$$

С другой стороны, подставляя вместо  $H'_{(mk)}(z_{mk,j})$  соответствующее выражение из (1), можем написать

$$\frac{H_{(mk-k)}(z)}{H_{(mk)}(z)} \equiv \frac{1}{mk^2} \sum_{j=1}^{mk} \frac{H_{(mk-k)}(z_{mk,j})}{z_{mk,j}^{k-2} H_{[(m-1)k+1]}(z_{mk,j})} \frac{1}{z - z_{mk,j}}.$$

Но на основании рекуррентного соотношения (2) будем иметь

$$\frac{H_{(mk-k)}(z_{mk,j})}{H_{[(m-1)k+1]}(z_{mk,j})} = \frac{z_{mk,j}^{k-1}}{(m-1)k+1}.$$

Таким образом, равенство (5) переписывается в виде

$$(6) \quad \frac{H_{(mk-k)}(z)}{H_{(mk)}(z)} \equiv \frac{1}{mk^2[(m-1)k+1]} \sum_{j=1}^{mk} \frac{z_{mk,j}}{z - z_{mk,j}}.$$

Теперь примем во внимание, что многочлен  $H_{(mk)}(z)$  состоит из степеней вида  $z^{Pk}$  и что нули  $z_{mk,j}$  расположены симметрично по  $k$  лучам, исходящим из начала. Следовательно, объединяя в сумме правой части (6) симметричные члены, можем написать

$$(7) \quad \frac{H_{(mk-k)}(z)}{H_{(mk)}(z)} \equiv \frac{1}{mk[(m-1)k+1]} \sum_{j=1}^m \frac{z_{mk,j}^k}{z^k - z_{mk,j}^k}.$$

Как заметил А. Эрдеи [3],

$$H_{(mk)}(z) \equiv (-1)^m k^{2m} m! L_m^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}(z^k),$$

а потому  $z_{mk,j}^k$  можно оценить сверху с помощью известной оценки нулей многочлена Лагерра  $L_m^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}(z)$ , именно<sup>2</sup> (см. [4])

<sup>2</sup> Очевидно, все  $z_{mk,j}^k$  — числа положительные.

$$(8) \quad z_{mk,j}^k \leq \frac{1}{k} + 2 \frac{m(m-1)}{m+2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m+2}{m^2 k}} \right) = \lambda.$$

Возвращаясь к равенству (7), получим

$$(9) \quad \left| \frac{H_{(mk-k)}(z)}{H_{(mk)}(z)} \right| \leq \frac{\lambda}{mk[(m-1)k+1]} \sum_{j=1}^m \frac{1}{|z^k - z_{mk,j}^k|}.$$

С другой стороны

$$|z^k - z_{mk,j}^k| = |(x + iy)^k - z_{mk,j}^k|,$$

или, вводя полярные координаты,

$$|z^k - z_{mk,j}^k| = |r^k \cos k\alpha - z_{mk,j}^k + ir^k \sin k\alpha| \geq r^k |\sin k\alpha|.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{H_{(mk-k)}(z)}{H_{(mk)}(z)} \right| \leq \frac{\lambda}{k[(m-1)k+1]} \frac{1}{r^k |\sin k\alpha|}.$$

Оценивая в первом приближении множитель  $\frac{\lambda}{k[(m-1)k+1]}$  можем написать:

$$(10) \quad \frac{\lambda}{k[(m-1)k+1]} < \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right) = b_k.$$

Поэтому, если  $z$  не лежит на упомянутом симметричном пучке лучей, то

$$\left| \frac{H_{[(m-1)k]}(z)}{H_{(mk)}(z)} \right| < \frac{b_k}{r^k |\sin k\alpha|}.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует

$$(11) \quad \left| \frac{H_{(pk)}(z)}{H_{(nk)}(z)} \right| = \prod_{m=p+1}^n \left| \frac{H_{[(m-1)k]}(z)}{H_{(mk)}(z)} \right| < \left( \frac{b_k}{r^k |\sin k\alpha|} \right)^{n-p}, \quad p = 0, \dots, n-1.$$

Пусть, теперь, многочлен  $\varphi(z)$  линейно выражается через многочлены вида  $H_{(mk)}(z)$

$$\varphi(z) = a_0 H_{(0)}(z) + a_k H_{(k)}(z) + a_{2k} H_{(2k)}(z) + \dots + a_{nk} H_{(nk)}(z), \quad a_{nk} \neq 0.$$

Легко показать, что, если  $z$  не лежит на лучах пучка и, кроме того, если

$$(12) \quad r^k |\sin k\alpha| > b_k \left( 1 + \frac{M}{|a_{nk}|} \right), \quad M = \max_{m=0,1,\dots,n-1} |a_{mk}|,$$

то  $|\varphi(z)| > 0$  и, следовательно, нули многочлена  $\varphi(z)$  должны лежать лишь в области, определяемой неравенством

$$r^k |\sin k\alpha| \leq b_k \left( 1 + \frac{M}{|a_{nk}|} \right).$$



В самом деле, следуя рассуждению П. Турана, на основании (11) будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\geq |H_{(nk)}(z)| \left\{ |a_{nk}| - M \left( \left| \frac{H_{(0)}(z)}{H_{(nk)}(z)} \right| + \dots + \left| \frac{H_{[(n-1)k]}(z)}{H_{(nk)}(z)} \right| \right) \right\} > \\ &> |H_{(nk)}(z)| \left\{ |a_{nk}| - M \left[ \frac{b_k}{r^k |\sin k \alpha|} + \left( \frac{b_k}{r^k |\sin k \alpha|} \right)^2 + \dots + \left( \frac{b_k}{r^k |\sin k \alpha|} \right)^n \right] \right\} > \\ &> |H_{(nk)}(z)| \left\{ |a_{nk}| - M \frac{1}{\frac{r^k |\sin k \alpha|}{b_k} - 1} \right\} \end{aligned}$$

и, так как, в силу (12) правая часть последнего неравенства положительна, то нули многочлена  $\varphi(z)$  не могут лежать в области (12).

Итак, теорема П. Турана может быть сформулирована в следующей более общей форме:

Если  $\varphi(z) = \sum_{m=0}^n a_{mk} H_{(mk)}(z)$ ,  $M = \max_{m=0, \dots, n-1} |a_{mk}|$ ,  $a_{nk} \neq 0$ , то все нули многочлена  $\varphi(z)$  лежат в области, определяемой неравенством

$$r^k |\sin k \alpha| \geq b_k \left( 1 + \frac{M}{|a_{nk}|} \right), \quad b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right), \quad z = r e^{i\alpha}.$$

Таким образом, кривая, ограничивающая область расположения нулей выражается уравнением

$$r^k |\sin k \alpha| = b_k \left( 1 + \frac{M}{|a_{nk}|} \right).$$

Она принадлежит семейству сопряженных синус-спиралей.

Следует заметить, что в случае  $k=2$ , соответствующем классическим многочленам, коэффициент  $b_2$  даёт значение большее коэффициента  $5/4$  теоремы П. Турана. Объясняется это тем, что для обобщённых многочленов нами была использована несколько более грубая оценка модулей нулей, чем это имеет место для классических многочленов.

(Поступила 6 июнь 1961 г.)

#### БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] TURÁN, P.: "To the analytical theory of algebraic equations." *Известия на мат. инст. Българс. Ак. на Науките* 3 (1959) 2, 123.
- [2] CHATTERJEE, Ph.: "On a generalisation of Hermite's polynomial." *Bull. of the Calc. Mat. Soc.* 47 (1955) 1, 27.
- [3] ERDÉLYI, A.: *Math. Reviews*, 1956, 967.
- [4] SANSONE, G.: *Orthogonal functions*. 1959, 316.



## BEMERKUNG ÜBER EINEN SATZ VON P. TURÁN

von

A. KHARADZÉ

P. TURÁN bewies in Arbeit [1], dass falls  $f(z)$  ein Polynom der Form

$$f(z) = \sum_{m=0}^n c_{2m} H_{2m}(z) \quad |c_{2n}| \neq 0,$$

ist, wobei  $H_q(z)$  das Hermitesche Polynom  $q$ -ten Grades bezeichnet und  $z = x + iy$ , so befinden sich alle Wurzeln von  $f(z)$  in dem durch die Ungleichung

$$|xy| \leq \frac{5}{4} \left( 1 + \frac{M}{|c_{2n}|} \right) \quad M = \max_{m=0,1,\dots,n-1} |c_{2m}|$$

gegebenen Bereich.

In dieser Arbeit beweist Verfasser den folgenden Satz:

Ist  $\varphi(z)$  ein Polynom der Form

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^n a_{mk} H_{(mk)}(z) \quad a_{nk} \neq 0,$$

wobei  $H_{(qk)}(z)$  das durch PH. CHATTERJEE [2] verallgemeinerte Hermitesche Polynom bezeichnet,  $k \geq 2$  eine fixe natürliche Zahl bedeutet und  $z = re^{i\alpha}$ , so befinden sich alle Wurzeln von  $\varphi(z)$  in dem durch die Ungleichung

$$r^k |\sin k \alpha| \leq b_k \left( 1 + \frac{M}{|a_{nk}|} \right)$$

gegebenen Bereich, wobei

$$b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right), \quad M = \max_{m=0,1,\dots,n-1} |a_{mk}|.$$

Für  $k = 2$  ergibt dieser Satz den Satz von P. TURÁN, wobei jedoch  $b_2 > 5/4$ .



# ON THE DISTRIBUTION OF THE NUMBER OF TREES WHICH ARE ISOLATED SUBGRAPHS OF A CHROMATIC RANDOM GRAPH

by

ILONA PALÁSTI

P. ERDŐS and A. RÉNYI proved in their paper [1] among others the following theorem. If the random graph  $\Gamma_{n,N}$  has  $n$  given vertices and  $N$  edges, which are chosen at random so that each possible choice has the same probability, then if  $N \sim \varrho n^{\frac{k-2}{k-1}}$  where  $\varrho > 0$ , the number of isolated trees of order  $k$  contained in  $\Gamma_{n,N}$  has in the limit for  $n \rightarrow \infty$  a Poisson distribution with mean value

$$\lambda = \frac{(2\varrho)^{k-1} k^{k-2}}{k!}.$$

They have raised the question what is true in the case of a chromatic graph. We wish to answer this question.

Let be given  $m$  labelled vertices  $P_1, P_2, \dots, P_m$  of one colour and  $n$  vertices  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  of an other colour and let us choose at random  $N$  edges. The restriction is made that no vertices of the same colour are allowed to be connected by an edge. We suppose that every admissible choice of the edges has the same probability (equal to  $\frac{1}{\binom{mn}{N}}$ ). We denote the random

graph thus obtained by  $\Gamma_{m,n,N}$ . A connected graph is called a  $(k, l)$  tree if it has  $k$  vertices of one colour,  $l$  vertices of the other colour and  $(k + l - 1)$  edges connecting points having different colours. We shall prove the following

**Theorem 1.** If  $n = m^{1+\delta_m}$  where  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_m = 0$ , further if

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{N(m, n)}{m^{\frac{l-1}{k+l-1}} n^{\frac{k-1}{k+l-1}}} = \varrho$$

and if  $\tau_{k,l}$  ( $k \geq 1, l \geq 1$ ) denotes the number of  $(k, l)$  trees which are isolated subgraphs of the bichromatic random graph  $\Gamma_{m,n,N(m,n)}$ , then

$$(1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{m,n,N(m,n)}(\tau_{k,l} = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$$



( $j = 0, 1, \dots$ ), where

$$(2) \quad \lambda = \frac{q^{k+l-1} k^{l-1} l^{k-1}}{k! l!}.$$

**Proof.** The theorem is proved in an analogous way as the analogous result in to [1]. Let  $T_{k,l}^{(m,n)}$  be the set of all  $(k, l)$  trees which are the subgraphs of the complete bicoloured graph having the vertices  $P_1, P_2, \dots, P_m$  and  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . If  $S \in T_{k,l}^{(m,n)}$  let the random variable  $\varepsilon(S)$  be equal to 1 if  $S$  is an isolated subgraph of  $\Gamma_{m,n,N}$ , and  $\varepsilon(S)$  equal to 0 otherwise. Then the mean value of  $\varepsilon(S)$  is

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) &= \frac{\binom{(m-k)(n-l)}{N-(k+l-1)}}{\binom{mn}{N}} \sim \\ &\sim \left(\frac{N}{mn}\right)^{k+l-1} \prod_{j=1}^{N-(k+l)} \frac{(m-k)(n-l)-j}{mn-(k+l-1)-j}. \end{aligned}$$

Wherefrom

$$(4) \quad \mathbf{M}(\varepsilon(S)) = \left(\frac{N}{mn}\right)^{k+l-1} \left[1 + O\left(N \frac{ml + nk}{mn}\right)\right].$$

If the subgraphs  $S_j$ , ( $S_j \in T_{k,l}^{(m,n)}$ ), ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) are not disjoint then

$$(5) \quad \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = 0.$$

If however  $S_1, S_2, \dots, S_r$  are disjoint, then obviously for all  $k \geq 1$ ,  $l \geq 1$  and  $r \geq 1$  we obtain for  $m \rightarrow \infty$

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) &= \frac{\binom{(m-rk)(n-rl)}{N-r(k+l-1)}}{\binom{mn}{N}} = \\ &= \left(\frac{N}{mn}\right)^{r(k+l-1)} \left[1 + O\left(Nr \frac{ml + nk}{mn}\right)\right]. \end{aligned}$$

Clearly our suppositions imply  $\frac{N(m, n)}{m} \rightarrow 0$  and  $\frac{N(m, n)}{n} \rightarrow 0$  for  $m \rightarrow \infty$ .

According to a result of T. L. AUSTIN [2], the number of coloured trees having  $c_k$  labelled vertices coloured with the  $k$ -th colour ( $k = 1, 2, \dots, a$ ) is

$$(7) \quad A(c, u - 1) = u^{a-2} (u - c_1)^{c_1-1} (u - c_2)^{c_2-1} \dots (u - c_a)^{c_a-1},$$

where  $c$  stands for the vector  $c = (c_1, c_2, \dots, c_a)$  and  $u = c_1 + c_2 + \dots + c_a$ . Thus the number of bichromatic  $(k, l)$  trees which can be formed from  $k$  label-

led points of one colour and  $l$  labelled points of the other colour, is  $k^{l-1}l^{k-1}$ . Taking into consideration the asymptotical formula

$$(8) \quad \frac{1}{r!} \binom{m}{k} \binom{m-k}{k} \cdots \binom{m-(r-1)k}{k} \binom{n}{l} \binom{n-l}{l} \cdots \binom{n-(r-1)l}{l} = \\ = \frac{\left(\frac{m^k}{k!}\right)^r \left(\frac{n^l}{l!}\right)^r}{r!} \left[1 + O\left(\frac{r}{m}\right) + O\left(\frac{r}{n}\right)\right], \quad \text{for } m \rightarrow +\infty$$

we obtain

$$(9) \quad \sum \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = \\ = \left(\frac{k^{l-1}}{k!}\right)^r \left(\frac{l^{k-1}}{l!}\right)^r \frac{m^{kr} n^{lr}}{r!} \left(\frac{N}{mn}\right)^{(k+l-1)r} \left[1 + O\left(\frac{Nr}{mn}(ml + nk)\right)\right]$$

where the summation on the left side is extended over all  $r$ -tuples of trees  $S_1, S_2, \dots, S_r$  which belong to the set  $T_{k,l}^{(m,n)}$ . In such a way it is obtained that uniformly in  $r$

$$(10) \quad \lim_{\substack{N(m,n) \\ \frac{l-1}{m^{k+l-1}} \frac{k-1}{n^{k+l-1}} \rightarrow 0}} \sum \mathbf{M}(\varepsilon(S_1) \varepsilon(S_2) \dots \varepsilon(S_r)) = \frac{\lambda^r}{r!}$$

where  $\lambda$  is determined according to (2).

On the other hand the Lemma 1 of P. ERDŐS—A. RÉNYI in [1] states the following:

Let  $\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nb_n}$  be a set of random variables which are defined on some probability space such that  $\varepsilon_{ni}$  ( $1 \leq i \leq b_n$ ) only take on the value 1 or 0. If

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq b_n} \mathbf{M}(\varepsilon_{ni_1} \varepsilon_{ni_2} \dots \varepsilon_{ni_r}) = \frac{\lambda^r}{r!}$$

uniformly in  $r, r = 1, 2, \dots$ , where  $\lambda > 0$ , and the summation is extended over all combinations of order  $r$  of the integers  $1, 2, \dots, b_n$  then

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^{b_n} \varepsilon_{ni} = j \right) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Applying this Lemma, Theorem 1 follows immediately from (10).

Let us now consider the random  $a$ -coloured graph  $\Gamma_{n_1, \dots, n_a, N}$  having  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, a$ ) labelled vertices coloured with the  $i$ -th colour and having  $N$  edges chosen at random so that only vertices having different colours can be connected by an edge and all admissible choices of the  $N$  edges have the same probability. The following generalization of Theorem 1 can be proved in the same way.



**Theorem 2.** *If*

$$(13) \quad \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{N(n_1, n_2, \dots, n_a)}{n_1^{\frac{u-c_1-1}{n-1}} n_2^{\frac{u-c_2-1}{u-1}} \dots n_a^{\frac{u-c_a-1}{u-1}}} = \varrho > 0$$

where  $n_i = n_1^{1+\delta_i(n_1)}$  ( $i = 2, \dots, a$ ) and where  $\lim_{n_1 \rightarrow +\infty} \delta_i(n_1) = 0$  and if  $\tau_{c_1, c_2, \dots, c_a}$  denotes the number of trees of order  $u = c_1 + c_2 + \dots + c_a$  having exactly  $c_i$  vertices coloured with the  $i$ -th colour and which are isolated subgraphs of the random graph  $\Gamma_{n_1, n_2, \dots, n_a, N}$ , then

$$(14) \quad \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_{c_1, c_2, \dots, c_a} = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$$

( $j = 0, 1, \dots$ ), where

$$(15) \quad \lambda = \frac{\varrho^{u-1} u^{a-2} (u - c_1)^{c_1-1} (u - c_2)^{c_2-1} \dots (u - c_a)^{c_a-1}}{c_1! c_2! \dots c_a!}.$$

I wish to express my thanks to A. RÉNYI for his helpful suggestions and to T. GALLAI for his valuable remarks.

## REFERENCES

- [1] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the evolution of random graphs." *Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci.* **5** A. (1960) 17—61.  
 [2] AUSTIN, T. L.: "The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees." *Canadian Journal of Mathematics* **12** (1960) 535—545.

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИЗОЛИРОВАННЫХ ДЕРЕВЬЕВ В СЛУЧАЙНОМ НЕОДНОЦВЕТНОМ ГРАФЕ

I. PALÁSTI

### Резюме

Пусть случайный граф  $\Gamma_{m, n, N}$  с четным обходом состоит из  $m$  заданных занумерированных вершин  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , которые раскрашены одним цветом, из  $n$  занумерированных точек  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , которые раскрашены другим цветом, и содержит  $N$  наугад выбранных ребер. Условимся, что нельзя связывать одноцветные точки ребром и будем предполагать, что все допустимые выборы ребер одинаково вероятны. Назовем деревом порядка  $(k, l)$  такой связный граф, который содержит  $k$  вершин из множества точек одного цвета и  $l$  — из множества точек другого цвета и число ребер которого, связывающих разноцветные точки, равно  $k + l - 1$ . Мы показали, что если число ребер

$$N \sim \varrho m^{\frac{l-1}{k+l-1}} n^{\frac{k-1}{k+l-1}},$$



где  $\varrho > 0$ , тогда распределение числа изолированных деревьев порядка  $(k, l)$  в случайном графе  $G_{m, n, N}$  в пределе стремится к Пуассонову распределению с средним

$$\lambda = \frac{\varrho^{k+l-1} k^{l-1} l^{k-1}}{k! l!}$$

если  $m \rightarrow \infty$ , предполагая что  $n = m^{1+\delta_m}$ , где  $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = 0$ . Подобная теорема имеет силу также и в случае многоцветного случайного графа.



# ON KOLMOGOROFF'S INEQUALITY

by  
A. RÉNYI

## § 0. Notations

Let  $S = [\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$  be a probability space, i.e.  $\Omega$  a set (the set of elementary events),  $\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -algebra of subsets of  $\Omega$ , and  $\mathbf{P}$  a probability measure on  $\mathcal{A}$ . We shall denote the elements of  $\mathcal{A}$  (called random events) by capital letters and we denote by  $\mathbf{P}(A)$  the probability of the event  $A \in \mathcal{A}$ . Random variables (i.e. functions defined on  $\Omega$  and measurable with respect to  $\mathcal{A}$ ) will be denoted by greek letters. We denote by  $\mathbf{M}(\xi)$  the mean value and by  $\mathbf{D}^2(\xi)$  the variance of the random variable  $\xi$ . We denote by  $\mathbf{P}(A | B)$  the conditional probability of the event  $A$  with respect to the event  $B$ .

## § 1. Introduction

In the present paper we deal with the celebrated inequality of A. N. KOLMOGOROFF ([1]) according to which if  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  are independent random variables with mean value 0 and with finite variances  $d_k^2 = \mathbf{D}^2(\xi_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) then putting

$$(1) \quad \zeta_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

and

$$(2) \quad D_k^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2 = \mathbf{D}^2(\zeta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

one has for any  $\lambda > 1$

$$(3) \quad \mathbf{P}(\text{Max}_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq \lambda D_n) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

As well known, this inequality is extremely useful in proving the strong law of large numbers, the law of the iterated logarithm and other related theorems.

In § 2 we generalize this inequality by considering instead of (3) the conditional probability of the inequality  $\text{Max}_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq \lambda D_n$  with respect to some condition  $A$  having positive probability. We prove the following

**Theorem.** *If the random variables  $\xi_k$  are independent, have zero means, finite variances  $d_k^2$  and finite fourth moments  $f_k^4 = \mathbf{M}(\xi_k^4)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), then if  $\zeta_k$  resp.  $D_k$  are defined by (1) resp. (2) and we put*

$$(4) \quad F_n^4 = f_1^4 + \dots + f_n^4$$



then one has for any  $\lambda > 1$ , and for any event  $A$  with  $\mathbf{P}(A) > 0$ ,

$$(5) \quad \mathbf{P}(\text{Max}_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq \lambda D_n | A) \leq \frac{2 + \sqrt{3 + \left(\frac{F_n}{D_n}\right)^4}}{\lambda^2 \sqrt{\mathbf{P}(A)}}.$$

It is known that in the proof of Kolmogoroff's inequality the supposition of independence of the random variables  $\xi_k$  can be replaced by the weaker supposition that the conditional mean value of  $\xi_k$  given  $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$  is identically equal to 0, that is that the variables  $\zeta_k$  form a martingale (see [2]). It will be seen from the proof that the same supposition is sufficient for the validity of our Theorem.

## § 2. Proof of the generalization of Kolmogoroff's inequality

In this § we shall prove the Theorem formulated in § 1.

Let  $A$  be an arbitrary event, having positive probability  $\mathbf{P}(A) > 0$ . Let  $\alpha$  denote the indicator of  $A$ , i.e. a random variable, which is equal to 1 on the set  $A$  (i.e. if the event  $A$  takes place) and equal to 0 on the complementary set  $\bar{A} = \Omega - A$  (i.e. if the event  $A$  does not take place). Let  $B_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) denote the event that  $|\zeta_k|$  is the first term of the sequence  $|\zeta_1|, |\zeta_2|, \dots, |\zeta_n|$  which is not less than  $\lambda D_n$ , i.e.  $B_k$  takes place if  $|\zeta_1| < \lambda D_n, \dots, |\zeta_{k-1}| < \lambda D_n$  and  $|\zeta_k| \geq \lambda D_n$ . Let  $\beta_k$  denote the indicator of  $B_k$ . Then clearly

$$(6) \quad 0 \leq \sum_{k=1}^n \beta_k \leq 1, \text{ further } \beta_k \beta_l = 0 \text{ if } k < l$$

and  $\beta_k$  depends only on  $\xi_1, \dots, \xi_k$ , and thus is independent of  $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ . Let finally  $C_n$  denote the event  $\text{Max}_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq \lambda D_n$ , that is  $C_n$  is the union of the sets  $B_1, \dots, B_n$ . We have clearly

$$(7) \quad \mathbf{M}(\zeta_n^2 \alpha) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\zeta_n^2 \alpha \beta_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k \alpha) + 2 \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\zeta_k \beta_k (\zeta_n - \zeta_k) \alpha) + \\ + \sum_{k=1}^n \mathbf{M}((\zeta_n - \zeta_k)^2 \alpha \beta_k) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k \alpha) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \mathbf{M}(\zeta_k \beta_k \xi_j \alpha).$$

Now put

$$(8) \quad \eta_{kj} = \zeta_k \beta_k \xi_j \quad (1 \leq k \leq n-1; k+1 \leq j \leq n).$$

Clearly we have, if  $1 \leq k < j < h \leq n$

$$(9a) \quad \mathbf{M}(\eta_{kj} \eta_{kh}) = \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k \xi_j \xi_h) = \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) \mathbf{M}(\xi_j) \mathbf{M}(\xi_h) = 0,$$

further if  $k < l, k+1 \leq j, l+1 \leq h$  then owing to  $\beta_k \beta_l = 0$  one has

$$(9b) \quad \mathbf{M}(\eta_{kj} \eta_{lh}) = 0.$$

Further

$$(9c) \quad \mathbf{M}(\eta_{kj}^2) = \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) d_j^2.$$

Thus the system

$$(10) \quad \eta_{kj}^* = \frac{\eta_{kj}}{d_j \sqrt{\mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k)}}$$

is orthonormal. It follows by Bessel's inequality that

$$(11) \quad \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n \mathbf{M}(\eta_{kj} \alpha) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n d_j \sqrt{\mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k)} \cdot \mathbf{M}(\eta_{kj}^* \alpha) \right| \leq \\ \leq \sqrt{\mathbf{M}(\alpha^2)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) \sum_{j=k+1}^n d_j^2}.$$

Taking into account that

$$(12) \quad \mathbf{M}(\zeta_n^2 \beta_k) - \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) = \mathbf{M}((\zeta_n - \zeta_k)^2 \beta_k) + 2 \mathbf{M}(\zeta_k \beta_k (\zeta_n - \zeta_k))$$

and  $\mathbf{M}(\zeta_k \beta_k (\zeta_n - \zeta_k)) = 0$ , it follows that

$$(13) \quad \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) \leq \mathbf{M}(\zeta_n^2 \beta_k).$$

Thus

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) \left( \sum_{j=k+1}^n d_j^2 \right) \leq D_n^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k) \leq D_n^2 \mathbf{M}(\zeta_n^2) = D_n^4.$$

Thus we obtain finally, taking into account that  $\mathbf{M}(\alpha^2) = \mathbf{P}(A)$ , that

$$(15) \quad \mathbf{M}(\zeta_n^2 \alpha) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k \alpha) - 2 D_n^2 \sqrt{\mathbf{P}(A)}.$$

On the other hand if  $\beta_k = 1$ , one has  $\zeta_k^2 \geq \lambda^2 D_n^2$ .

Thus

$$(16) \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(\zeta_k^2 \beta_k \alpha) \geq \lambda^2 D_n^2 \mathbf{M} \left( \alpha \left( \sum_{k=1}^n \beta_k \right) \right) = \lambda^2 D_n^2 \mathbf{P}(AC_n)$$

where  $C_n$  stands for the event  $\max_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq \lambda D_n$ . We obtain from (15) and (16)

$$(17) \quad \mathbf{P}(AC_n) \lambda^2 D_n^2 \leq \mathbf{M}(\zeta_n^2 \alpha) + 2 D_n^2 \sqrt{\mathbf{P}(A)}.$$

On the other hand,

$$(18) \quad \mathbf{M}(\zeta_n^2 \alpha) \leq \sqrt{\mathbf{P}(A)} \mathbf{M}(\zeta_n^4).$$

As clearly

$$(19) \quad \mathbf{M}(\zeta_n^4) \leq F_n^4 + 3 D_n^4$$

we obtain from (17), (18) and (19)

$$(20) \quad \mathbf{P}(C_n | A) = \frac{\mathbf{P}(AC_n)}{\mathbf{P}(A)} \leq \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{\mathbf{P}(A)}} \left( 2 + \sqrt{3 + \frac{F_n^4}{D_n^4}} \right).$$

Thus (5) is proved.

Our theorem may e.g. be used to obtain an estimate for

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq v_n} |\zeta_k| \geq t_n)$$

where  $v_n$  is a random variable, which may depend on the variables  $\xi_k$ . Let  $v_n$  take on the values  $n+1, n+2, \dots, n+s$  with the corresponding probabilities  $p_1, p_2, \dots, p_s$ . If  $A_l$  denotes the event  $v_n = n+l$  ( $l = 1, 2, \dots, s$ ) one has by Theorem 1, in the case  $|\xi_k| \leq 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq v_n} |\zeta_k| \geq t_n) &= \sum_{l=1}^s \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n+l} |\zeta_k| > t_n | A_l) \mathbf{P}(A_l) \leq \\ &\leq \frac{4}{t_n^2} \sum_{l=1}^n \sqrt{\mathbf{P}(A_l)} D_{n+l}^2 \leq \frac{4 D_{n+s}^2}{t_n^2} \sqrt{s}. \end{aligned}$$

Thus we obtain, putting  $t_n = \lambda D_{n+s}$  the following

**Corollary.** *If  $\xi_1, \dots, \xi_n$  are independent random variables, with mean value zero and satisfying  $|\xi_k| \leq 1$ , further if  $v_n$  is a random variable capable of the values  $n+1, \dots, n+s$  and if  $D_k^2$  denotes the variance of  $\zeta_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$ , we have for  $\lambda < 2\sqrt{s}$*

$$(22) \quad \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq v_n} |\zeta_k| > \lambda D_{n+s}) < \frac{4\sqrt{s}}{\lambda^2}.$$

(Received June 18, 1961.)

#### REFERENCES

- [1] KOLMOGOROFF, A. N.: "Über die Summen durch den Zufall bestimmten unabhängigen Größen." *Math. Annalen* **99** (1929) 301—319.
- [2] DOOB, J. L.: *Stochastic processes*. Wiley, New-York, 1953.

#### О НЕРАВЕНСТВЕ А. Н. КОЛМОГОРОВА

A. RÉNYI

#### Резюме

Доказывается следующее обобщение известного неравенства А. Н. Колмогорова. Пусть  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) независимые случайные величины, имеющие математическое ожидание 0, конечные дисперсии  $d_k$  и четвертые моменты  $f_k^4$ . Положим  $\zeta_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$ ,  $D_n^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$ ,



$F_n^4 = f_1^4 + \dots + f_n^4$ . Пусть  $A$  произвольное событие с положительной вероятностью  $\mathbf{P}(A) > 0$ . Тогда имеет место для всех  $\lambda > 1$

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq \lambda D_n | A) \leq \frac{2 + \sqrt{3 + \left(\frac{F_n}{D_n}\right)^4}}{\lambda^2 \sqrt{\mathbf{P}(A)}}.$$



## UNSOLVED PROBLEMS

Problems for this section as well as comments on published problems should be sent to G. ALEXITS, editor of the section, to the address of the redaction of the journal (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15).

## НЕРАЗРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Проблемы предназначенные для этого раздела, а также замечания, связанные с общаемыми проблемами просим направить по адресу редакции журнала (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15) для редактора раздела G. ALEXITS.

## RESEARCH PROBLEMS

by  
PAUL TURÁN

(1) If  $1 \geq x_1 > x_2 \dots > x_n \geq -1$  and  $l_v(x)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ )

are the fundamental functions of the Lagrange interpolation on these  $x_j$ 's, then what is the minimum of

$$\int_{-1}^1 \left( \sum_{v=1}^n |l_v(x)| \right) dx$$

and what are the extremal  $(x_1, x_2, \dots, x_j)$ -systems? (Probably this is  $\sim c \log n$ , giving a far reaching generalization of G. FABER's classical theorem.)

(2) Let the  $x_j$ 's and  $l_v(x)$ 's of the previous problem be such that the numbers

$$\lambda_v \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 l_v(x) dx \geq 0 \quad v = 1, 2, \dots, n$$

are all nonnegative. If  $1 \leq j \leq n$  is fixed, what is the exact range of  $x_j$ ? (If  $x_1, x_2, \dots, x_n$  form a so-called strongly normal sequence introduced by FEJÉR, then the corresponding problem has been solved by P. ERDŐS. (*Proc. of the Nat. Acad. of USA* (1940) p. 294—297).)

(3) If  $2 \leq l < k \leq n$ , then what is the minimal number  $\mu$  of combinations  $C_1, C_2, \dots, C_\mu$  taken  $l$  at a time out of  $1, 2, \dots, n$  with the property that each combination taken  $k$  at a time out of  $1, 2, \dots, n$  contains at least one  $C_j$ ? (For  $l = 2$  the question is settled with exhibiting the *only* minimal  $C$ -system in my paper "Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról", *Mat. és Fiz. Lapok* (1941) 436—451, in Hungarian with German abstract.)

(4) If

$$\max_{j=1, \dots, n} |z_j| = 1,$$

what is the minimum of

$$\max_{v=1, 2, \dots, n} |z_1^v + z_2^v + \dots + z_n^v|$$

and what are the extremal-systems? (The solution of this longstanding problem can be applied in the theory of approximative solution of algebraic equations. See my paper "Remark on the preceding paper of J. W.S. CASSELS "Acta



*Math. Hung.* **7** (1956) p. 291–294. Recently F. V. ATKINSON made a large step towards the solution showing that this minimum is at least  $\frac{1}{6}$ . See

his paper „On sums of powers of complex numbers.” *Acta Math. Hung.* **12** (1961) p. 185–188.

(5) Does it follow from the truth of Riemann's conjecture that for all sufficiently large  $n$ 's the Dirichlet-polynomials

$$u_n(s) = \sum_{r \leq n} r^{-s} \quad (s = \sigma + it)$$

do not vanish for  $\sigma > 1$ ,  $|t| < e^n$ ? (In my paper „Nachtrag . . .” *Acta Math. Hung.* **10** (1959) 277–298, I proved it for

$$\sigma > 1, \quad c_1 \leq |t| \leq e^{e^{c_2} \sqrt{\log n \log \log n}}$$

with a positive numerical  $c_1, c_2$ .)

(6) In our paper “On a problem . . .” *Indag. Math.* **10** (1948) 1146–1154, resp. 406–413, with P. ERDŐS we proved for real  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  and  $\lambda \leq 1$  that if

$$\max_{1 \leq k \leq n^{\frac{1}{\lambda+1}}} \left| \sum_{j=1}^n e^{ki\varphi_j} \right| k^{-\lambda} \leq 1,$$

then for  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$  we have

$$\left| \sum_{\substack{\alpha \leq \varphi_v \leq \beta \pmod{1} \\ v \leq n}} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \right| < C n^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

with a positive numerical  $C$ . Is the order  $n^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$  the best possible?

(7) If  $p$  is an odd prime, we denote by  $N_p(n)$  the number of the solutions of the Fermat-equation  $x^p + y^p = z^p$  with

$$1 \leq x, y, z \leq n, \quad (x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$$

Is it true that the inequality

$$N_p(n) < c(p) n^{\frac{1}{p}}$$

holds, where  $c(p)$  depends only upon  $p$ ? In our paper “A second note on Fermat's conjecture” with P. DÉNES in *Publ. Math.* **4** (1955) 28–32, we proved only

$$N_p(n) < c(p) \frac{n^{\frac{2}{p}}}{\log^{\frac{2}{p}-\frac{2}{p}} n}.$$

(8) As a conversion of the theorems of Descartes sign-rule-type I proved (*Bull. of Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 797–800.) that writing an arbitrary polynomial  $f(x)$  of degree  $n$  with real coefficients in the form

$$f(x) = \sum_{v=0}^n b_v L_v(x)$$

where  $L_\nu(x)$  stands for the  $\nu^{\text{th}}$  Laguerre-polynomial

$$L_\nu(x) = \frac{e^x}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} (e^{-x} x^\nu),$$

then the number of positive zeros of  $f(x)$  is *not less* than the number of changes of sign in the sequence

$$b_0, (b_0 - b_1), (b_0 - 2b_1 + b_2), \dots, \left(b_0 - \binom{n}{1} b_1 + \binom{n}{2} b_2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b_n\right).$$

For this theorem an integral-free proof is wanted.

(9) If the  $\nu^{\text{th}}$  Hermite-polynomial  $H_\nu(z)$  is defined as usual by

$$H_\nu(z) = (-1)^\nu e^{z^2} \frac{d^\nu}{dz^\nu} (e^{-z^2}),$$

does there follow from

$$0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$$

the reality of all zeros of the polynomial

$$\sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu a_\nu}{2^{2\nu} (2\nu)!} H_{2\nu}(x) ?$$

(For the background of this problem see my paper "Sur l'algèbre fonctionnelle", *Comptes Rendus du Prem. Congr. des Math. Hongr.* 1950.)

(10) Is it true that if

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu H_\nu(z)$$

( $H_\nu(z)$  again the  $\nu^{\text{th}}$  Hermite-polynomial) then fixing the positive integers  $p$  and  $h$  with  $p + h \leq n$  and the coefficients  $b_1, b_1, \dots, b_{p-1}$  and  $b_{p+h}$  *the imaginary parts* of  $p$  zeros of  $f(z)$  remain absolutely bounded when the other

$b_j$ 's and  $n$  vary? (The analogous theory for the "Vieta-expansion"  $\sum_{\nu=0}^n c_\nu z^\nu$  of  $f(z)$  is due to LANDAU, FEJÉR, BIERNACKI, FEKETE, MONTEL and others.) For indications see my previously quoted paper.

(11) If with arbitrary complex  $a_\nu$ 's and  $z = x + iy$

$$V(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu, \quad H(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu H_\nu(z),$$

is it true that for all positive  $D$  the strip  $|y| \leq D$  can contain at most as many from the zeros of  $V(z)$  as the strip  $|y| \leq \frac{D}{2}$  from the zeros of  $H(z)$

(both counted with multiplicity)? I could prove this theorem only in special cases, see my previous quoted paper "Sur l'algèbre fonctionnelle".

(12) Denoting by  $k_j(n)$  the minimal number of 0's in an  $n \times n$ -matrix with elements 0, 1 which ensures the existence of a  $j \times j$  submatrix consisting exclusively from 0's, is it true that

$$k_j(n) > c(j) n^{2 - \frac{1}{j}},$$

where  $c(j)$  depends only upon  $j$ ? The inequalities

$$k_j(n) < 1 + jn + \left[ (j-1)^{\frac{1}{j}} n^{2 - \frac{1}{j}} \right]$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_2(n)}{n^{3/2}} = 1$$

are proved in our paper with T. KÖVÁRI and Vera T. Sós entitled "On a problem of K. Zarankiewicz" in *Coll. Math. Vol. 3* (1954) 50–57.

(13) What is the "exact domain" of Lipschitz-classes for the "fine" quadrature-convergence theory in the sense of our paper with P. ERDŐS entitled "On the role of the Lebesgue functions in the theory of Lagrange-interpolation", *Acta Math. Hung.* **6** (1955) 1–2, p. 47–66 in particular p. 50?

(14) what is the lim inf of those  $A$ -numbers for which the inequality

$$\max_{v=m+1, \dots, m+n} |z_1^v + \dots + z_n^v| \geq \left( \frac{n}{A(m+n)} \right)^n$$

holds whenever for the variable  $z_j$ 's

$$\max_{j=1, \dots, n} |z_j| = 1,$$

$m$  and  $n$  are fixed positive integers. That  $A^* \leq 8e$ , is contained in our paper with Vera T. Sós entitled "On some new theorems etc. . ." *Acta Math. Hung.* **6** (1955) 241–256; that  $A^* > 1,473$ , was proved by E. MAKAI in his paper "An estimation in the theory of diophantine approximations" *Acta Math. Hung.* **9** (1958) 299–307.

(15) Let  $f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^{\lambda_v}$  an entire-function with the Fabry-condition

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ , further we denote

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r), \quad \max_{|z|=r} |f(z)| = M(r, \alpha, \beta),$$

$$\alpha \leq \arg z \leq \beta$$

as usual. Is it true that for an arbitrarily small but fixed positive  $\varepsilon$  and  $\delta$  the measure  $R_{\delta, \varepsilon}(\omega)$  of  $r$ -values not exceeding  $\omega$  with the property

$$M(r)^{1-\varepsilon} \leq \max_{\alpha} M(r, \alpha, \alpha + \delta) \leq M(r)$$



has the property

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} R_{\delta, \varepsilon}(\omega) = 1.$$

Results in this direction in my paper „Über lakunären Potenzreihen”, *Revue de Math. pures et appl. Romania* **1** (1956) 27–32. and T. KÖVÁRI's paper entitled “On the gap-theorems of G. Polya and P. Turán.” *Journal d'Analyse*. (1958) 323–332.

(16) For fixed  $A > 0$  and  $c > 1$  we denote by  $S(N, A, c)$  the set of those  $\alpha$ 's in  $0 < \alpha < 1$  for which with an integer  $N \geq 2$ ,  $x$  and  $N \leq y \leq cN$  the system

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{A}{y^2}, \quad (x, y) = 1, \quad y > 1$$

is solvable. Denoting by  $|S(N, A, c)|$  the measure of  $S(N, A, c)$  does

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S(N, A, c)| = f(A, c)$$

exist? Results in this direction are in our paper with ERDŐS and SZÜSZ in *Coll. Math.* **6** (1958) 119–125 entitled „Remarks on the theory of diophantine approximation” and ERDŐS's paper entitled “Some results on diophantine approximation” *Acta Arith.* **5** (1959) 359–369.

(17) Denoting the set of those  $\alpha$ 's in  $0 < \alpha < 1$  for which with an integer  $N \geq 2$  and  $c > 1$  the interval  $N \leq y \leq cN$  contains at least one denominator  $q_\nu$  of the regular continued fraction of  $\alpha$ , by  $R(N, c)$ , does

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |R(N, c)| = \varphi(c)$$

exist? (See again our above-quoted paper with Erdős and Szüsz.)

(18) If  $N_n(V, x)$  stands for the number of integers  $k \leq n$ , for which

$$\frac{V(k) - \log \log n}{\sqrt{\log \log n}} \leq x,$$

( $V(k)$  the number of all prime-factors of  $k$ ) then we proved with A. RÉNYI in our paper “On a theorem of Erdős-Kac”, *Acta Arith.* **4** (1958) 71–84, that for fixed  $x$  and  $n \rightarrow \infty$

$$N_n(V, x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{n}{\sqrt{\log \log n}}\right)$$

uniformly in  $x$ . How to modify the proof to obtain the corresponding theorem of ERDŐS—KAC with remainder-term for general additive functions

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{for} \quad (m, n) = 1$$

$$B_m = \sum_{p \leq m} \frac{f(p)^2}{p} \rightarrow \infty \quad \text{for} \quad m \rightarrow \infty$$

$$f(p) = O(\sqrt{B_p}), \quad p \text{ prime}$$

in the form that if  $N_n(f, x)$  stands for the number of integers  $k \leq n$  for which

$$\frac{f(k) - \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p}}{B_n^{1/2}} \leq x,$$

then for fixed  $x$  and  $n \rightarrow \infty$

$$N_n(f, x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{n}{\sqrt{B_n}}\right)$$

uniformly in  $x$ ? [ERDŐS—KAC published their theorem in the paper “The Gaussian Law of Errors in the theory of additive numbertheoretic functions”, *Amer. J. of Math.* **62** (1940).] How to modify our proof for the corresponding situation concerning  $V(g(k))$  where  $g(x)$  is an irreducible polynomial with integer coefficients (for the first result in this direction in my paper „Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan”, *Journ. of Lond. Math. Soc.* **11** (1936) 125–133) or more generally to  $f(g(k))$  with the above  $f(x)$  (see the paper of H. HALBERSTAMM “On the distribution of additive numbertheoretic functions II.” *Journ. of Lond. Math. Soc.* **31** (1956) 1–14)?

(19) To determine all polynomial solutions  $\psi(z)$  of degree  $n$  of the differential-functional equation

$$\lambda \psi'(z) - \bar{\lambda} \bar{\psi}'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^n}{1-z} \psi(z) \bar{\psi}\left(\frac{1}{z}\right)$$

with  $\psi(1) = 0$ ;  $\lambda$  is a suitable constant. (For the background see my paper “Über die Potenzsummen komplexer Zahlen” *Archiv der Math.* **9** (1958) 59–64.)

(20) Does there exist an  $f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v z^v$  regular in  $|z| < 1$  and continuous for  $|z| \leq 1$  such that  $\sum_v a_v$  converges and putting

$$f\left(\frac{2z-1}{2-z}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v z^v$$

the series  $\sum b_v$  diverges? (for the fact that without the continuity-requirement this is possible and for general background see my paper “A remark concerning the behaviour of a power-series . . .” *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sc. Beograd* **12** (1958) 19–26.)

(21) With the notations of the problem 20 does it follow from the convergence of  $\sum_v |a_v|$  that of  $\sum_v |b_v|$ ? (This problem was in the meantime solved by L. ALPÁR in the negative. See his paper in *Matematikai Lapok* **11** (1960) 4, p. 312–322 in Hungarian with Russian and French summaries).

(22) Let  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  be a normed orthogonal system with respect to  $[-\pi, \pi]$  say, where the  $\varphi_j$ 's are here continuous and  $\varphi_j(\pi) = \varphi_j(-\pi)$  ( $j =$



$= 0, 1, \dots$ ). We say that this system has the Haar-property if the expansion

$$f = \sum_v^{\infty} a_v \varphi_v$$

converges uniformly to  $f$  in  $[-\pi, \pi]$ , whenever  $f$  is continuous in  $[-\pi, \pi]$  and  $f(\pi) = f(-\pi)$ . Does there exist a  $\varphi$ -system having the Haar-property so that the system of conjugate functions (in the sense of the trigonometrical series) which form automatically a normed orthogonal system too, has the Haar-property too? For background see my paper "On the infinite product representation of functions", *Bull. de l'Acad. Polon. des Sc.* **7** (1959) 481–486.

(23) If  $k$  is an arbitrary positive integer then I showed that in whatever way we split the integers  $k, k+1, \dots, 5k+3$  into two classes, the equation  $x+y=z$  is solvable in at least one class in *different* integers and for  $k, k+1, \dots, 5k+2$  this is not true. What is the corresponding theorem in the case of three classes? As I. SCHUR proved in whatever way we split the integers  $1, 2, \dots, ([en!] + 1)$  into  $n$  classes, the equation  $x+y=z$  is in at least one class solvable (not necessarily in different integers). See his paper "Über die Kongruenz  $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ ", *Jahresber. der deutsch. Math. Ver.* **25** (1916) 114–117.

(24) If  $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_n$  are the  $n$  first primes,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  real and  $\omega$  integer and  $\geq 4$ , is it true that the system

$$\|t \log p_v - \beta_v\| \leq \frac{1}{\omega}, \quad v = 1, 2, \dots, n$$

is solvable in

$$0 \leq t \leq e^{c_1 n}$$

with a suitable positive numerical  $c_1$ ? Here  $\|x\|$  stands as usual for the distance of  $x$  from the *next* integer. My paper "A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta function" to appear in *Acta Szeged* will contain the proof of the corresponding theorem for the interval

$$0 \leq t \leq e^{n^{\frac{3}{2}}}.$$

(25) The classical theorem of Dirichlet (for positive  $\alpha_j$ 's and integer

$q \geq 3$  there is an integer  $v \leq q^n$  so that  $\|v \alpha_j\| \leq \frac{1}{q}$  ( $j = 1, \dots, n$ )) is to be

proved on the analytical way I postulated in my book „*Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*“ (p. 19-20). (Essential progress was made in this direction by J. W. S. CASSELS in his paper „On the sums of powers of complex numbers.“ *Acta Math. Hung.* **7**(1956) 3-4, p. 283-289).



A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Pataki Ferenc

A kézirat nyomdába érkezett: 1961. VII. 27 — Példányszám: 800 — Terjedelem: 14,3 (A/5) ív

1961.53819 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

MAGYAR  
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
KÖNYVTÁRA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEIT az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. Külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРÉД РЕ́НИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНА́Р, ПА́Л РЕ́ВЭШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ В., РЕАЛТАНОДА У. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS  
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).



INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

B. C. RENNIE: Random walks .....	263
G. FREUD—M. SALLAY: Sur la vitesse de convergence du developpement selon des fonctions propres de Sturm-Liouville .....	271
E. CSÁKI: On the number of intersections in the one-dimensional random walk .....	281
I. BIHARI: On the nonlinear equation $u'' + a(t)u + q(t)f(u^2) = 0$ .....	287
I. BIHARI: Asymtotic behaviour of the solutions of certain second order ordinary differential equations perturbed by a half-linear term .....	291
L. SCHMETTERER: Über eine allgemeine Theorie der erwartungstreuen Schätzungen .....	295
B. JANKÓ: Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération par la résolution des équations opérationnelles non-linéaires, I. ....	301
M. HOSSZÚ—E. VINCZE: Über die Verallgemeinerungen eines Funktionalgleichungs- systems der Wirtschaftlichkeit .....	313
L. VEIDINGER: Error estimation for Massau's method of characteristics .....	323
L. PINTÉR: Oszillationssätze für einen Typ von nichtlinearen Differentialglei- chungen .....	333
J. BOGNÁR: О существовании квадратного корня из оператора, самосопряженного относительно индефинитной метрики .....	351
J. MOGYORÓDI: On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables .....	365
J. H. E. COHN: On some problems of P. Vermes .....	373
K. SZILÁRD: Über die Analoge der ganzen rationalen Funktionen in verallgemein- erten Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, I. ....	375
J. CZIPSZER: Sur la module de continuité intégrale .....	381
M. P. SCHÜTZENBERGER: On a family of submonoids .....	393
A. K. ХАРАДЗЕ: Заметка об одной теореме П. Турана .....	399
I. PALÁSTI: On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph .....	405
A. RÉNYI: On Kolmogoroff's inequality .....	411
P. TURÁN: Research problems .....	417



✓ Mr. 307.801  
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

**MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI**

VI. ÉVFOLYAM B. SOROZAT, 4. FÜZET

1961

★

**ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА**

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VI., СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.

1961

★

**PUBLICATIONS  
OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OF THE  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
VOLUME VI. SERIES B, FASC. 4.**

1961



1962

2

## TARTALOMJEGYZÉK

Jelentés az ALGOL 60 algoritmikus nyelvről (Révész Gy. fordítása) .....	425
JÁNOSSY L.—LEE A.—RÓZSA P.: A Coulomb-szóródás paraméterének becslése foto- emulzióban végzett mérések alapján .....	467
BOD P.: Az ágazati és igazgatási rendszerű input-output mérlegek kapcsolatáról ...	499
RÉNYI A.: Egy információelméleti problémáról .....	505
A Matematikai Kutató Intézet Osztályszemináriumában 1960-ban elhangzott előadások .....	517
A Matematikai Kutató Intézet Osztályszemináriumában 1961-ben elhangzott előadások .....	528
Az Intézet munkatársainak a korábbi dolgozatjegyzékekben még fel nem tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó alatt levő maganyelvű dolgozatainak jegyzéke	541



**A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI  
KUTATÓ INTÉZETÉNEK**

**VI. ÉVFOLYAM B. SOROZAT, 4. FÜZET**

**1961**

★

**МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА**

**АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ**

**ТОМ VI., СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.**

**1961**

★

**OF THE  
MATHEMATICAL INSTITUTE**

**OF THE**

**HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES**

**VOLUME VI. SERIES B, FASC. 4.**

**1961**



**1962**



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK  
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, RÉVÉSZ PÁL

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEIT az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnék. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatolkoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, külföldi címre 70,— Ft. (Kötetenként 5 \$.) Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámúra való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. Külföldi megrendelések a Kultúra (Budapest, 62, POB 149) útján eszközölhetők. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13—15.).

ТРУДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛФРЕД РЕЪНИ

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: КАТАЛИН БОГНАР, ПÁL РЕВÉШ

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ V., РЕАЛТАНОДА U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. К каждой работе примыкает резюме на языке, отличным от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 5 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура (Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS  
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, PÁL RÉVÉSZ

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 5.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

## JELENTÉS AZ ALGOL 60 ALGORITMIKUS NYELVRŐL<sup>1</sup>

A cikk szerzői, az ALGOL-bizottság tagjai: PETER NAUR (szerkesztő), J. W. BACKUS, L. F. BAUER, J. GREEN, C. KATZ, J. MCCARTHY, A. J. PERLIS, H. RUTISHAUSER, K. SAMELSON, B. VAUQUOIS, J. H. WEGSTEIN, A. van WIJNGAARDEN, M. WOODGER.

Fordította: RÉVÉSZ GYÖRGY<sup>2</sup>

### A fordító előszava

Az elektronikus számológépek programozásához, ill. számítási eljárások leírásához az utóbbi években számtalan különböző formulanyelvet dolgoztak ki. Az ALGOL nyelv megalkotóinak az volt a céljuk, hogy olyan közös algoritmikus nyelvet hozzanak létre, amelyen megérthetik egymást a programozó szakemberek és amely egyúttal — fordító program segítségével — különböző elektronikus számológépek programozására is alkalmas.

A jelen cikk annak a jelentésnek a fordítása, amely a nyelvet az 1960 januári konferencián kidolgozott formában ismerteti. (Innen az ALGOL 60 elnevezés, megkülönböztetésül egy előbbi, 1958-ban kidolgozott alaktól.) A jelentést, amely rögzíti az ALGOL 60 „nyelvtanát”, máris több nyelvre lefordították. A fordítások különböző matematikai folyóiratokban jelentek meg, helyenként magyarázó jellegű kiegészítésekkel és pl. az orosz nyelvű fordításhoz kritikai megjegyzéseket is fűztek.<sup>3</sup>

Az ALGOL nyelv fogalmainak magyar fordítása során jelentős gondot okozott, hogy helyenként egy egész új magyar nyelvű terminológia bevezetésére volt szükség. Az ebben, valamint a fordítás egészének átnézésében és javításában nyújtott segítségért köszönettel tartozom Dr. KALMÁR László akadémikusnak, valamint BÉKÉSSY András, DÖMÖLKI Bálint és FREY Tamás kollégáknak.

Budapest, 1961. október 6.

<sup>1</sup> „Report on the Algorithmic Language ALGOL 60” című cikk fordítása. (*Communications of the ACM* 3 (1960) 5, 299—314.)

A magyar nyelvre való fordításnál tekintetbe vettük a „Chiffres” c. folyóiratban megjelent francia nyelvű fordítást is. (A fordító megjegyzése.)

<sup>2</sup> MTA Számítástechnikai Központ.

<sup>3</sup> Журнал вычислительной математики и математической физики 1 (1961) 2, 308—342.



## BEVEZETÉS

### Előzmények

Annak az előzetes jelentésnek közzététele után<sup>4,5</sup> amely az ALGOL algoritmikus nyelvet egy 1958-ban, Zürichben tartott konferencián kidolgozott alakban ismertette, sokan érdeklődtek ez iránt a nyelv iránt.

Egy Mainzban, 1958 novemberében tartott tájékoztató összejövetel után 1959 februárjában, Koppenhágában jött össze egy ALGOL-konferencia, amelyre mintegy negyven érdekelt jött össze Európa különböző országaiból. Itt egy „gépi munkacsoport” alakult avégett, hogy a nyelv gépi alakját egészen a lyukszalag-kódig kidolgozzák. Ugyancsak ennek a konferenciának eredményeként kezdte meg a koppenhágai számológéppont (Regnecentralen) egy, a további viták fórumaként szolgáló ALGOL Bulletin kiadását, Peter Naur szerkesztésében. Az 1959 júniusában Párizsban ülésező ICIP konferencián az ALGOL-bizottság számos megbeszélést tartott. Ezek a megbeszélések feltártak néhány félreértést a csoport feladatával kapcsolatban, amely eredetileg elsősorban az ALGOL-nyelv definíciója volt, de ugyanakkor világossá tették azt is, hogy ez a próbálkozás széles körű elismerésre talál. A viták eredményeképpen elhatározták, hogy 1960 januárjában nemzetközi találkozót tartanak az ALGOL nyelv megjavítása és egy végleges megfogalmazás kidolgozása végett. Egy európai ALGOL konferencián, amelyet 1959 novemberében Párizsban tartottak, és amelynek mintegy ötven résztvevője volt, az 1960 januári konferenciára hét európai képviselőt választottak, akik a következő szervezeteket képviselték: *Association Francaise de Calcul*, *British Computer Society*, *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, és *Nederlands Rekenmachine Genootschap*. A hét képviselő egy végső előkészítő ülést tartott Mainzban, 1959 decemberében.

Eközben az Egyesült Államokban mindazok, akik módosításokat vagy helyesbítéseket kívántak javasolni az ALGOL nyelvvel kapcsolatban, felszólítást kaptak, hogy megjegyzéseiket a Communications of the ACM című folyóiratnak küldjék meg, közzététel végett. Ezek a megjegyzések szolgáltak azután az ALGOL módosítására vonatkozó megfontolások alapjául. Két szervezet, a SHARE és az USE, ALGOL munkabizottságot alakított és mindkét szervezet képviseltette magát az ACM programozási nyelvekkel foglalkozó bizottságában. Az ACM bizottság 1959 novemberében Washingtonban ülésezett és minden megjegyzést, amelyet csak az ALGOL nyelvre vonatkozólag az ACM folyóiratnak megküldtek, figyelembe vett. Ugyanitt hét képviselőt is választottak az 1960 januári nemzetközi konferenciára. Ez a hét képviselő 1959 decemberében, Bostonban tartott végső előkészítő megbeszélést.

### Az 1960 januári konferencia

A tizenhárom küldött<sup>6</sup>, aki Angliából, Dániából, Franciaországból, Németországból, Hollandiából, Svájból és az Egyesült Államokból jött össze, Párizsban, 1960 január 11-től 16-ig ülésezett.

<sup>4</sup> Preliminary Report — International Algebraic Language, *Comm. ACM* **1**, No. 12(1958), 8.

<sup>5</sup> Report on the Algorithmic Language ALGOL by the ACM Committee on Programming Languages and the GAMM Committee on Programming, edited by A. J. Perlis and K. Samelson, *Numerische Mathematik* Bd. **1**, S. 41—60 (1959).

<sup>6</sup> William Turanskit, az amerikai csoport tagját, éppen az 1960 januári konferencia előtt autó ütötte el és életét veszítette.



Az ülést megelőzően Peter Naur egy új jelentés-tervezetet készített a korábbi előzetes jelentés és az előkészítő üléseken elhangzott javaslatok anyagából. Ezt a párizsi konferencia a végleges jelentéshez tárgyalási alapnak fogadta el, majd a konferencia e jelentés minden egyes fejezetét megvitatta és megállapodásra törekedett. Az alábbi jelentés a bizottság elgondolásait tartalmazza, illetőleg ezeknek az elgondolásoknak azt a részét, amelyben valamennyien megállapodtak.

Az előzetes ALGOL jelentéshez hasonlóan a nyelv háromféle alakját, „szintjét” különböztetjük meg, mégpedig a hivatkozási nyelvet, a publikációs nyelvet és a gépi reprezentánsokat.

#### A HIVATKOZÁSI NYELV

1. Ez a bizottság munkájának tárgyát képező nyelv.
2. Ez a definiáló nyelv.
3. E nyelv jelöléseit a kölcsönös megértés kényelmére való törekvés szabja meg, nem pedig valamely számológép megkötöttségei vagy valamely kódrendszer vagy a tiszta matematikai jelölésrendszer.
4. Ez a nyelv az alap és vezérfonal a fordító programok készítői számára.
5. Ez a nyelv a vezérfonal minden gépi reprezentáns számára.
6. A publikációs nyelvről bármely helyileg alkalmasnak talált gépi reprezentánsra való átíráshoz ez a nyelv a vezérfonal.
7. Ezt a nyelvet használják maguk az ALGOL nyelvről szóló főbb közlemények.

#### A PUBLIKÁCIÓS NYELV

1. A publikációs nyelv a kézírásnak és a nyomdatechnikának megfelelően a hivatkozási nyelvhez képest változtatásokat enged meg (pl. indexeket, közöket, exponenseket, görög betűket).
2. Ez a nyelv számítási eljárások leírására és közlésére használható
3. A publikációs nyelvben használatos jelzések országonként különbözhetnek egymástól, de biztosítani kell, hogy e jelölések kölcsönösen egyértelmű megfelelekezésben legyenek a hivatkozási nyelvvel.

#### A GÉPI REPREZENTÁNSOK

1. A nyelvnek minden egyes ilyen alakja a hivatkozási nyelv egy-egy leszűkítése, amit csak az tesz szükségessé, hogy a szabványos beviteli berendezések csak korlátozott számú jel használatát teszik lehetővé.
  2. A gépi reprezentánsok mindegyike egy-egy adott gép jelkészletét használja és ezt a nyelvet érti meg az illető gépre kidolgozott fordító program.
  3. Minden ilyen reprezentánshoz tartoznia kell speciális átírási szabályzatnak a publikációs vagy a hivatkozási nyelvről való átírás számára.
- Ami a hivatkozási nyelvről egy a publikálásra alkalmas nyelvre való átírást illeti, többek között a következő szabályokat javasoljuk:

#### Hivatkozási nyelv

Index-zárójelek: [ ]

#### Publikációs nyelv

A zárójelbe foglalt sorrészt sülyesztése és a zárójelek elhagyása.

Hatványozás:  $\uparrow$

A kitevő szokásos emelése.

Kerek zárójelek: ( )

Tetszőleges alakú kerek, szögletes, kapcsos zárójelek.

Tizes alap jelzése: 10

A tizesnek és az őt követő egész számnak emelése és a tizes elé a szorzásjel betoldása.

## A HIVATKOZÁSI NYELV LEÍRÁSA

Ami egyáltalán elmondható, az elmondható világosan is; amiről pedig beszélni nem lehet, arról hallgatni kell.

*Ludwig Wittgenstein*

### 1. A nyelv szerkezete

Amint a bevezetésben említettük, az algoritmikus nyelvnek három fajta alakja van, — a hivatkozási nyelv, a publikációs nyelv és a gépi reprezentánssok —, és a következők a hivatkozási nyelvre vonatkozólag írják le a kifejtendőket. Ezt úgy értsük, hogy minden egyes objektumot, amely e nyelvben értelmezve van, a szimbolumoknak egy adott készlete segítségével ábrázolunk és csak a szimbolumok megválasztásában térhet el ettől a másik két fajta reprezentáció. A szerkezet és a tartalom minden reprezentánsban meg kell, hogy egyezzen.

Az algoritmikus nyelv célja számítási eljárások leírása. A számítási szabályok leírására szolgáló alapfogalom az aritmetikai kifejezés közismert fogalma, amely aritmetikai kifejezés számokat, változókat és függvényeket, mint alapelemeket tartalmaz. Az ilyen kifejezésekből kiindulva „aritmetikai kompozíciós szabályok” alkalmazásával explicit formulákat, „értékadó utasítás”-oknak nevezett önálló nyelvi egységeket alakítunk.

Avégett, hogy a számítási eljárás menete demonstrálható legyen, bizonyos nem-aritmetikai utasítások bevezetése is szükséges, ezek pl. elágazásokat (alternatívákat) vagy bizonyos számítási utasítások ismételtetését írhatják elő. Mivel pedig ilyen utasítások végrehajtásához szükséges, hogy egyes utasítások másokra utaljanak, az utasításokat címkékkel láthatjuk el. Utasítások sorozata úgynevezett utasítás-zárójelek segítségével egyetlen „összetett-utasítássá” kapcsolható össze.

Az utasításokat „deklarációk” támasztják alá, amelyek nem számítási utasítások, hanem tájékoztatást nyújtanak a fordítónak (fordítóprogramnak) az utasításokban szereplő objektumok előfordulásáról és bizonyos tulajdonságairól, mint pl. egy változó lehetséges értékeinek típusáról, a számok egy „tömb”-jének (pl. mátrixnak) a dimenziójáról, sőt esetleg pl. azoknak a szabályoknak összességéről, amelyek egy függvényt értelmeznek. Minden deklaráció egy összetett utasításhoz tartozik és csak arra érvényes. Olyan összetett utasítást, amely deklarációkat is tartalmaz, „blokk”-nak nevezünk.



Programnak nevezünk egy *önálló* összetett utasítást, vagyis egy olyan összetett utasítást, amely nem része más összetett utasításnak és nem használ fel olyan összetett utasításokat, amelyeket nem tartalmaz.<sup>7</sup>

Az alábbiakban ismertetjük az ALGOL nyelv szintaxisát és szemantikáját.<sup>8</sup>

### 1.1 A SZINTAKTIKUS LEÍRÁS FORMULANYELVE

Az ALGOL nyelv alább következő ismertetése két részből, mégpedig ún. „szintaktikus” és „szemantikus” leírásból áll. A szintaktikus leírás (a formális definíciók rendszere) tartalmazza a kifejezések, utasítások és deklarációk szerkesztésének szabályait — kiindulva az alapszimbólumokból. A szemantikus leírás az ilyen módon szerkesztett kifejezések, utasítások és deklarációk jelentésére és használatának módjára nézve ad felvilágosítást.

A szemantikus leírás a közönséges nyelvet használja, a szintaktikus leírás pedig a formularendszerek felépítésének pl. a matematikai logikában szokásos módszereivel történik.

Az ALGOL az a tárgy-nyelv, amelyet le akarunk írni. Ehhez egy másik nyelvre, az úgynevezett „metanyelvre” van szükségünk, amellyel a tárgy-nyelvet leírjuk. Az ALGOL szintaxisának szabályait a metanyelv formuláival fejezzük ki.<sup>9</sup>

E metanyelv alapszimbólumai a következők:

1. A „metazárójel”:  $\langle \rangle$ . A metazárójelben álló szimbólumok a metanyelv változói, amelyeknek értékei az ALGOL nyelv bizonyos szimbólumai vagy szimbólum-sorozatai. Például  $\langle ab \rangle$ ,  $\langle azonosító \rangle$ ,  $\langle összetett\ utasítás \rangle$ .

2. A függőleges elválasztó vonal:  $|$ . A felsorolásokban használatos „vagy” kötőszó rövidítésül szolgál.

3. A „négy pont-egylenlő” jel:  $::=$ . A meghatározás, definíció jelzésére szolgál. Azt jelenti, hogy a baloldalon álló metanyelvi szimbólumot a jobboldali kifejezések értelmezik.

Például  $\langle ab \rangle ::= \langle c \rangle | \langle d \rangle$  azt jelenti, hogy az  $\langle ab \rangle$  metaváltozó definíció szerint lehet  $\langle c \rangle$  vagy  $\langle d \rangle$ , ahol  $\langle c \rangle$  és  $\langle d \rangle$  már korábban definiált metanyelvi változók.

A metanyelv használja a „láncképzés” (juxtapozíció) műveletét. Tekintünk például a következő definíciót:

$$\langle x \rangle ::= \langle a \rangle \langle b \rangle$$

Ez azt jelenti, hogy az  $\langle x \rangle$  metaváltozó definíció szerint megengedett értékei a már korábban definiált  $\langle a \rangle$  és  $\langle b \rangle$  egy-egy lehetséges értékének a megadott sorrendben vett párjából állhatnak.

<sup>7</sup> Amikor azt mondjuk, hogy az aritmetika pontossága általában nincsen rögzítve, vagy pedig azt, hogy egy bizonyos eljárás eredménye nincs értelmezve, akkor ez úgy értendő, hogy egy program csak akkor definiál egy számítási eljárást teljes mértékben, ha kiegészítő információ rögzíti a kívánt pontosságot, a használandó aritmetika fajtáját és a szükséges műveletek menetét minden ilyen, a számítás során előforduló esetben.

<sup>8</sup> Az alábbi fejezettrészt a francia fordításhoz hasonlóan mi is kibővítettük. (A fordító megjegyzése.)

<sup>9</sup> Lásd: J. BACKUS: The syntax and semantics of the proposed international algebraic language of the Zürich ACM—GAMM conference. ICIP, Paris, June 1959.



A láncképzés műveletét az ALGOL leírásában *rekurzív* definíciókra is felhasználjuk. Ennek illusztrálására szolgál a következő példa:

$$\langle ab \rangle ::= ( [ [ \langle ab \rangle ( [ \langle ab \rangle \langle d \rangle$$

A ( jel és a [ jel a tárgynyelv egy-egy szimbóluma.  $\langle ab \rangle$  és  $\langle d \rangle$  a metanyelv változói. Tegyük fel, hogy  $\langle d \rangle$  már definiálva van és  $\langle d \rangle$  lehetséges értékei a számjegyek. A fenti formula definiálja  $\langle ab \rangle$ -t. Eszerint  $\langle ab \rangle$  lehetséges értéke

vagy a ( szimbólum  
vagy akár a [ szimbólum  
vagy akár az  $\langle ab \rangle$  változónak egy a definíció szerint megengedett értéke  
és utána egy ( szimbólum  
vagy akár az  $\langle ab \rangle$  változónak egy a definíció szerint megengedett értéke  
és utána a  $\langle d \rangle$  változó egy megengedett értéke. Az  $\langle ab \rangle$  változónak lehetséges értékei például a következők:

```
(73 (( 4
[86 (( 2
[((( 1 (37(
(1 2 3(
(((
```

A definíció azonban nem engedi meg például a következőket:

```
(8 [4 ((
3 (((78
```

Hogy megkönnyítsük a metanyelvi változók megkülönböztetésére használt szimbólumok emlékezetben tartását, megnevezésükre olyan szavakat választottunk, amelyek *megközelítőleg* kifejezik az illető változó természetét. Amikor más helyen, szöveg között fordul elő egy ilyen szó, akkor is a megfelelő szintaktikus definícióval megszabott értelemben használjuk. Könnyebbség kedvéért egyes formulák több helyen is szerepelnek a szintaktikus leírásban.

Definíció:

$\langle \text{üres} \rangle ::=$

(vagyis az üres szimbólum-lánc).

## 2. Alapjelek, azonosítók, és idézetek. Alapfogalmak.

A hivatkozási nyelv a következő alapjелеkből épül fel:

$\langle \text{alapjel} \rangle ::= \langle \text{betű} \rangle \mid \langle \text{számjegy} \rangle \mid \langle \text{logikai érték} \rangle \mid \langle \text{elhatároló jel} \rangle$

### 2.1. BETŰK

$\langle \text{betű} \rangle ::= a|b|c|d|e|f|g|h|i|j|k|l|m|n|o|p|q|r|r|s|t|u|v|w|x|y|z|$

A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M|N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z

Ehhez az ábécéhez hozzávehetünk még tetszőleges más jeleket vagy el is hagyhatunk belőle jeleket, feltéve, hogy (az első esetben) a hozzávett jelek nem

azonosak valamely más alapjellel (számjeggyel, logikai értékkel vagy elhatároló jellel).

A betűknek nincsen önálló jelentésük, azonosítók és idézetek képzésére használjuk őket.<sup>10</sup> (Lásd 2.4. Azonosítók, 2.6. Idézetek).

### 2.2.1. SZÁMJEGYEK

$\langle \text{számjegy} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

A számjegyeket számok, azonosítók és idézetek képzésére használjuk.

### 2.2.2. LOGIKAI ÉRTÉKEK

$\langle \text{logikai érték} \rangle ::= \text{true} \mid \text{false}$

A logikai értékeknek rögzített jelentése van, a nyilvánvaló jelentés (igaz ill. hamis).

### 2.3. ELHATÁROLÓ JELEK

$\langle \text{elhatároló jel} \rangle ::= \langle \text{művelet jele} \rangle \mid \langle \text{elválasztójel} \rangle \mid \langle \text{zárójel} \rangle \mid$

$\langle \text{deklarátor jel} \rangle \mid \langle \text{specifikáló alapjel} \rangle$

$\langle \text{művelet jele} \rangle ::= \langle \text{aritmetikai művelet jele} \rangle \mid \langle \text{reláció jele} \rangle \mid$

$\langle \text{logikai művelet jele} \rangle \mid \langle \text{vezérlőjel} \rangle$

$\langle \text{aritmetikai művelet jele} \rangle ::= + \mid - \mid \times \mid / \mid \div \mid \uparrow$

$\langle \text{reláció jele} \rangle ::= < \mid \leq \mid = \mid \geq \mid > \mid \neq$

$\langle \text{logikai művelet jele} \rangle ::= \equiv \mid \supset \mid \vee \mid \wedge \mid \neg$

$\langle \text{vezérlőjel} \rangle ::= \text{go to} \mid \text{if} \mid \text{then} \mid \text{else} \mid \text{for} \mid \text{do}^{11}$

$\langle \text{elválasztójel} \rangle ::= , \mid . \mid _{10} \mid : \mid ; \mid := \mid \sqsubset \mid \text{step} \mid \text{until} \mid \text{while} \mid \text{comment}$

$\langle \text{zárójel} \rangle ::= ( \mid ) \mid [ \mid ] \mid ' \mid ' \mid \text{begin} \mid \text{end}$

$\langle \text{deklarátor jel} \rangle ::= \text{own} \mid \text{Boolean} \mid \text{integer} \mid \text{real} \mid \text{array} \mid \text{switch} \mid \text{procedure}$

$\langle \text{specifikáló alapjel} \rangle ::= \text{string} \mid \text{label} \mid \text{value}$

Az elhatároló jeleknek rögzített jelentésük van. Ez a jelentés a legtöbbjükénél nyilvánvaló, a többinek pedig a megfelelő helyen megadjuk a jelentését.

<sup>10</sup> A hivatkozási nyelvben önálló alapjellként szerepelnek bizonyos szavak. (Lásd 2.2.2. és 2.3.) Ezeknek az alapjeleknek betűsorozatokból álló más objektumoktól való megkülönböztetésére az alapjellként használt szavakat *aláhúzzuk*. Ezzel azt jelöljük, hogy az aláhúzott betűcsoport semmilyen összefüggésben sincsen azokkal az egyes betűkkel, amelyekből áll. Nyomdatechnikailag sokszorosított ALGOL-szövegekben megengedett az alapjellként használt szavaknak aláhúzás helyett *vastagbetűs szedéssel* való megkülönböztetése. Ekkor azonban ALGOL-szövegeken belül a vastagbetűs szedés más célra nem használható. (Fordító megjegyzése.)

<sup>11</sup> A *do* jel a ciklusutasításokban használatos. Semmi kapcsolata sincs az előzetes jelentésben szereplő *do*-val, amelyet nem vettünk fel az ALGOL 60 nyelvbe.



Az olyan tipográfiai sajátosságoknak, mint amilyen a szóköz vagy új sor kezdése, a hivatkozási nyelvben semmiféle jelentésük sincsen, ilyesmik azonban szabadon használhatók az olvasás megkönnyítésére.

Avégett, hogy a program jelei közé tetszőleges szövegeket is felvehessünk, a következő megállapodásokat tesszük az ilyen „kommentárookra” vonatkozólag:

*Az alapjelek következő sorozata:*

*egyenértékű a következővel:*

<b>;</b> <b>comment</b> <bármilyen jelsorozat, amely nem tartalmazza a ; jelet>	;
<b>begin comment</b> <bármilyen jelsorozat, amely nem tartalmazza a ; jelet>	<b>begin</b>
<b>end</b> <bármilyen jelsorozat, amely nem tartalmaz sem <i>end</i> , sem <i>else</i> , sem ; jelet>	<b>end</b>

Egyenértékűség itt azt jelenti, hogy a jobboldali oszlopban szereplő három szimbólum bármelyike, bármely előfordulásában — az idézeteket kivéve — helyettesíthető tetszőleges olyan jelsorozattal, amelynek szerkezete a baloldali oszlop megfelelő sorában van megadva, ez a helyettesítés azonban a program végrehajtására semilyen befolyással sincsen.

## 2.4. AZONOSÍTÓK.

### 2.4.1. Szintaktikus definíció

<azonosító> ::= <betű> | <azonosító> <betű> | <azonosító> <számjegy>

### 2.4.2. Példák

q

nap

V17a

TU 104 súlya

MARGIT

### 2.4.3. Szemantikus definíció.

Az azonosítóknak nincs egyszer s mindenkorra rögzített jelentésük. Skaláris változók, tömbök, címkek, kapcsolók és eljárások azonosítására szolgálnak és tetszés szerint választhatjuk meg őket. (Mindamellett lásd a 3.2.4. Szabványos függvények fejezetet.)

Ugyanaz az azonosító nem szolgálhat két különböző mennyiség megjelölésére, csak abban az esetben, ha a programban szereplő deklarációk szerint különböző hatáskörük van. (Lásd a 2.7. Mennyiségek, kategóriák és hatáskörök, valamint az 5. Deklarációk c. fejezetet.)



## 2.5. SZÁMOK

### 2.5.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{természetes szám} \rangle ::= \langle \text{számjegy} \rangle \mid \langle \text{természetes szám} \rangle \langle \text{számjegy} \rangle$   
 $\langle \text{egész szám} \rangle ::= \langle \text{természetes szám} \rangle \mid + \langle \text{természetes szám} \rangle \mid$   
 $\quad - \langle \text{természetes szám} \rangle$   
 $\langle \text{valódi tizedestört} \rangle ::= . \langle \text{természetes szám} \rangle$   
 $\langle \text{kitevő rész} \rangle ::= {}_{10} \langle \text{egész szám} \rangle$   
 $\langle \text{tizedesszám} \rangle ::= \langle \text{természetes szám} \rangle \mid \langle \text{valódi tizedestört} \rangle \mid$   
 $\quad \langle \text{természetes szám} \rangle \langle \text{valódi tizedestört} \rangle$   
 $\langle \text{előjel nélküli szám} \rangle ::= \langle \text{tizedesszám} \rangle \mid \langle \text{kitevő rész} \rangle \mid$   
 $\quad \langle \text{tizedesszám} \rangle \langle \text{kitevő rész} \rangle$   
 $\langle \text{szám} \rangle ::= \langle \text{előjel nélküli szám} \rangle \mid + \langle \text{előjel nélküli szám} \rangle \mid$   
 $\quad - \langle \text{előjel nélküli szám} \rangle$

### 2.5.2. Példák

0	—200.084	—.083 <sub>10</sub> —02
177	+07.43 <sub>10</sub> 8	— <sub>10</sub> 7
.5384	9.34 <sub>10</sub> +10	<sub>10</sub> —4
+0.7300	2 <sub>10</sub> —4	+ <sub>10</sub> +5

### 2.5.3. Szemantikus definíció

A tizedes számok jelentése a szokásos. A kitevő rész tíznek egy egész kitevős hatványaként megadott skálatényező.

### 2.5.4. Típusok

Az egész számok típusa **integer** (egész típusúak), az összes többi számoké **real** (valós). (Lásd az 5.1. Típusdeklaráció c. fejezetet).

## 2.6. IDÉZETEK

### 2.6.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{egyszerű idézet-mag} \rangle ::= \langle \text{alapjekekből álló tetszőleges olyan sorozat, amely nem tartalmaz sem ' sem ' jelet} \rangle \mid \langle \text{üres} \rangle$   
 $\langle \text{idézet-mag} \rangle ::= \langle \text{egyszerű idézet-mag} \rangle \mid ' \langle \text{idézet-mag} \rangle '$   
 $\quad \langle \text{idézet-mag} \rangle \langle \text{idézet-mag} \rangle$   
 $\langle \text{idézet} \rangle ::= ' \langle \text{idézet-mag} \rangle '$

### 2.6.2. Példák

'5k,,—'[[['^ = / : 'Tt"  
 '... Ez □ egy □ 'idézet'

### 2.6.3. Szemantikus definíció

Avégett, hogy a nyelvet alkalmassá tegyük az alapjelek tetszőleges sorozatának feldolgozására, bevezettük a ' ill. ' idézőjeleket. A  $\sqsubset$  szimbólum közt jelöl, ennek a jelnek idézeteken kívül nincs jelentése. Az idézetek bizonyos eljárások aktuális paramétereiként használhatók (lásd a 3.2. Függvénykifejezések c. és a 4.7. Eljárásutasítások c. fejezetet).

### 2.7. MENNYISÉGEK, KATEGÓRIÁK ÉS HATÁSKÖRÖK

A mennyiségek következő kategóriáit különböztetjük meg: skaláris változók, tömbök, címkek, kapcsolók és eljárások.

Egy mennyiség hatáskörét a következőképpen definiáljuk: A skaláris változók, tömbök, kapcsolók és eljárások hatásköre azon utasítások összessége, amelyekben a megfelelő mennyiség azonosítójára vonatkozó deklaráció érvényes, címkek számára pedig azoknak az utasításoknak az összessége, amelyeket (végrehajtásban) olyan utasítás követhet, amelyben az illető címke szerepel.

### 2.8. ÉRTÉKEK ÉS TÍPUSOK

Érték egy rendezett számhalmaz (speciális esetben egyetlen szám), vagy logikai értékek rendezett halmaza (speciális esetben egyetlen logikai érték), vagy egy címke.

A szintaktikus egységek közül némelyekhez értéket rendelünk. Általában ezek az értékek a program végrehajtása során változnak. A kifejezéseknek és elemeiknek az értékét a 3. fejezetben definiáljuk. Egy tömbnév értéke a megfelelő indexes változók értékeinek rendezett halmaza (lásd a 3.1.4.1. alfejezetet).

A különböző „típusok” (**integer**, **real**, **Boolean**) alapján véve értékek tulajdonságait jelölik.<sup>12</sup> A szintaktikus egységekhez tartozó típusok ezen egységek értékeire vonatkoznak.

## 3. Kifejezések

Az ALGOL nyelvben a számítási eljárásokat leíró programok fő alkotórészei az aritmetikai, a logikai és a helymegjelölő kifejezések. E kifejezések alkotó részei, — néhány elhatároló jeltől eltekintve — logikai értékek, számok, változók, függvénykifejezések, aritmetikai műveletek jelei, relációk jelei, logikai jelek és vezérlőjelek. Minthogy mind a változók, mind a függvénykifejezések szintaktikus definíciójában előfordul a kifejezés fogalma is, ezért a kifejezések és alkotórészeik definíciója szükségképpen rekurzív.

$$\langle \text{kifejezés} \rangle ::= \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle \mid \langle \text{logikai kifejezés} \rangle \mid \langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle$$

### 3.1. VÁLTOZÓK

#### 3.1.1. Szintaktikus definíció

$$\begin{aligned} \langle \text{változónév} \rangle &::= \langle \text{azonosító} \rangle \\ \langle \text{skaláris változó} \rangle &::= \langle \text{változónév} \rangle \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Az „integer-típusú”, „real-típusú”, „Boolean-típusú” kifejezés jelentése rendre : egész-típusú, valós-típusú, logikai-típusú. (A fordító megjegyzése.)



$\langle \text{indexkifejezés} \rangle ::= \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{indexlista} \rangle ::= \langle \text{indexkifejezés} \rangle | \langle \text{indexlista} \rangle, \langle \text{indexkifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{tömbnév} \rangle ::= \langle \text{azonosító} \rangle$   
 $\langle \text{indexes változó} \rangle ::= \langle \text{tömbnév} \rangle [ \langle \text{indexlista} \rangle ]$   
 $\langle \text{változó} \rangle ::= \langle \text{skaláris változó} \rangle | \langle \text{indexes változó} \rangle$

### 3.1.2. Példák

epsilon  
 det A  
 a 17  
 Q [7,2]  
 x [sin n  $\times$  pi/2, Q [3,n,4]]

### 3.1.3. Szemantikus definíció

A változó egy értéknek adott jelölés. Ezt az értéket felhasználhatjuk különböző kifejezésekben más értékek képzésére, továbbá tetszés szerint változtathatjuk „értékadó utasítások” segítségével. (Lásd a 4.2. Értékadó utasítások c. fejezetet). Az egyes változók értékeinek típusát abban a deklarációban adjuk meg, amely magára a változóra (lásd az 5.1. Típusdeklaráció c. fejezetet) vagy a megfelelő tömbnévre vonatkozik (lásd az 5.2. Tömbdeklaráció c. fejezetet).

### 3.1.4. Indexek

**3.1.4.1.** Az indexes változók olyan értékeket jelölnek, amelyek többdimenziós tömbök elemei (lásd az 5.2. Tömbdeklaráció c. fejezetet). Az indexlistában szereplő minden egyes aritmetikai kifejezés az indexes változó egy-egy indexpozícióját foglalja el és így egy indexnek nevezzük. Az indexek teljes listáját szögletes „indexzárójelbe” [ ] foglaljuk. Azt, hogy egy indexes változó a megfelelő tömb melyik elemére vonatkozik, mindig az index aktuális értéke határozza meg (lásd a 3.3. Aritmetikai kifejezések c. fejezetet).

**3.1.4.2.** Minden indexpozíció úgy hat, mintha egész-típusú változó volna és az index kiszámítása azzal egyenértékű, mintha ennek a fiktív változónak adnánk értéket (lásd a 4.2.4. fejezetet). Az indexes változó értéke csak akkor van definiálva, ha az indexkifejezések értéke a tömb megfelelő indexkorlátai közé esik (lásd az 5.2. Tömbdeklaráció c. fejezetet).

## 3.2. FÜGGVÉNYKIFEJEZÉSEK

### 3.2.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{eljárásnév} \rangle ::= \langle \text{azonosító} \rangle$   
 $\langle \text{aktuális paraméter} \rangle ::= \langle \text{idézet} \rangle | \langle \text{kifejezés} \rangle | \langle \text{tömbnév} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{kapcsolónév} \rangle | \langle \text{eljárásnév} \rangle$   
 $\langle \text{szó} \rangle ::= \langle \text{betű} \rangle | \langle \text{szó} \rangle \langle \text{betű} \rangle$   
 $\langle \text{paraméterelválasztó jel} \rangle ::= , | ) \langle \text{szó} \rangle :$



$\langle \text{aktuális paraméter-lista} \rangle ::= \langle \text{aktuális paraméter} \rangle |$   
 $\langle \text{aktuális paraméter} \rangle \langle \text{paraméterelválasztó jel} \rangle \langle \text{aktuális paraméter} \rangle$   
 $\langle \text{aktuális paraméter-rész} \rangle ::= \langle \text{üres} \rangle | ( \langle \text{aktuális paraméter-lista} \rangle )$   
 $\langle \text{függvénykifejezés} \rangle ::= \langle \text{eljárásnév} \rangle \langle \text{aktuális paraméter-rész} \rangle$

### 3.2.2. Példák

$\sin(a-b)$

$J(v + s, n)$

$R$

$S(s-5)$  Hőmérséklet: (T) Nyomás: (P)

Keresd ki (' : =') Tárol: (Q)

### 3.2.3. Szemantikus definíció

A függvénykifejezések meghatározott numerikus vagy logikai értéket definiálnak, amely a megfelelő eljárásdeklaráció által adott szabályoknak (lásd az 5.4. Eljárásdeklaráció c. fejezetet) az aktuális paraméterek megadott halmazára való alkalmazásával adódik. Azokat a szabályokat, amelyek az aktuális paraméterek megadására vonatkoznak, a 4.7. Eljárásutasítások c. fejezetben adjuk meg. Nem minden eljárás definiál szükségképpen függvénykifejezést (lásd az 5.4.4. Függvénykifejezések értéke c. fejezetet).

### 3.2.4. Szabványos függvények

Néhány azonosítót fenntarthatunk az analízis olyan gyakran használt szabványos (standard) függvényei számára, amelyeket eljárás formájában gondolunk megadva. Ajánljuk, hogy a fenntartott lista tartalmazza a következőket:

$\text{abs}(K)$	a $K$ kifejezés abszolút értéke számára
$\text{sign}(K)$	a $K$ értékének előjele számára (+1, ha $K > 0$ ; -1, ha $K < 0$ ; 0, ha $K = 0$ ).
$\text{sqrt}(K)$	a $K$ kifejezés értékének négyzetgyöke számára
$\sin(K)$	a $K$ értékének szinusza számára
$\cos(K)$	a $K$ értékének koszinusza számára
$\arctan(K)$	a $K$ arkusztangensének főértéke számára
$\ln(K)$	a $K$ természetes logaritmusa számára
$\exp(K)$	a $K$ exponenciális függvénye számára.

Ezeket a függvényeket úgy tekintjük, hogy egyaránt alkalmazhatók akár egész típusú, akár valós típusú argumentum esetében. Mindegyikük valós típusú eredményt szolgáltat, a  $\text{sign } K$  függvényt kivéve, amelynek értéke mindig egész típusú. Egyes speciális reprezentációkban előfordulhat, hogy ezek a függvények explicit deklarálás nélkül is felhasználhatók (lásd az 5. Deklarációk c. fejezetet).

### 3.2.5. Átalakító függvények

Bármely mennyiség- vagy kifejezéspár között definiálhatunk átalakító függvényeket. Ajánljuk, hogy egyikük a szabványos függvények között is előforduljon, mégpedig az entier (K)

függvény, amely egy valós típusú kifejezést egész típusúba alakít át és annak a legnagyobb egész számnak az értékét rendeli hozzá, amely nem nagyobb, mint a K kifejezés értéke.

## 3.3. ARITMETIKAI KIFEJEZÉSEK

### 3.3.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{additív művelet jele} \rangle ::= + \mid -$   
 $\langle \text{multiplikatív művelet jele} \rangle ::= \times \mid / \mid +$   
 $\langle \text{elsődleges kifejezés} \rangle ::= \langle \text{előjel nélküli szám} \rangle \mid \langle \text{változó} \rangle \mid$   
 $\quad \langle \text{függvénykifejezés} \rangle \mid \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{tényező} \rangle ::= \langle \text{elsődleges kifejezés} \rangle \mid \langle \text{tényező} \rangle \uparrow \langle \text{elsődleges kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{tag} \rangle ::= \langle \text{tényező} \rangle \mid \langle \text{tag} \rangle \langle \text{multiplikatív művelet jele} \rangle \langle \text{tényező} \rangle$   
 $\langle \text{feltétlen aritmetikai kifejezés} \rangle ::= \langle \text{tag} \rangle \mid \langle \text{additív művelet jele} \rangle \langle \text{tag} \rangle \mid$   
 $\quad \langle \text{feltétlen aritmetikai kifejezés} \rangle \langle \text{additív művelet jele} \rangle \langle \text{tag} \rangle$   
 $\langle \text{feltétel-rész} \rangle ::= \text{if } \langle \text{logikai kifejezés} \rangle \text{ then}$   
 $\langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle ::= \langle \text{feltétlen aritmetikai kifejezés} \rangle \mid \langle \text{feltétel-rész} \rangle$   
 $\quad \langle \text{feltétlen aritmetikai kifejezés} \rangle \text{ else } \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle$

### 3.3.2. Példák

*Elsődleges kifejezések:*

$7.395_{10} - 8$   
 összeg  
 $w[i + 2, 8]$   
 $\cos(y + z \times 3)$   
 $(a - 3/y + vu \uparrow 8)$

*Tényezők:*

omega  
 összeg  $\uparrow \cos(y + z \times 3)$   
 $7.394_{10} - 8 \uparrow w[i + 2, 8] \uparrow (a - 3/y + vu \uparrow 8)$

*Tagok:*

U  
 omega  $\times$  összeg  $\uparrow \cos(y + z \times 3) / 7.394_{10} - 8 \uparrow$   
 $w[i + 2, 8] \uparrow (a - 3/y + vu - 8)$

*Feltétlen aritmetikai kifejezés:*

U—Yu + omega  $\times$  összeg  $\uparrow \cos(y + z \times 3) / 7.394_{10} - 8$   
 $\uparrow w[i + 2, 8] \uparrow (a - 3/y + vu - 8)$



*Aritmetikai kifejezések:*

$w \times u - Q(S + Cu) \uparrow 2$   
**if**  $q > 0$  **then**  $S + 3 \times Q/A$  **else**  $2 \times S + 3 \times q$   
**if**  $a < 0$  **then**  $U + V$  **else if**  $a \times b > 17$  **then**  $U/V$  **else**  
     **if**  $k \neq y$  **then**  $V/U$  **else** 0  
 $a \times \sin(\text{omega} \times t)$   
 $0.57_{10} 12 \times a [N \times (N-1) / 2, 0]$   
 $(A \times \arctan(y) + z) \uparrow (7 + Q)$   
**if**  $q$  **then**  $n-1$  **else**  $n$   
**if**  $a < 0$  **then**  $A/B$  **else if**  $b=0$  **then**  $B/A$  **else**  $z$

**3.3.3. Szemantikus definíció**

Az aritmetikai kifejezés egy numerikus érték kiszámításának szabályát jelenti. A feltétlen aritmetikai kifejezések esetében ezt az értéket úgy kapjuk meg, hogy a kifejezésben szereplő elsődleges kifejezések aktuális numerikus értékein elvégezzük a kijelölt aritmetikai műveleteket (lásd részletesebben a 3.3.4. fejezetben).

Egy elsődleges kifejezés aktuális numerikus értéke nyilvánvaló, ha az egy szám. Változók esetében a szóban forgó numerikus érték a *pillanatnyi* érték (amelyet a szó dinamikus értelmében *utoljára* kapott), függvénykifejezések esetében pedig az az érték, amely a megfelelő eljárásdeklaráció által definiált számítási szabályoknak a kifejezésben megadott aktuális paraméterek pillanatnyi értékeire való alkalmazásával adódik (lásd az 5.4. Eljárásdeklaráció c. fejezetet). Végül, egy zárójelbe foglalt aritmetikai kifejezés értékét rekurzív elemzés útján kell kiszámítani a másik három fajta elsődleges kifejezés értékei segítségével.

Az általánosabb aritmetikai kifejezések feltételeket is tartalmaznak. Az ezekben szereplő logikai kifejezések (lásd a 3.4. Logikai kifejezések) aktuális értékei alapján az általános aritmetikai kifejezésben előforduló különböző feltétlen aritmetikai kifejezések közül egyet kell kiválasztani. A kiválasztás a következő módon történik: balról jobbra haladva egymás után kiszámítjuk a feltételekben szereplő logikai kifejezések értékét, mindaddig, amíg **true** (igaz) értékét nem találunk, és akkor az egész aritmetikai kifejezés értéke egyenlő lesz az első olyan aritmetikai kifejezés értékével, amelyik ez után a logikai kifejezés után áll. (A *legghosszabb*, e helyen található aritmetikai kifejezést kell számításba vennünk.) Az

**else** <feltétlen aritmetikai kifejezés>

szerkezet pedig egyenértékű az

**else if true then** <feltétlen aritmetikai kifejezés>

szerkezettel.

Példaképpen tekintsük a következő aritmetikai kifejezést:

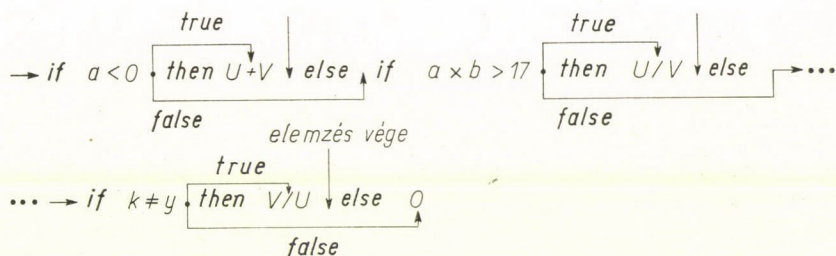
**if**  $a < 0$  **then**  $U + V$  **else if**  $a \times b > 17$  **then**  $U/V$  **else if**  $k \neq y$  **then**  $V/U$  **else** 0

Nevezzük ezt az aritmetikai kifejezést rövidség kedvéért K-nak. Feltesszük, hogy a K kifejezésben szereplő változók pillanatnyi értéke ismert. A K kifeje-



zésben négy feltétlen aritmetikai kifejezés szerepel:  $U + V$ ,  $U/V$ ,  $V/U$ , és  $0$ , e négy kifejezés általában négy különböző értéke közül az egyik és csak az egyik lesz **K** értéke, és hogy melyik lesz, azt a feltételekben szereplő logikai kifejezések értéke dönti el. Ha  $a < 0$ , vagy másszóval, ha az  $a < 0$  logikai kifejezés **true** (igaz) értékű, akkor **K** értéke  $U + V$  értékével lesz egyenlő. Ha  $a < 0$  nem igaz, vagyis **false** értékű, akkor meg kell néznünk, hogy az **else** elhatároló jel után mi áll. A jelen esetben az **else** után álló leghosszabb aritmetikai kifejezés újból egy (általános, feltételes) kifejezés. Ki kell tehát számítani ennek az utóbbinak feltétel-részében levő  $a \times b > 17$  logikai kifejezés értékét. Ha ez az érték **true**, akkor **K** értéke  $U/V$  értékével egyenlő, ha pedig **false**, akkor újból az **else** után álló kifejezés vizsgálendő. Így tehát, az előbbi mintára, ha  $k \neq y$  ( $a \neq y$  értéke **true**), akkor **K** értéke  $V/U$  értéke, ha pedig  $k = y$  ( $a \neq y$  értéke **false**), akkor az **else** utáni kifejezés vizsgálendő. Most, utoljára, az **else** elhatároló jel után **feltétlen** aritmetikai kifejezés áll, mégpedig egy szám, a nulla. Ez a szerkezetet a szemantikus definíció utolsó megjegyzése szerint egyenértékű az **else if true then 0** szerkezettel, másszóval, ha az **else** után feltétlen aritmetikai kifejezés áll, és az elemzés egészen odáig eljut, mert egyetlen logikai kifejezés sem volt **true** értékű, akkor **K** értéke ennek az utolsó, feltétlen aritmetikai kifejezésnek értékével lesz egyenlő, tehát a jelen példában nulla.

Az elemzés menetét szemléltetik az alábbi ábra nyilai:



### 3.3.4. Műveleti jelek és típusok

A feltétel-részekben szereplő logikai kifejezésektől eltekintve a feltétlen aritmetikai kifejezések alkotórészeinek valós- vagy egész-típusúaknak kell lenniük (lásd az 5.1. Típus-deklaráció c. fejezetet). Az alaplóműveletek jeleinek a jelentését és azoknak a kifejezéseknek a típusát, amelyeket ezek segítségével nyerhetünk, az alább következő szabályok adják meg.

**3.3.4.1.** A  $+$ , a  $-$ , ill. a  $\times$  műveleti jelek jelentése, mint szokásos, az összeadás, a kivonás ill. a szorzás művelete. A kifejezés egész-típusú lesz akkor, ha mindkét operandus egész-típusú, minden más esetben valós-típusú.

**3.3.4.2.** A  $\langle \text{tag} \rangle / \langle \text{tényező} \rangle$  ill.  $\langle \text{tag} \rangle \div \langle \text{tényező} \rangle$  szerkezetű műveletek mindketten osztást jelentenek, mégpedig a tagnak a tényező reciprokával való szorzása értelmében, figyelembe véve az elsőbbségi szabályokat (lásd a 3.3.5. fejezetet). Így pl.

$$a/b \times 7/(p-q) \times v/s$$

jelentése

$$((((a \times (b^{-1})) \times 7) \times ((p-q)^{-1})) \times v) \times (s^{-1}))$$

$A$  / műveleti jel az egész és valós típusok mind a négy lehetséges kombinációjára értelmezve van és *mindig* valós típusú eredményt szolgáltat.  $A \div$  műveleti jel (aritmetikai osztás jele) csak egész-típusú operandusokra van értelmezve és egész-típusú eredményt ad, még pedig a következőt:

$$a \div b = \text{sign}(a/b) \times \text{entier}(\text{abs}(a/b))$$

(lásd a 3.2.4. és a 3.2.5. fejezetet).

**3.3.4.3.** A  $\langle$ tényező $\rangle \uparrow \langle$ elsődleges kifejezés $\rangle$ -szerkezetű művelet hatványozást jelent, amelyben a  $\langle$ tényező $\rangle$  az alap, az  $\langle$ elsődleges kifejezés $\rangle$  pedig a kitevő. Így például

$2 \uparrow n \uparrow k$  jelentése  $(2^n)^k$ , míg

$2 \uparrow (n \uparrow k)$  jelentése viszont  $2^{n^k}$ .

Jelöljünk  $i$ -vel egy egész-típusú,  $r$ -rel egy valós-típusú és  $a$ -val egy akár egész-, akár valós-típusú számot. Az eredményt és típusát az alábbi szabályok szerint kapjuk:

$a \uparrow i$ . Ha  $i > 0$ :  $a \times a \times a \times \dots \times a$  ( $i$ -szer); az eredmény  $a$  típusával egyező típusú.

Ha  $i = 0$  és ha  $a \neq 0$ : 1;  $a$ -val egyező típusú.

Ha  $i = 0$  és ha  $a = 0$ : nincs értelmezve

Ha  $i < 0$  és ha  $a \neq 0$ :  $1/(a \times a \times \dots \times a)$ ,

(A nevezőben  $i$  számú tényező van); az eredmény valós-típusú.

Ha  $i < 0$  és ha  $a = 0$ : nincs értelmezve.

$a \uparrow r$ . Ha  $a > 0$ :  $\exp(r \times \ln(a))$ ; az eredmény valós-típusú.

Ha  $a = 0$  és ha  $r > 0$ : 0.0; az eredmény valós-típusú.

Ha  $a = 0$  és ha  $r \leq 0$ : nincs értelmezve.

Ha  $a < 0$ : semmilyen kitevővel sincs értelmezve.

### 3.3.5. A műveletek elsőbbségi szabályai

Egy kifejezésben szereplő műveletek végrehajtása általában balról jobbra halad, azonban figyelembe kell venni az alábbi kiegészítő szabályokat:

**3.3.5.1.** A 3.3.1. fejezetben adott szintaktikus definíciók szerint a következő elsőbbségi szabályok érvényesek:

első a hatványozás:  $\uparrow$

második a multiplikatív művelet:  $\times$ ,  $/$ , vagy  $\div$ ,

harmadik az additív művelet:  $+$  vagy  $-$ .

**3.3.5.2.** Valamely kezdő zárójel és a megfelelő végzárójel között levő kifejezés külön számítandó ki és ezt az értéket használjuk fel a további számításokhoz. E szabály alapján valamely kifejezésben az egyes műveletek végrehajtásának sorrendjét megfelelően elhelyezett zárójelek segítségével tetszőlegesen szabhatjuk meg.



### 3.3.6. Valós mennyiségek aritmetikája

A valós típusú számokat és változókat a numerikus analízis értelmében vegyük, vagyis úgy, hogy értékük szükségképpen csak korlátozott pontossággal tekinthető definiáltnak. Ugyancsak ide értendő, hogy egyaritmetikai kifejezés kiszámított értéke bizonyos mértékben eltérhet az exakt matematikai értéktől. Nem adjuk meg azonban pontosan a követendő aritmetikai számítás-módot,<sup>13</sup> és ezt úgy értjük, hogy különböző gépi reprezentánsok különböző módon számíthatják ki egy és ugyanannak az aritmetikai kifejezésnek értékét. A pontatlanságok következményeit a numerikus analízis módszereivel kell számon tartani. Ez az ellenőrzés a leírandó eljárás részét kell, hogy képezze és ugyancsak az algoritmikus nyelv segítségével fejezendő ki.

## 3.4. LOGIKAI KIFEJEZÉSEK

### 3.4.1. Szintaktikus definíció<sup>14</sup>

$\langle \text{reláció jele} \rangle ::= < | \leq | = | \geq | > | \neq$   
 $\langle \text{reláció} \rangle ::= \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle \langle \text{reláció jele} \rangle \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{elsődleges logikai kifejezés} \rangle ::= \langle \text{logikai érték} \rangle | \langle \text{változó} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{függvénykifejezés} \rangle | \langle \text{reláció} \rangle | ( \langle \text{logikai kifejezés} \rangle )$   
 $\langle \text{logikai tényező} \rangle ::= \langle \text{elsődleges logikai kifejezés} \rangle |$   
 $\quad \neg \langle \text{elsődleges logikai kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{logikai tag} \rangle ::= \langle \text{logikai tényező} \rangle | \langle \text{logikai tag} \rangle \wedge \langle \text{logikai tényező} \rangle$   
 $\langle \text{diszjunktciós kifejezés} \rangle ::= \langle \text{logikai tag} \rangle | \langle \text{diszjunktciós kifejezés} \rangle \vee$   
 $\quad \langle \text{logikai tag} \rangle$   
 $\langle \text{implikációs kifejezés} \rangle ::= \langle \text{diszjunktciós kifejezés} \rangle | \langle \text{implikációs kifejezés} \rangle$   
 $\quad \supset \langle \text{diszjunktciós kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{feltétlen logikai kifejezés} \rangle ::= \langle \text{implikációs kifejezés} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{feltétlen logikai kifejezés} \rangle \equiv \langle \text{implikációs kifejezés} \rangle$   
 $\langle \text{logikai kifejezés} \rangle ::= \langle \text{feltétlen logikai kifejezés} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{feltétel-rész} \rangle \langle \text{feltétlen logikai kifejezés} \rangle \text{ else } \langle \text{logikai kifejezés} \rangle$

### 3.4.2. Példák

$x = -2$   
 $Y > V \vee z < Q$   
 $a + b > -5 \wedge z - d > q \uparrow 2$   
 $p \wedge q \vee x \neq y$

<sup>13</sup> Tehát az ALGOL nyelven leírt eljárás nem rögzíti pl. azt, hogy valós típusú változók értékét hány értékes jegynyi pontossággal kell megadnunk vagy más változók értékéből kiszámítanunk. (A fordító megjegyzése.)

<sup>14</sup> Itt az egyes szintaktikus egységek magyar megnevezésének rendszerében erősen eltértünk attól a rendszertől, amely a megfelelő angol kifejezések magyar fordításából adódnék, amint ez a tárgymutatóból is látható, ahol a különböző szintaktikus egységek angol megnevezése is megvan. Ez az eltérés azért látszik indokoltnak, mert az angol megnevezések egyrészt nem fedik a matematikai logikában szokásos szóhasználatot, másrészt nem illeszkednek az aritmetikai kifejezéseknél alkalmazott megnevezés-rendszerhez sem. (A fordító megjegyzése.)



$g \equiv \neg a \wedge b \wedge \neg c \vee d \vee e \supset \neg f$   
**if**  $k < 1$  **then**  $s > w$  **else**  $h \leq c$   
**if if** **if**  $a$  **then**  $b$  **else**  $c$  **then**  $d$  **else**  $f$  **then**  $g$  **else**  $h < k$

### 3.4.3. Szemantikus definíció

A logikai kifejezések mindegyike egy logikai érték meghatározására szolgáló szabályt jelent. A kiszámítási szabályok alapelve hasonló az aritmetikai kifejezések számára a 3.3.3. fejezetben megadott szabályokéhoz. Példaképpen tekintsük a következő logikai kifejezést:

**if if**  $a$  **then**  $b$  **else**  $c$  **then**  $d$  **else**  $f$  **then**  $g$  **else**  $h < k$

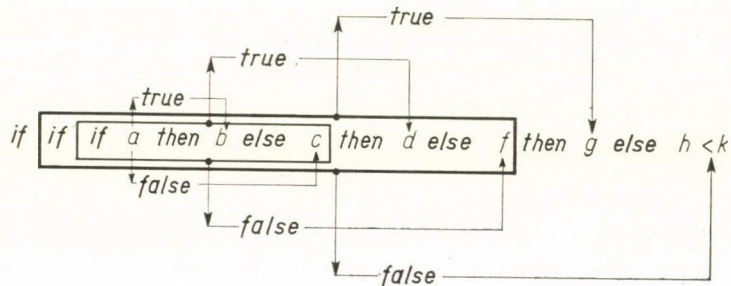
Feltesszük, hogy az  $a, b, c, d, f, g$  logikai változók és a  $h < k$  logikai kifejezés (reláció) pillanatnyi értéke ismert. Jelöljük rövidség kedvéért  $L$ -lel a példának választott logikai kifejezést. Az első **if** mutatja, hogy  $L$  általános, feltételes kifejezés, mert egy feltétel-résszel kezdődik. A feltétel:

**if if**  $a$  **then**  $b$  **else**  $c$  **then**  $d$  **else**  $f$ ,

tehát  $L$  értéke  $g$  értékével vagy pedig  $h < k$  értékével lesz egyenlő, aszerint, amint a feltétel értéke **true** vagy pedig **false**. A feltétel, mint látható, újból általános, feltételes logikai kifejezés, amelynek feltétel-részeiben az

**if**  $a$  **then**  $b$  **else**  $c$

feltétel szerepel. Ennek a feltételnek logikai értékét kell először kiszámítanunk és ez az érték  $b$  értékével vagy pedig  $c$  értékével lesz egyenlő, aszerint, amint  $a$  értéke **true** ill. **false**. Miután ez utóbbi feltétel értékét kiszámítottuk, az előbbi (összetettebb) feltétel értékének kiszámítása következik és ennek pillanatnyi értéke dönt végül arról is, hogy  $L$  értéke  $g$  értékével vagy  $h < k$  értékével lesz-e egyenlő. Ezt a felépítést illusztrálja a következő ábra:



### 3.4.4. Típusok

Azokat a változókat és függvénykifejezéseket, amelyek elsődleges logikai kifejezésekként szerepelnek, logikai típusúaknak (**Boolean**) kell deklarálnunk (lásd az 5.1. Típus-deklaráció és az 5.4.4. Függvénykifejezések értéke c. fejezetet).

### 3.4.5. A műveletek jelei

A relációk a **true** (igaz) értéket veszik fel, ha a megfelelő reláció a benne szereplő kifejezésekre teljesül, ellenkező esetben pedig a **false** (hamis) értéket.

A  $\neg$  (nem),  $\wedge$  (és),  $\vee$  (vagy),  $\supset$  (implikáció) és  $\equiv$  (ekvivalencia) logikai jelek jelentését a következő művelet-táblázat mutatja:

L 1	false	false	true	true
L 2	false	true	false	true
$\neg$ L 1	true	true	false	false
L 1 $\wedge$ L 2	false	false	false	true
L 1 $\vee$ L 2	false	true	true	true
L 1 $\supset$ L 2	true	true	false	true
L 1 $\equiv$ L 2	true	false	false	true

### 3.4.6. A műveletek elsőbbségi szabályai

Egy logikai kifejezésben szereplő műveletek végrehajtása általában balról jobbra halad, figyelembe kell azonban venni az alábbi kiegészítő szabályokat:

**3.4.6.1.** A 3.4.1. fejezetben megadott szintaktikus definícióknak megfelelően a következő elsőbbségi szabályok érvényesek:

elsőek az aritmetikai kifejezések a 3.3.5. fejezet szerint

másodlagosak:  $<$ ,  $\leq$ ,  $=$ ,  $\geq$ ,  $>$ ,  $\neq$

harmadlagos:  $\neg$

negyedleges:  $\wedge$

ötödleges:  $\vee$

hatodlagos:  $\supset$

hetedleges:  $\equiv$

**3.4.6.2.** A zárójelek használata a 3.3.5.2. fejezetben mondottak szerint értendő.

## 3.5. HELYMEGJELÖLŐ KIFEJEZÉSEK

### 3.5.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{cimke} \rangle ::= \langle \text{azonosító} \rangle \mid \langle \text{természetes szám} \rangle$   
 $\langle \text{kapcsolónév} \rangle ::= \langle \text{azonosító} \rangle$   
 $\langle \text{kapcsolókifejezés} \rangle ::= \langle \text{kapcsolónév} \rangle [ \langle \text{indexkifejezés} \rangle ]$   
 $\langle \text{feltétlen helymegjelölő kifejezés} \rangle ::= \langle \text{cimke} \rangle \mid \langle \text{kapcsolókifejezés} \rangle \mid$   
 $( \langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle )$   
 $\langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle ::= \langle \text{feltétlen helymegjelölő kifejezés} \rangle \mid$   
 $\langle \text{feltételrész} \rangle \langle \text{feltétlen helymegjelölő kifejezés} \rangle \text{ else}$   
 $\langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle$

### 3.5.2. Példák

17

p 9

válassz [n—1]

város [if y < 0 then N else N—1]

if Ab < c then 17 else q [if w  $\leq$  0 then 2 else n]



### 3.5.3. Szemantikus definíció

Minden helymegjelölő kifejezés olyan szabályt jelent, amely egy utasítás címkéjének meghatározására szolgál (lásd a 4. Utasítások c. fejezetet). A kiszámítás alapelve ismét teljesen hasonló az aritmetikai kifejezésekéhez (lásd a 3.3.3. fejezetet). Az általános esetben a feltétel-részekben levő Boole-kifejezések értékrendszere egy feltétlen helymegjelölő kifejezést választ ki. Ha ez címke, akkor máris megvan a helymegjelölő kifejezés értéke, az eredmény. Ha pedig kapcsolókifejezés, akkor a megfelelő kapcsoló-deklarációra utal (lásd az 5.3. Kapcsoló deklaráció c. fejezetet) és a kapcsoló deklarációjában felsorolt helymegjelölő kifejezések közül egyet kiválaszt, mégpedig azt az egyet, amelynek a kapcsolólistán balról jobbfelé vett sorszáma megegyezik a kapcsolókifejezés indexkifejezésének pillanatnyi numerikus értékével. Minthogy az így kiválasztott helymegjelölő kifejezés ismét lehet egy további kapcsolókifejezés, azért ez a címkemeghatározási eljárás nyilván rekurzív.

### 3.5.4. Indexkifejezések

Az indexkifejezés értékének kiszámítása az indexes változók indexkifejezéseinek kiszámításához hasonlóan történik (lásd a 3.1.4.2. fejezetet).

Egy kapcsolókifejezés értéke csak abban az esetben van definiálva, ha a hozzátartozó indexkifejezés értéke az 1, 2, ..., n természetes számok valamelyikével egyenlő, ahol n a kapcsolólista elemeinek a száma.

### 3.5.5. Természetes számok mint címkék

Ha természetes számot használunk címkének, akkor a szám elején álló esetleges nullák nem befolyásolják a címke értékét, azaz pl. 00217 ugyanazt a címkét jelenti, mint 217.

## 4. Utasítások

Az algoritmikus nyelvben az operatív egységeket *utasításoknak* nevezzük. Ezeket az utasításokat általában abban a sorrendben kell végrehajtani, ahogy egymás után vannak írva, ezt a sorrendet azonban megváltoztathatják az *átírányító utasítások*, amelyek explicite megadják az utánuk következő utasítást, másrészt pedig a *feltételes utasítások*, amelyek bizonyos utasítások átugrását eredményezhetik.

Avégett, hogy az utasításoknak ezt a *dinamikus* sorrendjét meghatározzuk, egyes utasításokat címkékkel láthatunk el.

Mivel utasítássorozatokot *összetett utasításokba* és *blokkokba* foglalhatunk össze, az utasítások szintaktikus definíciója szükségképpen rekurzív. Továbbá, mivel a deklarációk, amelyeket az 5. fejezet ismertet, lényeges szerepet játszanak a szintaktikus szerkezetben, az utasítások szintaktikus definíciójában feltesszük, hogy a deklarációk már definiálva vannak.<sup>15</sup>

## 4.1. ÖSSZETETT UTASÍTÁSOK ÉS BLOKKOK

### 4.1.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{címkétlen alaputasítás} \rangle ::= \langle \text{értékadó utasítás} \rangle | \langle \text{átírányító utasítás} \rangle | \langle \text{üres utasítás} \rangle | \langle \text{eljárásutasítás} \rangle$

<sup>15</sup> Vagyis az utasítások és deklarációk fogalmát szimultán rekurzív definícióval kell megadni. (A fordító megjegyzése).



$\langle \text{alaputasítás} \rangle ::= \langle \text{cím nélküli alaputasítás} \rangle \mid \langle \text{címke} \rangle : \langle \text{alaputasítás} \rangle$   
 $\langle \text{feltétlen utasítás} \rangle ::= \langle \text{alaputasítás} \rangle \mid \langle \text{ciklusutasítás} \rangle \mid$   
 $\quad \langle \text{összetett utasítás} \rangle \mid \langle \text{blokk} \rangle$   
 $\langle \text{utasítás} \rangle ::= \langle \text{feltétlen utasítás} \rangle \mid \langle \text{feltételes utasítás} \rangle$   
 $\langle \text{összetett utasítás vége} \rangle ::= \langle \text{utasítás} \rangle \text{ end} \mid \langle \text{utasítás} \rangle ;$   
 $\quad \langle \text{összetett utasítás vége} \rangle$   
 $\langle \text{blokkfej} \rangle ::= \text{begin} \langle \text{deklaráció} \rangle \mid \langle \text{blokkfej} \rangle ; \langle \text{deklaráció} \rangle$   
 $\langle \text{cím nélküli összetett utasítás} \rangle ::= \text{begin} \langle \text{összetett utasítás vége} \rangle$   
 $\langle \text{cím nélküli blokk} \rangle ::= \langle \text{blokkfej} \rangle ; \langle \text{összetett utasítás vége} \rangle$   
 $\langle \text{összetett utasítás} \rangle ::= \langle \text{cím nélküli összetett utasítás} \rangle \mid$   
 $\quad \langle \text{címke} \rangle : \langle \text{összetett utasítás} \rangle$   
 $\langle \text{blokk} \rangle ::= \langle \text{cím nélküli blokk} \rangle \mid \langle \text{címke} \rangle : \langle \text{blokk} \rangle$

Ez a szintaktikus definíció következőképpen illusztrálható: Jelöljük tetszőleges (általában különböző) utasításokat U-val, deklarációkat D-vel, címkéket C-vel, akkor a fenti két főbb szintaktikus egységnek, az összetett utasításnak és a blokknak az alakja a következő lesz:

Összetett utasítás:

$C : C : \dots : C : \text{begin } U ; U ; \dots ; U \text{ end}$

blokk:

$C : C : \dots : C : \text{begin } D ; D ; \dots ; D ; U ; U \dots ; U \text{ end}$

Meg kell jegyeznünk, hogy minden U utasítás maga is összetett utasítás vagy blokk lehet.

#### 4.1.2. Példák

Alaputasítások:

$a := p + q$

**go to** Budapest

KEZDET : FOLYTATÁS :  $w := 7.993$

Összetett utasítás:

**begin**  $x := 0$  ; **for**  $y := 1$  **step** 1 **until**  $n$  **do**  $x := x + A[y]$  ;

**if**  $x < q$  **then go to** STOP **else if**  $x > w - 2$  **then go to** S ;

$Aw : St : W := x + \text{bob}$  **end**

Blokk:

Q: **begin integer**  $i, k$  ; **real**  $w$  ;

**for**  $i := 1$  **step** 1 **until**  $n$  **do**

**for**  $k := i + 1$  **step** 1 **until**  $m$  **do**

**begin**  $w := A[i, k]$  ;  $A[i, k] := A[k, i]$  ;

$A[k, i] := w$  **end**  $i$ -re és  $k$ -ra

**end** blokk Q

### 4.1.3. Szemantikus definíció

Minden egyes blokk automatikusan bevezet egy új jelölésrendszerszintet. Ez a következőképpen értendő: minden azonosítónak, amely a blokkon belül előfordul, megfelelő deklaráció útján (lásd az 5. deklarációk c. fejezetet) *lokális* (helyi) jelleget adhatunk az illető blokkra vonatkozólag, ami annyit jelent, hogy (a) a blokkon belül az ilyen azonosítóval megnevezett mennyiség a blokkon kívül nem létezik és (b) bármely mennyiség, amely ugyanezzel az azonosítóval van megnevezve a blokkon kívül, hozzáférhetetlen a blokk belsőjéből.

Az olyan azonosító (kivéve a címkék azonosítóit), amely szerepel egy blokkban, de nem vonatkozik rá e blokk deklarációinak egyike sem, nem-lokális jellegű erre a blokkra nézve, tehát ugyanazt a mennyiséget képviseli a blokkon belül is, amelyet a blokkon kívüli közvetlenül következő szinten. A címkék kivételt képeznek a mondott szabály alól: mindig lokális jellegűek arra a blokkra nézve, amelyben szerepelnek.

Mivel egy blokk bármely utasítása maga is újabb blokk lehet, a „lokális” és „nem-lokális” fogalmakat rekurzív módon értsük. Egy-egy azonosító, amelyik az A blokkra nézve nem lokális, lehet akár lokális, akár nem-lokális egy olyan B blokkra nézve, amelynek A egy utasítása.

## 4.2. ÉRTÉKADÓ UTASÍTÁSOK

### 4.2.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{baloldal} \rangle ::= \langle \text{változó} \rangle :=$

$\langle \text{baloldali változólista} \rangle ::= \langle \text{baloldal} \rangle | \langle \text{baloldali változólista} \rangle \langle \text{baloldal} \rangle$

$\langle \text{értékadó utasítás} \rangle ::= \langle \text{baloldali változólista} \rangle \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle |$   
 $\langle \text{baloldali változólista} \rangle \langle \text{logikai kifejezés} \rangle$

### 4.2.2. Példák

$S := p[0] := n := n + 1 + s$

$n := n + 1$

$A := B/c - v - q \times S$

$S[v, k + 2] := 3 - \arctan(s \times \text{zeta})$

$V := Q > Y \wedge Z$

### 4.2.3. Szemantikus definíció

Az értékadó utasítások arra szolgálnak, hogy egy vagy több változóhoz valamely kifejezés értékét rendeljék hozzá. Az általános esetben ez a hozzárendelési eljárás a következő három lépésben történik:

**4.2.3.1.** A baloldal változóiban szereplő esetleges indexkifejezések értékét balról jobbra haladva rendre kiszámítjuk.

**4.2.3.2.** Kiszámítjuk a baloldal utolsó  $:$  jele után álló kifejezés értékét.

**4.2.3.3.** E kifejezés értékét adjuk valamennyi, a baloldali változólistán szereplő változónak, indexes változó esetén a 4.2.3.1. lépésben kiszámított indexérték mellett.



#### 4.2.4. Típusok

A baloldali változólistán szereplő minden egyes változót azonos típusúnak kellett, hogy deklaráljunk. Ha a változók **Boolean** típusúak (logikai változók), akkor az értékadó utasításban szereplő kifejezésnek is logikai kifejezésnek kell lennie. Ha a változók valós- vagy egész-típusúak, akkor ez a kifejezés aritmetikai kifejezés kell, hogy legyen. Ha pedig ennek az aritmetikai kifejezésnek a típusa különbözik a változókétól, akkor az érték-hozzárendelésbe bele kell értenünk a megfelelő átalakító függvény automatikus behívását. A valós-típusról az egész-típusra való áttérést úgy kell értenünk, hogy a megfelelő átalakító függvény az

entier ( $K + 0.5$ )

eredményt szolgáltatja, ahol  $K$  a kifejezés értékét jelenti.

### 4.3. ÁTIRÁNYÍTÓ UTASÍTÁSOK

#### 4.3.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{átirányító utasítás} \rangle ::= \text{go to } \langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle$

#### 4.3.2. Példák

**go to** S

**go to** kijárat [ $n + 1$ ]

**go to** Város [**if**  $y < 0$  **then** N **else**  $N + 1$ ]

**go to if**  $Ab < c$  **then** 17 **else** q [**if**  $w < 0$  **then** 2 **else** n]

#### 4.3.3. Szemantikus definíció

Az átirányító utasítás megbontja az utasításoknak a felírásuk sorrendjében definiált sorrendjét, oly módon, hogy a benne szereplő helymegjelölő kifejezés értéke segítségével megadja a rákövetkező utasítást. E szerint a következő végrehajtandó utasítás az lesz, amelynek a címkéje megegyezik e helymegjelölő kifejezés értékével.

#### 4.3.4. Korlátozások

Mivel a címkék lokálisak, ezért az átirányító utasítások nem vezethetnek egy blokkon kívüli helyről a blokk belsejébe.

#### 4.3.5. Nem értelmezett értékű kapcsolókifejezéshez irányító utasítás.

Minden olyan átirányító utasítás, amelyben a helymegjelölő kifejezés egy definiálatlan értékű kapcsolókifejezés, egyenértékű az üres utasítással.

### 4.4. ÜRES UTASÍTÁSOK

#### 4.4.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{üres utasítás} \rangle ::= \langle \text{üres} \rangle$

#### 4.4.2. Példa

C: **begin** . . . ; János: **end**



#### 4.4.3. Szemantikus definíció

Az üres utasítás semilyen működést nem hajt végre. Felhasználható egy címke elhelyezésére.

#### 4.5. Feltételes utasítások

##### 4.5.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{feltétel-rész} \rangle ::= \text{if } \langle \text{logikai kifejezés} \rangle \text{ then}$   
 $\langle \text{feltétlen utasítás} \rangle ::= \langle \text{alaputasítás} \rangle \mid \langle \text{ciklusutasítás} \rangle \mid$   
 $\langle \text{összetett utasítás} \rangle \mid \langle \text{blokk} \rangle$   
 $\langle \text{feltételesen végrehajtandó utasítás} \rangle ::= \langle \text{feltétel-rész} \rangle$   
 $\langle \text{feltétlen utasítás} \rangle \mid \langle \text{címke} \rangle : \langle \text{feltételesen végrehajtandó utasítás} \rangle$   
 $\langle \text{feltételes utasítás} \rangle ::= \langle \text{feltételesen végrehajtandó utasítás} \rangle \mid$   
 $\langle \text{feltételesen végrehajtandó utasítás} \rangle \text{ else } \langle \text{utasítás} \rangle$

##### 4.5.2. Példák

**if**  $x > 0$  **then**  $n := n + 1$   
**if**  $v > u$  **then**  $V: q := n + m$  **else go to**  $R$   
**if**  $s < 0 \vee P \leq Q$  **then**  $AA: \text{begin}$  **if**  $q < v$  **then**  $a := v/s$  **else**  $y := 2 \times a$   
**end else if**  $v > s$  **then**  $a := v - q$  **else if**  $v > s - 1$  **then go to**  $S$

##### 4.5.3. Szemantikus definíció

A feltételes utasítások bizonyos utasítások végrehajtását vagy pedig az átugrását eredményezik, a bennük szereplő logikai kifejezések tényleges pillanatnyi értékeitől függően.

##### 4.5.3.1. Feltételesen végrehajtandó utasítás

A feltételesen végrehajtandó utasításban szereplő feltétlen utasítás végrehajtásra kerül, ha a feltételben szereplő logikai kifejezés értéke **true** (igaz), ellenkező esetben ennek az utasításnak végrehajtása kimarad és a következő utasítás jön sorra.

##### 4.5.3.2. Feltételes utasítás

A szintaktikus definíció szerint a feltételes utasítások kétféleképpen lehetnek, és a következőképpen illusztrálhatók:

**if**  $L_1$  **then**  $U_1$  **else if**  $L_2$  **then**  $U_2$  **else**  $U_3; U_4$ ,

illetőleg

**if**  $L_1$  **then**  $U_1$  **else if**  $L_2$  **then**  $U_2$  **else if**  $L_3$  **then**  $U_3; U_4$

Itt  $L_1, L_2$  és  $L_3$  logikai kifejezéseket,  $U_1, U_2, U_3$  pedig feltétlen utasításokat jelentenek.  $U_4$  a feltételes utasítást követő utasítás.

Egy feltételes utasítás végrehajtása a következőképpen írható le: A feltételekben szereplő logikai kifejezéseket balról jobbra haladva sorban kiszámítjuk, amíg csak egy **true** értékűt nem találunk. Az erre a logikai kifejezésre következő feltétlen utasítást végrehajtjuk. Ha ez az utasítás nem határozza meg explicite a rákövetkezőt, akkor a következő végrehajtandó utasítás az  $U_4$  lesz, vagyis az egész feltételes utasítást követő utasítás. Így azt mondhatjuk, hogy az **else** elhatároló jelnek az a hatása, hogy az előtte álló utasításra következő utasításként az egész feltételes utasítás után álló utasítást adja meg.

A következő szerkezet

**else** <feltétlen utasítás>

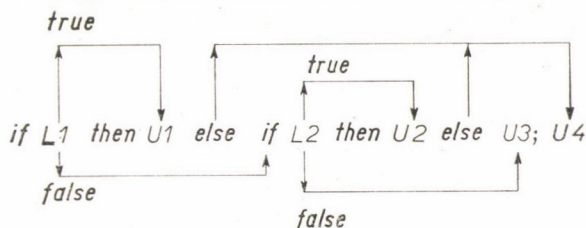
egyenértékű az

**else if true then** <feltétlen utasítás>

szerkezettel.

Ha a feltétel-részekben levő logikai kifejezések egyike sem **true** értékű, akkor az egész feltételes utasítás hatása annyi, mint az üres utasításé.

Szemléltetés céljából hasznos lehet az alábbi rajz:



#### 4.5.4. Átirányító utasítás egy feltételes utasítás belsejébe

Egy feltételes utasítás belsejébe irányító utasításnak a hatása az **else** elhatároló jel hatásáról mondottakból azonnal következik.

### 4.6. CIKLUSUTASÍTÁSOK

#### 4.6.1. Szintaktikus definíció

<cikluslista-elem> ::= <aritmetikai kifejezés> | <aritmetikai kifejezés> **step**  
 <aritmetikai kifejezés> **until** <aritmetikai kifejezés> |  
 <aritmetikai kifejezés> **while** <logikai kifejezés>

<cikluslista> ::= <cikluslista-elem> | <cikluslista>, <cikluslista-elem>

<cikluskezdet> ::= **for** <változó> := <cikluslista> **do**

<ciklusutasítás> ::= <cikluskezdet> <utasítás> | <cimke> : <ciklusutasítás>

#### 4.6.2. Példák

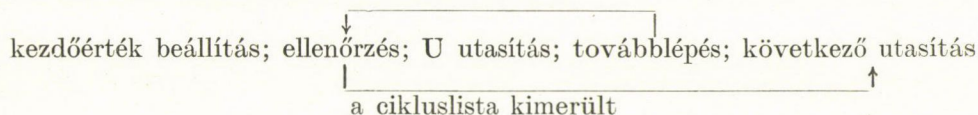
**for** q := 1 **step** s **until** n **do** A [q] := B [q]

**for** k := 1, V 1 × 2 **while** V 1 < N **do**

**for** j := I + G, L, 1 **step** 1 **until** N, C + D **do**  
 A [k, j] := B [k, j]

#### 4.6.3. Szemantikus definíció

A cikluskezdet az utána következő U utasításnak nullaszeros vagy többszöri végrehajtását írja elő. Ezenfelül a benne szereplő változónak (a továbbiakban: a ciklus paraméterének) különböző értékeket ad. Ez az eljárás a következő ábrával illusztrálható:





Ebben a szerkezetben a „kezdőérték beállítása” a cikluslista első elemének a ciklus paraméteréhez való hozzárendelését jelenti. A „tovább lépés” azt jelenti, hogy a paraméterhez a cikluslista következő elemének értékét rendeljük hozzá. Az „ellenőrzés” eldönti, hogy az ilyen módon kapott új érték a ciklus paramétere által felvehető értékek között van-e. Ha igen, akkor a cikluskezdet után álló utasítás végrehajtása, ha nem, akkor az egész ciklusutasítás után következő utasítás végrehajtása következik.

#### 4.6.4. A cikluslista-elemek.

A cikluslista egy szabályt ad meg a ciklus paraméterének sorra adandó értékek kiszámítására. Az értékeknek ez a sorozata a cikluslista elemeiből adódik oly módon, hogy egyenként, a leírásuk sorrendjében vesszük őket sorra. A cikluslista-elemek háromféle fajtája által előállított értéksorozatot, valamint az U utasítás megfelelő végrehajtását az alábbi szabályok adják meg.

##### 4.6.4.1. Aritmetikai kifejezés

Ez a cikluslista-elem egyetlen értéket határoz meg, mégpedig a kifejezésnek közvetlenül az U utasítás megfelelő végrehajtása előtt kiszámított értékét.

##### 4.6.4.2. A **step** és az **until** jeleket tartalmazó elemek

Az **A step B until C** alakú elemek hatása, ahol A, B és C aritmetikai kifejezések, legtömörebben más ALGOL-utasítások segítségével írható le, mégpedig:

$V := A$

**C 1 : if**  $(V - C) \times \text{sign}(B) > 0$  **then go to** Az elem kimerült;

U utasítás;

$V := V + B$ ; **go to** C1;

Itt V jelöli a cikluskezdetben szereplő ciklus-paramétert, „Az elem kimerült” pedig V értékének a cikluslista következő eleme alapján történő kiszámítására, vagy ha a vizsgált elem a lista utolsó eleme volt, akkor a program következő utasításának a végrehajtására utal.

##### 4.6.4.3. A **while** szót tartalmazó elemek

Az **E while F** alakú elemek hatása, ahol E aritmetikai, F pedig logikai kifejezés, tömören ugyancsak más ALGOL-utasítások felhasználásával írható le:

**C 3 : V := E;**

**if**  $\neg F$  **then go to** Az elem kimerült;

U utasítás;

**go to** C 3;

ahol a jelölések ugyanazok, mint a 4.6.4.2. alfejezetben.

##### 4.6.5. A ciklus paraméterének értéke a ciklusból való kilépéskor

Az U (összetettnek feltételezett) utasításból egy átirányító utasítás következtében való kilépéskor a ciklus paraméterének értéke ugyanaz lesz, mint közvetlenül az átirányító utasítás végrehajtása előtt volt.

Ha ellenben a kilépés a cikluslista kimerülése miatt történt, akkor a ciklus paraméterének értéke a kilépés után definiálatlan.



**4.6.6. Ciklusutasítás belsejébe irányító utasítás**

A ciklusutasításon kívülről egy a ciklusutasításon belül szereplő címke-re irányító utasítás nincs értelmezve.

**4.7. ELJÁRÁSUTASÍTÁSOK****4.7.1. Szintaktikus definíció**

$\langle \text{aktuális paraméter} \rangle ::= \langle \text{idézet} \rangle \mid \langle \text{kifejezés} \rangle \mid \langle \text{tömbnév} \rangle \mid$   
 $\langle \text{kapcsolónév} \rangle \mid \langle \text{eljárásnév} \rangle$   
 $\langle \text{szó} \rangle ::= \langle \text{betű} \rangle \mid \langle \text{szó} \rangle \langle \text{betű} \rangle$   
 $\langle \text{paraméterelválasztó jel} \rangle ::= , \mid \langle \text{szó} \rangle :$   
 $\langle \text{aktuális paraméter-lista} \rangle ::= \langle \text{aktuális paraméter} \rangle \mid$   
 $\langle \text{aktuális paraméterlista} \rangle \langle \text{paraméterelválasztó jel} \rangle \langle \text{aktuális paraméter} \rangle$   
 $\langle \text{aktuális paraméter-rész} \rangle ::= \langle \text{üres} \rangle \mid ( \langle \text{aktuális paraméter-lista} \rangle )$   
 $\langle \text{eljárásutasítás} \rangle ::= \langle \text{eljárásnév} \rangle \langle \text{aktuális paraméter-rész} \rangle$

**4.7.2. Példák**

Nyom (A) Rendszám: (7) Eredmény: (V)

Transzponálás (W,  $v + 1$ )

Absmax (A, N, M,  $Y_y$ , I, K)

Skálárszorzat (A [t, P, U], B [P], 10, P, Y)

**4.7.3. Szemantikus definíció**

Az eljárásutasítás egy eljárástörzs végrehajtását (a programba való behívását) eredményezi (lásd az 5.4. Eljárásdeklaráció c. fejezetet). Ha ez az eljárástörzs ALGOL-nyelven írt utasítás, akkor végrehajtása a következő műveleteknek a programon való elvégzésével lesz egyenértékű:

**4.7.3.1. Érték-hozzárendelés (értékkel való behívás)**

Minden formális paraméter, amely az eljárásdeklaráció fejének az érték-részában szerepel, a megfelelő aktuális paraméter értékét kapja (lásd a 2.8. Értékek és típusok c. fejezetet) és ezeket a hozzárendeléseket úgy tekintjük, mint amelyek explicite megtörténnek az eljárástörzsbe való belépés előtt. E formális paramétereket a továbbiakban az eljárás-törzsre nézve lokálisnak tekintjük.

**4.7.3.2. Név-helyettesítés (névvel való hívás)**

Minden olyan formális paramétert, amely az érték-részben nincs feltüntetve, az eljárástörzsben a megfelelő aktuális paraméterrel helyettesítünk, miután az utóbbit, ahol csak ezt a szintaktikus szabályok megengedik, zárójelbe tettük. Ezen eljárás során az eljárástörzsbe bekerülő és az eljárástörzsben már meglevő azonosítók közötti esetleges ütközéseket úgy küszöböljük ki, hogy szisztematikusan megváltoztatjuk az érintett formális vagy lokális azonosítókat.

**4.7.3.3. A törzs behelyettesítése és végrehajtása**

Végül a fentiek szerint módosított eljárástörzset az eljárásutasítás helyébe helyettesítjük és végrehajtjuk.

**4.7.4. Az aktuális paraméterek formális paramétereknek való megfeleltetése.**



Az eljárásutasítás paraméterlistájának mindenestre ugyanannyi elemet kell tartalmaznia, mint amennyi az eljárásdeklaráció fejében, a formális paraméterek listáján van. Azt, hogy valamely aktuális paraméter melyik formális paraméternek felel meg, a paraméterlistán való helyzete határozza meg: ahányadik helyen áll az aktuális paraméter a paraméter-listán, annyiadik formális paraméternek felel meg.

#### 4.7.5. Megszorítások

Ahhoz, hogy egy ilyen módon definiált eljárásutasításnak legyen értelme, nyilván szükséges, hogy azok a 4.7.3.1. ill. 4.7.3.2. alfejezetekben definiált műveletek, amelyeket az eljárástörzsen végrehajtunk, egy korrekt ALGOL-utasításra vezessenek.

Ez minden eljárásutasításra azt a megszorítást jelenti, hogy az aktuális paraméterek kategóriája és típusa összeférjen a megfelelő formális paraméterek kategóriájával és típusával. Ennek az általános szabálynak néhány speciális esete a következő:

**4.7.5.1.** Idézetek nem lehetnek aktuális paraméterek olyan eljárásutasításokban, amelyek ALGOL 60-utasításból álló eljárástörzsszel rendelkező eljárásra hivatkoznak (lásd a 4.7.8. fejezetet).

**4.7.5.2.** Minden olyan formális paraméter, amely az eljárástörzsben szereplő értékadó utasításban baloldali változóként szerepel és nem értékével van behíva, csak olyan aktuális paraméternek felelhet meg, amely maga is változó (mint a kifejezés speciális esete).

**4.7.5.3.** Egy formális paraméter, amely az eljárástörzsben tömbnévként szerepel, csakis olyan aktuális paraméternek felelhet meg, amely egy ugyanolyan dimenziójú tömbhöz tartozó tömbnév. Továbbá, ha ez a formális paraméter az értékével van behíva, akkor a behívás folyamán létrejövő megfelelő lokális tömb ugyanolyan indexhatárokkal kell, hogy rendelkezze, mint az aktuális tömb.

**4.7.5.4.** Egy az értékével behívott formális paraméternek általában nem felelhet meg kapcsolónév vagy eljárásnév, mert ezeknek nincsen értékük. (Kivételt képeznek azon olyan eljárások nevei, amelyeknek a formális paraméter-része üres (lásd az 5.4. fejezetet), és azok, amelyek függvénykifejezést definiálnak (lásd az 5.4. és a 4.1. fejezetet). Az ilyen eljárásnevek önmagukban is komplett kifejezések.)

**4.7.5.5.** Minden formális paraméterre nézve megszorítások állhatnak fenn a neki megfeleltetendő aktuális paraméter típusára vonatkozólag. (Ezek a megszorítások az eljárás fejének specifikációs részében meg lehetnek adva, de az is lehet, hogy nincsenek megadva.) Az ilyen megszorításokat az eljárásutasításban nyilván figyelembe kell venni.

#### 4.7.6. A törzs nem-lokális mennyiségei

Definiálatlan az olyan eljárásutasítás, amely kívül van egy az eljárástörzsben nem-lokális mennyiség hatáskörén.

#### 4.7.7. Paraméterelválasztó jelek

A paraméterelválasztó jeleket egyenértékűnek tekintjük. Nem kívánjuk, hogy az eljárásutasítás paraméterelválasztó jelei és az eljárás fejében



szereplő paraméterelválasztó jelek között megfeleltetés legyen, azonkívül, hogy a számuk egyezzen meg. Az az információ, amelyet a bonyolultabb fajta paraméterelválasztó jelekkel közölhetünk, teljesen tetszőleges.

#### 4.7.8. Kód alakjában megadott eljárástörzs

Azok a megszorítások, amelyek egy az ALGOL-tól különböző kódban írt eljárástörzset behívó eljárásutasítással kapcsolatosak, nyilván a használt kód jellemzőitől, valamint a felhasználó céljaitól függenek, s ezért a hivatkozási nyelv keretein kívül esnek.

## 5. Deklarációk

A deklarációk a programban szereplő azonosítók bizonyos tulajdonságait definiálják. Egy deklaráció csak egy blokkon belül érvényes, e blokkon kívül az azonosítókat más célra használhatjuk fel (lásd a 4.1.3. fejezetet).

Dinamikus szempontból ez a következő szabályokat vonja maga után: egy blokkba való belézés alkalmával (ami csak a **begin** elhatároló jelen keresztül történhet, minthogy a belül levő címkék lokálisak a blokkban és így kívülről hozzáférhetetlenek) minden, a blokk számára deklarált azonosító azt a jelentést veszi fel, amely az adott deklaráció természetéből következik. Ha ugyanezek az azonosítók már más, külső deklarációkkal definiálva voltak, akkor ettől kezdve új jelentést vesznek fel. Másrészt azok az azonosítók, amelyek nincsenek a szóbanforgó blokkban külön deklarálva, megtartják korábbi jelentésüket.

A kilépéskor (amely vagy az **end** elhatároló jelen, vagy pedig egy átírányító utasításon keresztül történhet) minden olyan azonosító, amely a blokkra nézve deklarálva volt, elveszti blokkbeli jelentését.

Minden deklarációt kiegészítésképpen elláthatunk az **own** deklarátor jellel. Ennek hatására az adott blokkba való minden újabb belépés alkalmával az **own** jellel megjelölt mennyiségek újból felveszik azt az értéket, amellyel az adott blokkból való utolsó kilépéskor rendelkeztek, míg az így meg nem jelölt, de a blokkra nézve egyébként deklarált mennyiségek értéke (egyelőre) definiálatlan marad (amíg csak egy a blokkban levő utasítás értéket nem ad nekik). A címkék, az eljárásdeklarációk formális paraméterei és esetleg a szabványos függvények azonosítói kivételével (lásd a 3.2.4. és a 3.2.5. fejezetet) valamely programban szereplő minden azonosítót deklarálni kell. Egy és ugyanazon blokkfejen egyetlen azonosítót sem szabad egynél többször deklarálni.

Szintaktikus definíció

$$\langle \text{deklaráció} \rangle ::= \langle \text{típusdeklaráció} \rangle \mid \langle \text{tömbdeklaráció} \rangle \mid \langle \text{kapcsolódeklaráció} \rangle \mid \langle \text{eljárásdeklaráció} \rangle$$

### 5.1. TÍPUSDEKLARÁCIÓ

#### 5.1.1. Szintaktikus definíció

$$\langle \text{típuslista} \rangle ::= \langle \text{skaláris változó} \rangle \mid \langle \text{skaláris változó} \rangle, \langle \text{típuslista} \rangle$$

$$\langle \text{típus} \rangle ::= \text{real} \mid \text{integer} \mid \text{Boolean}$$

$$\langle \text{típusjelzés} \rangle ::= \langle \text{típus} \rangle \mid \text{own } \langle \text{típus} \rangle$$

$$\langle \text{típusdeklaráció} \rangle ::= \langle \text{típusjelzés} \rangle \langle \text{típuslista} \rangle$$



### 5.1.2. Példák

**integer** p, q, s

**own Boolean** Acryl, n

### 5.1.3. Szemantikus definíció

A típusdeklaráció azt a célt szolgálja, hogy bizonyos skaláris változók nevéül szolgáló azonosítókat adott típusúaknak jelentsünk ki. A valós-típusúaknak deklarált változók csak pozitív, nulla vagy negatív értékeket vehetnek fel, az egész-típusúak pedig csak pozitív vagy negatív *egész* értékeket, illetve a nullát. A logikai típusú változók értéke csak **true** vagy **false** lehet.

Az aritmetikai kifejezésekben minden olyan helyet, amelyet egy valós-típusúnak deklarált változó elfoglalhat, ugyanúgy elfoglalhat egy egész-típusúnak deklarált változó is.

Az **own** deklarátorjel értelmére vonatkozólag lásd fentebb az 5. fejezet negyedik bekezdését.

## 5.2. TÖMBDEKLARÁCIÓK

### 5.2.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{alsó korlát} \rangle ::= \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle$

$\langle \text{felső korlát} \rangle ::= \langle \text{aritmetikai kifejezés} \rangle$

$\langle \text{korlátpár} \rangle ::= \langle \text{alsó korlát} \rangle : \langle \text{felső korlát} \rangle$

$\langle \text{korlátpár-lista} \rangle ::= \langle \text{korlátpár} \rangle | \langle \text{korlátpár-lista} \rangle, \langle \text{korlátpár} \rangle$

$\langle \text{tömbszelet} \rangle ::= \langle \text{tömbnév} \rangle [ \langle \text{korlátpár-lista} \rangle ] | \langle \text{tömbnév} \rangle, \langle \text{tömbszelet} \rangle$

$\langle \text{tömblista} \rangle ::= \langle \text{tömbszelet} \rangle | \langle \text{tömblista} \rangle, \langle \text{tömbszelet} \rangle$

$\langle \text{tömbdeklaráció} \rangle ::= \text{array } \langle \text{tömblista} \rangle | \langle \text{típusjelzés} \rangle \text{ array } \langle \text{tömblista} \rangle$

### 5.2.2. Példák

**array** a, b, c [7 : n, 2 : m], s [—2 : 10]

**own integer array** A [if c < 0 then 2 else 1 : 20]

**real array** q [—7 : —1]

### 5.2.3. Szemantikus definíció

A tömbdeklaráció egy vagy egyidejűleg több azonosítóról mondja ki azt, hogy indexes változókból álló tömböt képvisel és megadja e tömbök dimenziószámát, az indexek korlátaikat és a változók típusát.

#### 5.2.3.1. Indexkorlátok

Egy tömb indexkorlátai a tömbnevet követő első szögletes zárójelben [ ] vannak megadva egy „korlátpár-lista” formájában. E lista minden eleme egy indexnek az alsó, ill. a felső korlátját adja meg két aritmetikai kifejezés formájában, a két korlátot pedig egy kettőspont választja el. A korlátpár-lista minden indexnek balról jobbra haladó sorrendben megadja a korlátaikat.

#### 5.2.3.2. Dimenziószámok

A dimenziószámot a korlátpár-lista elemeinek a száma adja meg.

### 5.2.3.3. Típusok

Közös deklarációban szereplő minden tömbnek azonos típusa van. Ha nincsen megadva explicit típusjelzés, akkor a tömböket valós típusúaknak (**real**) kell tekinteni.

### 5.2.4. Alsó és felső korlátok

**5.2.4.1.** A korlátokat megadó aritmetikai kifejezések értékét ugyanúgy kell kiszámítani, mint az indexkifejezések értékeit (lásd a 3.1.4.2. fejezetet).

**5.2.4.2.** Alsó ill. felső korlátként szereplő kifejezések csak olyan változóktól és eljárásoktól függhetnek, amelyek nem-lokálisak arra a blokkra nézve, amelyre a tömbdeklaráció szól. Ennélfogva valamely program legkülső blokkjában csak konstans indexkorlátokkal megadott tömbdeklarációk lehetnek.

**5.2.4.3.** A tömb csak akkor van definiálva, ha a felső indexkorlátok egyike sem kisebb a megfelelő alsó indexkorlátnál.

**5.2.4.4.** A korlátokat megadó kifejezéseket a blokkba való minden belépés alkalmával újból kiszámítjuk.

### 5.2.5. Az indexes változók azonossága

Az indexes változók azonossága nincsen kapcsolatban a tömbdeklarációban megadott indexkorlátokkal. Mindazonáltal, még akkor is, ha egy tömböt **own** jellel deklarálunk, a megfelelő indexes változók közül mindig csak azoknak az értéke van definiálva, amelyeknek az indexei a legutóbb kiszámított korláton belül esnek.

## 5.3. KAPCSOLÓDEKLARÁCIÓK

### 5.3.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{kapcsolólista} \rangle ::= \langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle | \langle \text{kapcsolólista} \rangle,$   
 $\langle \text{helymegjelölő kifejezés} \rangle$

$\langle \text{kapcsolódeklaráció} \rangle ::= \text{switch } \langle \text{kapcsolónév} \rangle := \langle \text{kapcsolólista} \rangle$

### 5.3.2. Példák

**switch** S := S1, S2, Q [m], **if** v < -5 **then** S3 **else** S4

**switch** Q := pl, w

### 5.3.3. Szemantikus definíció

A kapcsolódeklaráció a megfelelő kapcsoló értékeit határozza meg. Ezeket az értékeket a kapcsolólistán szereplő helymegjelölő kifejezések értékeiként egyenként adjuk meg. A helymegjelölő kifejezések mindegyikéhez egy-egy természetes szám, 1, 2, ... van rendelve, mely a lista elemeinek balról jobbfelé való leszámlálásával adódik. Az indexkifejezés egy adott értékének megfelelő kapcsolókifejezés értéke (lásd a 3.5. Helymegjelölő kifejezések c. fejezetet) nem más, mint annak a kapcsolólistán levő helymegjelölő kifejezésnek az értéke, amelyhez hozzárendelt egész szám megegyezik ezzel az értékkel.

### 5.3.4. A kapcsolólistán levő kifejezések értékének kiszámítása

Egy a kapcsolólistán levő kifejezés értékét mindannyiszor kiszámítjuk, valahányszor csak a listának arra az elemére történik hivatkozás, amelyben



ez a kifejezés előfordul és ehhez a számításhoz a kifejezésben szereplő változóknak a pillanatnyi értékét használjuk fel.

### 5.3.5. A hatáskörök befolyása

Értelmetlen egy kapcsolókifejezés értékére való hivatkozás olyan helyről, amely kívül esik az illető értékhez tartozó helymegjelölő kifejezésben szereplő valamely mennyiség hatáskörén.

## 5.4. ELJÁRÁSDEKLARÁCIÓK

### 5.4.1. Szintaktikus definíció

$\langle \text{formális paraméter} \rangle ::= \langle \text{azonosító} \rangle$   
 $\langle \text{formális paraméter-lista} \rangle ::= \langle \text{formális paraméter} \rangle |$   
 $\quad \langle \text{formális paraméterlista} \rangle \langle \text{paraméterelválasztó jel} \rangle$   
 $\quad \langle \text{formális paraméter} \rangle$   
 $\langle \text{formális paraméter-rész} \rangle ::= \langle \text{üres} \rangle | ( \langle \text{formális paraméter-lista} \rangle )$   
 $\langle \text{azonosítólista} \rangle ::= \langle \text{azonosító} \rangle | \langle \text{azonosítólista} \rangle, \langle \text{azonosító} \rangle$   
 $\langle \text{érték-rész} \rangle ::= \text{value} \langle \text{azonosítólista} \rangle; | \langle \text{üres} \rangle$   
 $\langle \text{specifikátor} \rangle ::= \text{string} | \langle \text{típus} \rangle | \text{array} | \langle \text{típus} \rangle \text{array} | \text{label} | \text{switch} |$   
 $\quad \text{procedure} | \langle \text{típus} \rangle \text{procedure}$   
 $\langle \text{specifikációs rész} \rangle ::= \langle \text{üres} \rangle | \langle \text{specifikátor} \rangle \langle \text{azonosítólista} \rangle; |$   
 $\quad \langle \text{specifikációs rész} \rangle \langle \text{specifikátor} \rangle \langle \text{azonosítólista} \rangle;$   
 $\langle \text{eljárás feje} \rangle ::= \langle \text{eljárásnév} \rangle \langle \text{formális paraméter-rész} \rangle; \langle \text{érték-rész} \rangle$   
 $\quad \langle \text{specifikációs rész} \rangle$   
 $\langle \text{eljárástörzs} \rangle ::= \langle \text{utasítás} \rangle | \langle \text{kód} \rangle$   
 $\langle \text{eljárásdeklaráció} \rangle ::= \text{procedure} \langle \text{eljárás feje} \rangle \langle \text{eljárástörzs} \rangle | \langle \text{típus} \rangle$   
 $\quad \text{procedure} \langle \text{eljárás feje} \rangle \langle \text{eljárástörzs} \rangle$

### 5.4.2. Példák (lásd még a jelentés végén levő példákat is)

**procedure** Nyom (a) Rendszám: (n) Eredmény: (s); **value** n; **array** a; **integer** n; **real** s;  
**begin integer** k;  
 s := 0;  
**for** k := 1 **step** 1 **until** n **do** s := s + a[k, k]  
**end**

**procedure** Transzponálás (a) Rendszám: (n); **value** n  
**array** a; **integer** n;  
**begin real** w; **integer** i, k;  
**for** i := 1 **step** 1 **until** n **do**  
     **for** k := i + 1 **step** 1 **until** n **do**  
         **begin** w := a[i, k];  
             a[i, k] := a[k, i];  
             a[k, i] := w **end**  
     **end** Transzponálás

**procedure** Absmax (a) méretek: (n, m) Eredmény: (y) Indexek: (i, k);



**comment** Az  $m$ -szer  $n$ -es a mátrix legnagyobb abszolút értékű elemének értékét adja  $y$ -nak, a hozzátartozó indexek értékét pedig  $i$ -nek és  $k$ -nak;  
**array**  $a$ ; **integer**  $n, m, i, k$ ; **real**  $y$ ;  
**begin integer**  $p, q$ ;  
 $y := 0$ ;  
**for**  $p := 1$  **step** 1 **until**  $n$  **do for**  $q := 1$  **step** 1 **until**  $m$  **do**  
**if**  $\text{abs}(a[p, q]) > y$  **then begin**  $y := \text{abs}(a[p, q])$ ;  $i := p$ ;  $k := q$   
**end**  
**end Absmax**

**procedure** Skalárszorzat ( $a, b$ ) Rendszám: ( $k, p$ ) Eredmény: ( $y$ );

**value**  $k$ ;  
**integer**  $k, p$ ; **real**  $y, a, b$ ;  
**begin real**  $s$ ;  
 $s := 0$ ;  
**for**  $p := 1$  **step** 1 **until**  $k$  **do**  $s := s + a \times b$ ;  
 $y := s$   
**end Skalárszorzat**

**integer procedure** Négyszögjel ( $u$ ); **real**  $u$ ;

Négyszögjel := **if**  $0 \leq u \wedge u \leq 1$  **then** 1 **else** 0

#### 5.4.3. Szemantikus definíció

Az eljárásdeklaráció a **procedure** jel után álló eljárásnévvel megjelölt eljárás meghatározására szolgál. Az eljárásdeklaráció fő alkotórésze egy (rendszerint összetett) utasítás vagy egy kódsorozat, az „eljárástörzs”, amely eljárásutasítások vagy függvénykifejezések segítségével aktivizálható annak a bloknak más részeiből, amelynek az elején, a blokkfejből, az illető eljárás deklarációja van. Az eljárástörzshöz egy fejrész is tartozik, az „eljárás feje”, amely a törzsben szereplő bizonyos azonosítókról megmondja (specifikálja), hogy formális paramétereket képviselnek. Valahányszor az eljárás aktivizálása megtörténik (lásd a 3.2. Függvénykifejezések és a 4.7. Eljárásutasítások c. fejezetet) az eljárástörzs minden formális paramétere vagy felveszi egy aktuális paraméter értékét, vagy ez utóbbival helyettesítődik. Az eljárástörzsben nem formális paraméterekként szereplő azonosítók lehetnek lokálisak vagy nem-lokálisak a törzsre nézve aszerint, hogy deklarálva vannak-e a törzsben vagy sem. Azok, amelyek nem-lokálisak a törzsre nézve, ugyanakkor lehetnek lokálisak arra a blokkra vonatkozólag, amelynek elején az eljárásdeklaráció szerepel.

#### 5.4.4. Függvénykifejezések értéke

Ahhoz, hogy egy eljárásdeklaráció függvénykifejezés értékét definiálja, szükséges, hogy az eljárástörzsben szerepeljen valamilyen értéknek a megfelelő eljárásnévhez való hozzárendelése (értékadó utasítás). Ezenkívül ennek az értéknek a típusát is deklarálni kell egy típusdeklarátorral, amely az eljárásdeklarációban a legelső szimbólum kell, hogy legyen.

Az eljárás nevének az eljárástörzsben való minden más előfordulása a megfelelő eljárás aktivizálást jelenti.



### 5.4.5. Specifikációk

Az eljárás fejében szerepelhet egy specifikációs rész, amely a formális paraméterek fajtáiról és típusairól ad tájékoztatást nyilvánvaló értelmű jelölések segítségével. Ebben a részben minden formális paraméter csak egyszer fordulhat elő és a név szerint behívott paraméterek (lásd a 4.7.3.2. fejezetet) feltüntetése nem feltétlenül szükséges.

### 5.4.6. Kódsorozat alakjában megadott eljárástörzs

Meg van engedve, hogy valamely eljárástörzset egy az ALGOL-tól különböző más nyelven adjunk meg. Mivel az a szándékunk, hogy az ilyen módon való alkalmazás kizárólag a gépi reprezentánsok kérdése legyen, az ilyen nyelvekre vonatkozó további szabályok nem adhatók meg a hivatkozási nyelv keretében.

## Példák eljárásdeklarációra

### 1. PÉLDA

**procedure** euler (fgv, összeg, epsz, elég); **value** epsz, elég;

**integer** elég; **real procedure** fgv; **real** összeg, epsz;

**comment** Az euler-eljárás kiszámítja a fgv (i) összegét  $i = 0$ -tól végtelenig egy megfelelően finomított Euler-transzformáció segítségével. Az összegezést addig végzi, amíg a transzformált sor tagjainak abszolút értéke „elég”-szer egymás után kisebb lesz mint „epsz”. Tehát meg kell adnunk egy egyváltozós, egész argumentumú „fgv” függvényt, egy „epsz” hibakorlátot és egy „elég” természetes számot. Az eredmény az „összeg” összeg lesz. Az euler-eljárás különösen hatékony lassan konvergáló vagy divergens alternáló sorokra;

**begin integer** i, k, n, t; **array** m [0 : 15]; **real** mn, mp, ds;

i := n := t := 0; m [0] := fgv (0); összeg := m [0] / 2;

következő tag: i := i + 1; mn := fgv (i);

**for** k := 0 **step** 1 **until** n **do**

**begin** mp := (mn + m [k]) / 2; m [k] := mn; mn := mp **end**  
közepelés;

**if** (abs (mn) < abs (m [n]))  $\wedge$  (n < 15) **then**

**begin** ds := mn / 2; n := n + 1; m [n] := mn **end** ellenőrzés

**else** ds := mn; összeg := összeg + ds;

**if** abs (ds) < epsz **then** t := t + 1 **else** t := 0;

**if** t < elég **then go to** következő tag

**end** euler

### 2. PÉLDA<sup>16</sup>

<sup>16</sup> Ez az RK eljárás néhány új gondolatot tartalmaz, amelyek hasonlóak S. GILL, „A process for the step by step integration of differential equations in an automatic computing machine” c. (Proc. Cambridge Phil. Soc., 47 (1951), 96. o.) és E. FRÖBERG, „On the solution of ordinary differential equations with digital computing machines” c. (Fysiograf. Sällsk. Lund, Förh. 20, 11. sz. [1950] 136—152) cikkében ismertett gondolatokhoz. Tudnunk kell azonban, hogy ez az eljárás esetleg nem optimális a számítási idő és a kerekítési hibák szempontjából, és hogy a számológépen még nem próbálták ki.

**procedure** RK (x, y, n, FGV, epsz, eta, xV, yV, fi);  
**value** x, y; **integer** n; **Boolean** fi; **real** x, epsz, eta, xV;  
**array** y, yV; **procedure** FGV;  
**comment**: RK integrálja az  $y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) differenciálegyenlet-rendszert a Runge-Kutta-módszerrel, és a megfelelő integrációs lépésközt automatikusan keresi meg.

Paraméterek: az ismeretlen  $y_k(x)$  függvények  $y[k]$  kezdeti értéke az  $x$  helyen. Az egyenletrendszer  $n$  rendszáma. Egy FGV ( $x, y, n, z$ ) eljárás, amely az integrálandó rendszert, vagyis az  $f_k$  függvények összességét képviseli. Az „epsz” és „eta” hibahatárok, amelyek a numerikus integrálás kívánt pontosságát határozzák meg. Az integrációs intervallum vége, xV. Az yV kimenő paraméter a megoldást jelenti az xV pontban. A „fi” logikai változó, amelynek az RK egyszeri vagy első behívásakor mindig a **true** értéket kell adnunk, ha azonban az  $y$  függvényeket több közbülső  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontban kell meghatározni és ezért az eljárás ismételten behívásra kerül ( $k = 0, 1, \dots, n-1$  esetén  $x = x_k$ -val és  $xV = x_{k+1}$ -gyel), akkor az eljárás rövidítése (számítási idő megtakarítása) céljából **fi** = **false** is alkalmazható. Az FGV eljárás bejárat paraméterei legyenek  $x, y$  és  $n$ , míg a  $z$  kijárat paraméter képviseli a  $z[k] = f_k(x, y[1], y[2], \dots, y[n])$  deriváltakat az  $x$  és az  $y$ -ok aktuális értékeire. Fellép egy „comp” nevű eljárás is, mint nem-lokális azonosító;

**begin**

**array** z, y1, y2, y3 [1 : n]; **real** x1, x2, x3, H;

**Boolean** ki; **integer** k, j; **own real** s, Hs;

**procedure** RK1L (x, y, h, xv, yv); **real** x, h, xv; **array** y, yv;

**comment** RK1L egyetlen integrációs lépést végez el a Runge—Kutta-módszer szerint az  $x$  és  $y[k]$  kezdeti értékek felhasználásával. Eredményül az  $xv = x + h$  és az  $yv[k]$  kijárat paraméterek adódnak, ahol az utóbbi az  $xv$  ponthoz tartozó megoldást jelenti. Fontos: Az  $n$ , FGV és a  $z$  paraméter nem-lokális mennyiség az RK1L-ben;

**begin array** w [1 : n], a [1 : 5]; **integer** k, j;

a [1] := a [2] := a [5] := h/2; a [3] := a [4] := h; xv := x;

**for** k := 1 **step** 1 **until** n **do** yv [k] := w [k] := y [k];

**for** j := 1 **step** 1 **until** 4 **do**

**begin**

FGV (xv, w, n, z);

xv := x + a [j];

**for** k := 1 **step** 1 **until** n **do**

**begin** w [k] := a [k] + a [j] × z [k];

yv [k] := yv [k] + a [j + 1] × z [k]/3

**end** k

**end** j

**end** RK1L;

Program eleje:

**if** fi **then begin** H := xV—x; s := 0 **end**

**else** H := Hs; ki := **false**;



```

AA: if  $(x + 2.01 \times H - xV > 0) \equiv (H > 0)$  then
    begin Hs: = H; ki: = true; H: =  $(xV - x)/2$  end if;
    RK1L (x, y,  $2 \times H$ , xl, yl);
BB: RK1L (x, y, H, x2, y2); RK1L (x2, y2, H, x3, y3);
    for k: = 1 step 1 until n do
        if comp (y1 [k], y3 [k], éta) > epsz then go to CC;

comment: comp (a, b, c) egy függvénykifejezés, amelynek értéke az a
és b változók mantisszái különbségének az abszolút értékével egyenlő, miután
e mennyiségek kitevőit egyenlővé tettük az eredetileg adott a, b, c paraméterek
közül a legnagyobb kitevőjűnek a kitevőjével;

x: = x3; if ki then go to DD;
    for k: = 1 step 1 until n do y[k]: = y3 [k];
    if s = 5 then begin s: = 0; H: =  $2 \times H$  end if;
    s: = s + 1; go to AA;
CC: H: =  $0.5 \times H$ ; ki: = false; x1: = x2;
    for k: = 1 step 1 until n do y1[k]: = y2 [k]; go to BB;
DD: for k: = 1 step 1 until n do yV [k]: = y3 [k]
end RK eljárás

```

## A DEFINÍCIÓK, A FOGALMAK ÉS A SZINTAKTIKUS EGYSÉGEK TÁRGYMUTATÓJA

Az utalások a vonatkozó fejezet számával vannak megadva. Az utalások három csoportra oszlanak:

1. „def”. A „def.” rövidítés után álló fejezetszámok a szintaktikus definícióra vonatkoznak (ha egyáltalán van ilyen).
2. „szint.” A „szint.” rövidítés után álló fejezetszámok a metanyelvi formulákban való előfordulásokat jelzik. Az olyan utalások melyek már a def-csoportban is előfordultak, itt nem ismétlődnek.
3. „szöveg.” A „szöveg” szót követő fejezetszámok a szövegben előforduló definíciókra utalnak.

Mindazok az alapjelek, amelyek nem aláhúzott (vastagbetűs) szavak, a tárgymutató elején vannak összegyűjtve.

A példákban való előfordulásokat a tárgymutató mellőzi.

- + , lásd: összeadás jele
- , lásd: kivonás jele
- $\times$  , lásd: szorzás jele
- / , lásd: osztás jele
- $\div$  , lásd: aritmetikai osztás jele
- $\uparrow$  , lásd: hatványozás jele
- $<$ ,  $\leq$ ,  $=$ ,  $\geq$ ,  $>$ ,  $\neq$  , lásd: reláció jele
- $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\equiv$  , lásd: logikai művelet jele
- , , lásd: vessző
- . , lásd: tizedespont
- 10 , lásd: tizes alap

: , lásd: kettőspont  
 ; , lásd: pontosvessző  
 : =, lásd: kettőspont-egyenlő  
 □ , lásd: köz  
 ( ) , lásd: kerek zárójelek  
 [ ] , lásd: szögletes zárójelek, indexzárójelek  
 ‘ ’ , lásd: idézőjelek

ábécé (alphabet), szöveg 2.1.

⟨additív művelet jele⟩ | ⟨adding operator⟩ |, def. 3.3.1.

⟨aktuális paraméter⟩ | ⟨actual parameter⟩ |, def. 3.2.1, 4.7.1.

⟨aktuális paraméter-lista⟩ | ⟨actual parameter list⟩ |, def. 3.2.1, 4.7.1.

⟨aktuális paraméter-rész⟩ | ⟨actual parameter part⟩ |, def. 3.2.1, 4.7.1.

⟨alappjel⟩ | ⟨basic symbol⟩ |, def. 2.

⟨alaputasítás⟩ | ⟨basic statement⟩ |, def. 4.1.1. szint 4.5.1.

⟨alsó korlát⟩ | ⟨lower bound⟩ |, def. 5.2.1. szöveg 5.2.4.

aritmetikai (arithmetic), szöveg 3.3.6.

⟨aritmetikai kifejezés⟩ | ⟨arithmetic expression⟩ |, def. 3.3.1. szint. 3, 3.1.1, 3.3.1, 3.4.1, 4.2.1, 4.6.1, 5.2.1 szöveg 3.3.3.

⟨aritmetikai művelet jele⟩ | ⟨arithmetic operator⟩ |, def. 2.3, szöveg 3.3.4.

aritmetikai osztás jele | divide | ÷ , szint. 2.3, 3.3.1, szöveg 3.3.4.2.

**array**, szint. 2.3, 5.2.1, 5.4.1.

⟨azonosító⟩ | ⟨identifier⟩ |, def. 2.4.1, szint. 3.1.1, 3.2.1, 3.5.1, 5.4.1, szöveg 2.4.3.

⟨azonosító-lista⟩ | ⟨identifier list⟩ |, def. 5.4.1.

átalakító függvény (transfer function), szöveg 3.2.5.

⟨átírányító utasítás⟩ | ⟨go to statement⟩ |, def. 4.3.1, szint. 4.1.1, szöveg 4.4.3.

⟨baloldal⟩ | ⟨left part⟩ |, def. 4.2.1.

⟨baloldali változók listája⟩ | ⟨left part list⟩ |, def. 4.2.1.

**begin**, szint. 2.3., 4.1.1.

⟨betű⟩ | ⟨letter⟩ |, def. 2.1, szint. 2, 2.4.1, 3.2.1, 4.7.1.

⟨blokk⟩ | ⟨block⟩ |, def. 4.1.1, szint. 4.5.1, szöveg 1, 4.1.3, 5.

⟨blokkfej⟩, blokk eleje | ⟨block head⟩ |, def. 4.1.1.

**Boolean**, szint. 2.3, 5.1.1, szöveg 5.1.3.

⟨cikluskezdet⟩ | ⟨for clause⟩ |, def. 4.6.1, szöveg 4.6.3.

⟨cikluslista⟩ | ⟨for list⟩ |, def. 4.6.1, szöveg 4.6.4.

⟨cikluslista-elem⟩ | ⟨for list element⟩ |, def. 4.6.1, szöveg 4.6.4.1, 4.6.4.2, 4.6.4.3.

ciklus paramétere, ciklusparaméter, szöveg 4.6.3, 4.6.4, 4.6.5.

⟨ciklusutasítás⟩ | ⟨for statement⟩ |, def. 4.6.1, szint. 4.1.1, 4.5.1, szöveg 4.6. (a teljes fejezet).

⟨címke⟩ | ⟨label⟩ |, def. 3.5.1, szint. 4.1.1, 4.5.1, 4.6.1, szöveg 1, 4.1.3.

⟨címkétlen alaputasítás⟩ | ⟨unlabelled basic statement⟩ |, def. 4.1.1.

⟨címkétlen blokk⟩ | ⟨unlabelled block⟩ |, def. 4.1.1.

⟨címkétlen összetett utasítás⟩ | ⟨unlabelled compound⟩ |, def. 4.1.1.

**comment**, szint. 2.3.

⟨deklaráció⟩, deklarálás | ⟨declaration⟩ |, def. 5, szint. 4.1.1, szöveg 1.5.



<deklaráló jel>, <deklarátor jel> | <declarator> |, def. 2.3.

dimenzió (dimension), szöveg 5.2.3.2.

<diszjunkciós kifejezés> | <Boolean term> |, def. 3.4.1.

**do**, szint. 2.3, 4.6.1.

<egész szám> | <integer> |, def. 2.5.1, szöveg 2.5.4.

egészrész, lásd entier.

<egyszerű idézet-mag> | <proper string> |, def. 2.6.1.

<elhatároló jel> | <delimiter> |, def. 2.3, szint. 2.

<eljárásdeklaráció>, eljárás deklarálás | <procedure declaration> |, def. 5.4.1, szint. 5, szöveg 5.4.3.

<eljárás feje>, eljárás eleje | <procedure heading> |, def. 5.4.1, szint. 5, szöveg 5.4.3.

<eljárásnév>, eljárás neve, eljárás azonosítója | <procedure identifier> |, def. 3.2.1, szint. 3.2.1, 4.7.1, 5.4.1, szöveg 4.7.5.4.

<eljárástörzs> | <procedure body> |, def. 5.4.1.

<eljárásutasítás> | <procedure statement> |, def. 4.7.1, szint. 4.1.1, szöveg 4.7.3.

<előjel nélküli szám> | <unsigned number> |, def. 2.5.1, szint. 3.3.1.

**else**, szint. 2.3, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1, 4.5.1, szöveg 4.5.3.2.

<elsődleges kifejezés> | <primary> |, def. 3.3.1.

<elsődleges logikai kifejezés> | <Boolean primary> |, def. 3.4.1.

<elválasztó jel> | <separator> |, def. 2.3.

**end**, szint. 2.3, 4.1.1.

entier (entier), szöveg 3.2.5.

érték (value), szöveg 2.8, 3.3.3.

<értékadó utasítás> | <assignment statement> |, def. 4.2.1, szint. 4.1.1, szöveg 1, 4.2.3.

<érték-rész> | <value part> |, def. 5.4.1, szöveg 4.7.3.1.

**false**, szint. 2.2.2.

<felső korlát> | <upper bound> |, def. 5.2.1, szöveg 5.2.4.

<feltételesen végrehajtandó utasítás> | <if statement> |, def. 4.5.1, szöveg 4.5.3.1.

<feltételes utasítás> | <conditional statement> |, def. 4.5.1, szint. 4.1.1, szöveg 4.5.3.

<feltétel-rész> | <if clause> |, def. 3.3.1, 4.5.1, szint. 3.4.1, 3.5.1, szöveg 3.3.3, 4.5.3.2.

<feltétlen helymegjelölő kifejezés> | <simple designational expression> |, def. 3.5.1.

<feltétlen aritmetikai kifejezés> | <simple arithmetic expression> |, def. 3.3.1, szöveg 3.3.3.

<feltétlen logikai kifejezés> | <simple Boolean> |, def. 3.4.1.

<feltétlen utasítás> | <unconditional statement> |, def. 4.1.1, 4.5.1.

**for**, szint. 2.3, 4.6.1.

<formális paraméter> | <formal parameter> |, def. 5.4.1, szöveg 5.4.3.

<formális paraméter-lista> | <formal parameter list> |, def. 5.4.1.

<formális paraméter-rész> | <formal parameter part> |, def. 5.4.1.

<függvénykifejezés> | <function designator> |, def. 3.2.1, szint. 3.3.1, 3.4.1, szöveg 3.2.3, 5.4.4.



**go to**, szint. 2.3, 4.3.1.

⟨hatáskör⟩ | ⟨scope⟩ |, szöveg 2.7.

⟨hatványozás jele⟩ | ⟨exponentiation⟩ ↑, szint. 2.3, 3.3.1, szöveg 3.3.4.3.

⟨helymegjelölő kifejezés⟩ | ⟨designational expression⟩ |, def. 3.5.1, szint. 3, 4.3.1, 5.3.1, szöveg 3.5.3.

⟨idézet⟩ | ⟨string⟩ |, def. 2.6.1, szint. 3.2.1, 4.7.1, szöveg 2.6.3.

⟨idézet-mag⟩ | ⟨open string⟩ |, def. 2.6.1

⟨idézőjelek⟩ | ⟨string quotes⟩ |, ‘ ’, szint. 2.3, 2.6.1, szöveg 2.6.3.

**if**, szint. 2.3, 3.3.1, 4.5.1.

⟨implikációs kifejezés⟩ | ⟨implication⟩ |, def. 3.4.1.

**index** (subscript), szöveg 3.1.4.1.

⟨indexes változó⟩ | ⟨subscripted variable⟩ |, def. 3.1.1, szöveg 3.1.4.1.

⟨indexkifejezés⟩ | ⟨subscript expression⟩ |, def. 3.1.1, szint. 3.5.1.

**indexkorlát** (subscript bound), szöveg 5.2.3.1.

⟨indexlista⟩ | ⟨subscript list⟩ |, def. 3.1.1.

**indexzárójel** (subscript bracket) [ ], szint. 2.3, 3.1.1, 3.5.1, 5.2.1,

**integer**, szint. 2.3, 5.1.1, szöveg 5.1.3.

⟨kapcsolódeklaráció⟩, kapcsoló deklaráció | ⟨switch declaration⟩ |, def. 5.3.1, szint. 5, szöveg 5.3.3.

⟨kapcsolólista⟩ | ⟨switch list⟩ |, def. 5.3.1.

⟨kapcsolónév⟩, kapcsoló neve, kapcsoló azonosítója | ⟨switch identifier⟩ |, def. 3.5.1, szint. 3.2.1, 4.7.1, 5.3.1.

**kerek zárójelek** (parentheses), ( ), szint. 2.3, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1, 4.7.1, 5.4.1, szöveg 3.3.5.2.

**kettőspont** (colon), :, szint. 2.3, 3.2.1, 4.1.1, 4.5.1, 4.6.1, 4.7.1, 5.2.1.

**kettőspont-egyenlő** (colon equal), :=, szint. 2.3, 4.2.1, 4.6.1, 5.3.1.

⟨kifejezés⟩ | ⟨expression⟩ |, def. 3, szint. 3.2.1, 4.7.1, szöveg 3.

⟨kitevőrés⟩ | ⟨exponent part⟩ |, def. 2.5.1, szöveg 2.5.3.

**kivonás jele** (minus), —, szint. 2.3, 2.5.1, 3.3.1, szöveg 3.3.4.1.

⟨kód⟩ | ⟨code⟩ |, szint. 5.4.1, szöveg 4.7.8, 5.4.6.

**kommentár-megállapodások** (comment conventions), szöveg 2.3.

⟨korlátpár⟩ | ⟨bound pair⟩ |, def. 5.2.1.

⟨korlátpár-lista⟩ | ⟨bound pair list⟩ |, def. 5.2.1.

**köz** (space), □, szint. 2, 3, szöveg 2.3, 2.6.3,

**label**, szint. 2.3, 5.4.1.

⟨logikai érték⟩ | ⟨logical value⟩ |, def. 2.2.2, szint. 2, 3.4.1.

⟨logikai művelet jele⟩ | ⟨logical operator⟩ |, def. 2.3, szint. 3.4.1, szöveg 3.4.5.

⟨logikai kifejezés⟩ | ⟨Boolean expression⟩ |, def. 3.4.1, szint. 3, 3.3.1, 4.2.1, 4.5.1, 4.6.1, szöveg 3.4.3.

⟨logikai tag⟩ | ⟨Boolean factor⟩ |, def. 3.4.1.

⟨logikai tényező⟩ | ⟨Boolean secondary⟩ |, def. 3.4.1.

**lokális** (local), szöveg 4.1.3.

**menyiség** (quantity), szöveg 2.7.

**minusz** (minus), lásd kivonás jele

⟨multiplikatív művelet jele⟩ | ⟨multiplying operator⟩ |, def. 3.3.1.

⟨művelet jele⟩, műveleti jel | ⟨operator⟩ |, def. 2.3.

**nem-lokális** (nonlocal), szöveg 4.1.3.

**osztás jele** (divide), /, szint. 2.3, 3.3.1, szöveg 3.3.4.2.



**own**, szint. 2.3, 5.1.1, szöveg 5, 5.2.5.

összeadás jele (plus), +, szint. 2, 3, 2.5.1, 3.3.1, szöveg 3.3.4.1.

<összetett utasítás> | <compound statement> |, def. 4.1.1, szint. 4.5.1, szöveg 1

<összetett utasítás vége> | <compound tail> |, def. 4.1.1.

<paraméterelválasztó jel> | <parameter delimiter> |, def. 3.2.1, 4.7.1, szint.

5.4.1, szöveg 4.7.7.

pontosvessző (semicolon), ;, szint. 2.3, 4.1.1, 5.4.1.

**procedure**, szint. 2.3, 5.4.1.

program (program), szöveg 1.

**real**, szint. 2, 3, 5.1.1, szöveg 5.1.3.

<reláció> | <relation> |, def. 3.4.1, szöveg 3.4.5.

<reláció jele> | <relational operator> |, def. 2.3, 3.4.1.

<skaláris változó> | <simple variable> |, def. 3.1.1, szint. 5.1.1, szöveg 2.4.3.

<specifikációs rész> | <specification part> |, def. 5.4.1, szöveg 5.4.5.

<specifikáló alapjel> | <specifier> |, def. 2.3.

<specifikátor> | <specifier> |, def. 5.4.1.

**step**, szint. 2.3, 4.6.1, szöveg 4.6.4.2.

**string**, szint. 2.3, 5.4.1.

**switch**, szint. 2.3, 5.3.1, 5.4.1.

szabványos függvények (standard functions), szöveg 3.2.4, 3.2.5.

<szám> | <number> |, def. 2.5.1, szöveg 2.5.3, 2.5.4.

<számjegy> | <digit> |, def. 2.2.1, szint. 2, 2.4.1, 2.5.1.

szorzás jele (multiply), ×, szint. 2.3, 3.3.1, szöveg 3.3.4.1.

<szó> | <letter string> |, def. 3.2.1, 4.7.1.

szögletes zárójel, l. indexzárójel

<tag> | <term> |, def. 3.3.1.

<természetes szám> | <unsigned integer> |, def. 2.5.1, 3.5.1.

<tényező> | <factor> |, def. 3.3.1.

**then**, szint. 2.3, 3.3.1, 4.5.1.

<típus> | <type> |, def. 5.1.1, szint. 5.4.1, szöveg 2.8.

<típusdeklaráció>, típus deklaráció | <type declaration> |, def. 5.1.1, szint.

5, szöveg 5.1.3.

<típusjelzés> | <local or own type> |, def. 5.1.1, szint. 5.2.1.

<típuslista> | <type list> |, def. 5.1.1.

tizedespont (decimal point), ., szint. 2.3, 2.5.1.

<tizedesszám> v. tízes alapú szám | <decimal number> |, def. 2.5.1, szöveg 2.5.3.

tizedestört, l. valódi tizedestört

tízes alap (ten), <sub>10</sub>, szint. 2.3, 2.5.1.

tömb (array), szöveg 3.1.4.1.

<tömbdeklaráció> v. tömb deklaráció | <array declaration> |, def. 5.2.1, szint. 5, szöveg 5.2.3.

<tömblista> | <array list> |, def. 5.2.1.

<tömbnév>, tömb neve, tömb azonosítója | <array identifier> |, def. 3.1.1, szint. 3.2.1, 4.7.1, 5.2.1, szöveg 2.8.

<tömbszelet> | <array segment> |, def. 5.2.1.

**true**, szint. 2.2.2.

**until**, szint. 2.3, 4.6.1. szöveg 4.6.4.2.

<utasítás> | <statement> |, def. 4.1.1, szint. 4.5.1, 4.6.1, 5.4.1, szöveg 4 utasítászárójel (statement bracket), lásd **begin** és **end**

<üres> | <empty> |, def. 1.1, szint. 2.6.1, 3.2.1, 4.4.1, 4.7.1, 5.4.1.

<üres utasítás> | <dummy statement> |, def. 4.4.1, szint. 4.1.1, szöveg 4.4.3.

<valódi tizedestört> | <decimal fraction> |, def. 2.5.1.

vessző (comma), , , szint. 2.3, 3.1.1, 3.2.1, 4.6.1, 4.7.1, 5.1.1, 5.2.1, 5.3.1, 5.4.1.

<vezérlőjel> | <sequential operator> |, def. 2.3.

**value**, szint. 2.3, 5.4.1.

<változónév>, változó neve, változó azonosítója | <variable identifier> |, def. 3.3.1.

**while**, szint. 2.3, 4.6.1, szöveg 4.6.4.3.

### Az ALGOL nyelvben alapjelként használatos angol szavak jelentése

<b>array</b>	tömb, (mátrix, vektor, többdimenziós táblázat)
<b>begin</b>	kezdet
<b>Boolean</b>	Boole-féle (logikai)
<b>comment</b>	magyarázat
<b>do</b>	végezd el, tedd
<b>else</b>	máskülönben
<b>end</b>	vég
<b>false</b>	hamis
<b>for</b>	-ra, -re
<b>go to ...</b>	menj ...-hez
<b>if</b>	ha
<b>integer</b>	egész
<b>label</b>	címke
<b>own</b>	saját
<b>procedure</b>	eljárás
<b>real</b>	valós
<b>step</b>	lépj, lépés
<b>string</b>	lánc, füzér
<b>switch</b>	kapcsoló
<b>then</b>	akkor
<b>true</b>	igaz
<b>until</b>	-ig
<b>value</b>	érték
<b>while</b>	amíg csak





## A COULOMB-SZÓRÓDÁS PARAMÉTERÉNEK BECSLÉSE FOTO- EMULZIÓBAN VÉGZETT MÉRÉSEK ALAPJÁN

JÁNOSSY LAJOS<sup>1</sup> — LEE ANNA — RÓZSA PÁL

### Bevezetés

Gyors részecskék energiájának meghatározása a fotoemulzióban a részecskenyom szóródásának mérése alapján történik. Ugyanis, ha  $\theta$  jelöli a részecske  $s$  hosszúságú úton (cellahossz) elszenvedett szóródásának, a többszörös Coulomb-szóródásnak síkbeli vetített szögét, akkor e  $\theta$  szög négyzete  $\langle \theta^2 \rangle$  várható értékének és a részecske tömegének ismeretében energiája már meghatározható.

Ebben a dolgozatban a Coulomb-szóródás  $\langle \theta^2 \rangle$  paraméterének — pontosabban az ezzel arányos  $\alpha^{(1)}$  jel-paraméternek — a becslésével foglalkozunk. A becslésnél a mérési hibának — a háttér zajának — a hatását is figyelembe vesszük. A probléma fizikai hátterével itt nem foglalkozunk, erre vonatkozóan néhány korábbi dolgozatra utalunk ([1]—[4]). E helyen a feladatot elsősorban matematikai szempontból kívánjuk tárgyalni.

A dolgozat első részében a Coulomb-szóródás  $\alpha^{(1)}$  paraméterét és a háttér hatásának (a mérési hibának)  $\alpha^{(2)}$  paraméterét becsüljük először a maximum likelihood módszer alapján, majd mért  $d_i$  értékeknek egy kvadratikus alakjával. Megmutatjuk, hogy ha az  $\alpha^{(2)}$  paraméterek kvadratikus becslésétől torzítatlanságot és minimális szórást követelünk meg, akkor ez az *optimális kvadratikus* becslés megegyezik a maximum likelihood módszer alapján kapott becsléssel. Kvadratikus becslésnél a torzítatlanság és minimális szórás követelménye a kvadratikus alak mátrixának elemeire vonatkozóan feltételes szélsőértékfeladathoz vezet. Ennek megoldására — kis cellahossz esetén érvényes — egyszerű aszimptotikus kifejezéseket nyerünk. Az optimális kvadratikus becslés szórását jellemző  $q_{\nu\mu}(x)$  görbéket — a becsült paraméterek hányadosának függvényében — az 1. ábra tünteti fel. (Az ábráknál a  $b$ ) és a  $c$ ) jelzés arra utal, hogy az  $a$ ) jelű ábra egy-egy részét a gyakorlati használhatóság követelményeinek megfelelően kinagyítottuk.) Megmutatjuk azt is, hogy az  $\alpha^{(1)}$  paraméter becslésének relatív szórása aszimptotikusan a mérési pontok számának nyolcadik gyökével csökken.

Ez az optimális kvadratikus becslés gyakorlati számításra nem alkalmas, mert rendkívül körülményes és hosszadalmas számításokat igényel. A második részben általános módszert adunk gyakorlati számítás szempontjából alkalmas kvadratikus becslésre. A becslés természetesen rosszabb, mint az előbbieken nyert optimális, azonban az optimális becslés szórásának ismeretében esetenként mérlegelhető, hogy a választott becslés határfoka kielégítő-e. A módszer

<sup>1</sup> Központi Fizikai Kutató Intézet.



lényege abban áll, hogy a kvadratikus becslés mátrixát — eltérően az optimális becslés esetétől — alkalmasan választott *alpmátrixok* lineáris kombinációjaként írjuk fel. Így módon nem a mátrix elemeire, hanem csupán a lineáris kombinációban szereplő együtthatókra nézve jutunk feltételes szélsőértékfeladatra.

Az első két részben foglaltak lényegileg megtalálhatók korábbi [4] dolgozatunkban. A [4] dolgozat harmadik részében a fent említett  $\mathbf{G}^{(2)} = [G_{ij}^{(2)}]$  alpmátrixokat a következő *Toeplitz-típusú* mátrixoknak választottuk:

$$(*) \quad G_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2(N-\lambda)} (\delta_{i,j+\lambda} + \delta_{i+\lambda,j}) \quad \lambda = 0, 1, \dots, l; \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Jelen dolgozatunk harmadik részében először annak elméleti indokolását adjuk, hogy az alpmátrixokat miért célszerű Toeplitz-típusúaknak választani. Ezután M. E. COSYNS javaslatára az alpmátrixokat úgy választjuk meg, hogy azok a koordináták *átugrásos* második differenciáinak tiszta négyzetösszegével való becslésnek feleljenek meg. Az alpmátrixoknak ilyenképpen való megválasztása elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt jobbnak bizonyul, mint a (\*) mátrixoké. Elméleti szempontból azért, mert az ezekkel végzett becslés az optimális kvadratikus becslés hatásfokát jobban megközelelti (vö. [4] dolgozat 3., 2. ábrái és jelen dolgozat 2., 3. ábrái). Gyakorlati szempontból pedig azért, mert a becslés elvégzésénél vegyesszorzatok számítása feleslegessé válik. Az a körülmény, hogy a becsléshez a mérési pontok ordinátaiból megfelelő módon képzett második differenciáknak kizárólag a tiszta négyzetösszegét kell felhasználni, a mérések gépi úton való egyszerű és gyors kiértékelésének lehetőségét könnyíti meg.

Lényeges különbség mutatkozik azon két eset között, amikor a becslést két, illetve három alpmátrixszal végezzük. Két alpmátrix alkalmazása esetén három különböző becslési módszert mutatunk meg aszerint, hogy az alapbeosztáshoz tartozó második differenciák mellett az egy-, két-, illetve háromátugrásos második differenciák négyzetösszegét használjuk fel a becsléshez. Tekintettel arra, hogy ekkor a *feltételi* egyenletek egyértelműen határozzák meg a paraméterek becslését, nagyon jó hatásfokú becslést nem várhatunk. A 2. ábra segítségével azonban eldönthető, hogy melyik módszerrel nyert becslés tekinthető a paraméterek első közelítésének. A három alpmátrixszal végzett becslésnél  $\bar{\alpha}^{(1)}$  és  $\bar{\alpha}^{(2)}$  az  $\bar{x} = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}$  hányados függvényeként adódik.

Ahhoz, hogy az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  paraméterek kívánt becslését megkapjuk, e függvényeknek  $\bar{x}$  helyére egy harmadfokú egyenletnek azt a pozitív gyökét kell behelyettesíteni, amelynek első közelítéseként a két alpmátrixszal végzett becslések hányadosa tekinthető. — Az  $\alpha^{(1)}$  becslés *relatív* szórását meghatározó  $r^{(0j)}(z)$  függvénygörbéket a 3. ábra tünteti fel. Innen látható, hogy az optimális kvadratikus becslés relatív szórásgörbétől eltérően e görbéknek jóldefiniált minimumuk van. Ez a minimumhely az  $\frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}}$  hányados minden értékéhez a

mérések számának egy meghatározott  $N_0$  értékét rendeli hozzá, úgy, hogy e becslés akkor lesz a legjobb, ha a cellahosszt az  $N_0$  értéknek megfelelően választjuk.



Nyilvánvaló, hogy amennyiben az ilyen módon végzett becslés nem közelíti meg kielégítően az optimális kvadratikus becslést, akkor az alaplátrixok más megválasztásával, vagy az alaplátrixok számának növelésével a becslés jósága tovább fokozható.

### I. rész

1. Egy emulzió áthaladó nagyenergiájú részecske pályáját — az emulzió rétegvastagságát elhanyagolva — síkmozgás pályájaként tekintjük. A valódi pályának a síkbeli vetületét a részecske nyomának fogjuk nevezni. A síkon úgy vesszük fel az  $X, Y$  koordinátarendszert, hogy a részecske nyomának kezdő és végpontja az  $X$  tengelyre essék. Mérjük a nyomnak ekvidisztáns  $X_i = is$  abszcisszákhöz tartozó  $Y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N+1$ ;  $Y_0 = Y_{N+1} = 0$ ) ordinátáit, amelyek a mérési hibák következtében valószínűségi változók (itt  $s$  a cellahosszt jelöli). A jelenség természetéből következik, hogy az  $Y_i$  valószínűségi változók várható értéke  $\langle Y_i \rangle$  lineáris függvény.<sup>2</sup>

A további tárgyalás során az  $Y_i$  valószínűségi változók helyett ezeknek második differenciáit, a

$$d_i = Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

új változókat fogjuk tekinteni. Nyilvánvaló, hogy ezeknek várható értéke:  $\langle d_i \rangle = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Feltesszük, hogy a  $d_i$  valószínűségi változók együttes eloszlása  $N$ -dimenziós normális eloszlás (lásd [2]), tehát ezek  $f(\mathbf{d}')$  együttes sűrűségfüggvénye:

$$(1.1) \quad f(\mathbf{d}') = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det \mathbf{M})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{d}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{d}' \right].$$

Itt  $\mathbf{M} = [M_{ij}]$  jelöli a  $\mathbf{d}' = (d_1, d_2, \dots, d_N)$  valószínűségi vektorváltozó kovariancia mátrixát, tehát

$$M_{ij} = \langle d_i d_j \rangle \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Az  $\mathbf{M}$  kovariancia mátrix két részből tevődik össze:

$$(1.2) \quad \mathbf{M} = \alpha^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} + \alpha^{(2)} \mathbf{A}^{(2)},$$

ahol az első tag az ütközés okozta szóródást (vagy Coulomb-szóródást), a második tag pedig a mérési hibája, a „háttér” hatása által okozott szóródást fejezi ki. Az  $\mathbf{A}^{(1)} = [A_{ij}^{(1)}]$  és  $\mathbf{A}^{(2)} = [A_{ij}^{(2)}]$  egyszerű szerkezetű Toeplitz-típusú mátrix elemeire  $A_{ij}^{(1)} = A_{|i-j|}^{(1)}$  jelöléssel a következő kifejezések adódnak:

$$(1.3) \quad A_k^{(1)} = \begin{cases} 4 & \text{ha } k = 0 \\ 1 & \text{ha } k = 1 \\ 0 & \text{ha } k \geq 2 \end{cases}$$

<sup>2</sup> Itt és a továbbiakban — a fizikában szokásos statisztikai jelölésmódnak megfelelően —  $\langle \xi \rangle$  jelöli a  $\xi$  valószínűségi változó várható értékét.

$$(1.4) \quad A_k^{(2)} = \begin{cases} 6 & \text{ha } k = 0 \\ -4 & \text{ha } k = 1 \\ 1 & \text{ha } k = 2 \\ 0 & \text{ha } k \geq 3 \end{cases}$$

Az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  együttható a Coulomb-szóródás paraméterével, illetve a mérési hiba szórásával arányos (lásd [2]):

$$(1.5) \quad \alpha^{(1)} = as^3, \quad \alpha^{(2)} = \kappa_2^2 \quad \text{és} \quad a = \frac{1}{6} \langle \vartheta^2 \rangle,$$

ahol  $\kappa_2^2$  az  $Y_i$  értékek mérési hibájának szórásnégyzetét jelöli. Az (1.5) összefüggések alapján látható, hogy a részecske energiájának meghatározása szempontjából milyen fontos az  $\alpha^{(1)}$  együttható — illetőleg az (1.2) összefüggés miatt az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  együtthatók — minél jobb becslése.

2. A következőkben az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  együtthatóknak — a továbbiakban a „jel”, illetve „zaj” paramétereinek — a becslésével foglalkozunk.

Az  $\alpha^{(v)}$  paraméter becslésére az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  jelölést használjuk. A becslést kétféleképpen végezzük. Először a maximum likelihood módszer alapján, azután pedig a mért  $d_i$  differenciáknak egy kvadratikus alakjával. Megmutatjuk majd, hogy ha az utóbbi, kvadratikus becsléstől megköveteljük, hogy *torzítatlan és minimális szórású* legyen, akkor ez az ilyen értelemben *optimális kvadratikus becslés* megegyezik a maximum likelihood becsléssel.

A

$$\frac{\partial \log f(\mathbf{d}')}{\partial \alpha^{(v)}} = 0 \quad \alpha^{(v)} = \bar{\alpha}^{(v)}; \quad v = 1, 2$$

maximum likelihood egyenletek a kijelölt parciális deriválás elvégzése után a

$$(1.6) \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial \log (\det \mathbf{M})}{\partial \alpha^{(v)}} - \frac{1}{2} \mathbf{d}' \frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \alpha^{(v)}} \mathbf{d} = 0 \quad \alpha^{(v)} = \bar{\alpha}^{(v)}; \quad v = 1, 2$$

egyenletrendszerre vezetnek. Ebből kell az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  becsléseket a mért  $d_i$  differenciák függvényében kifejeznünk. Deriváljuk e célból az

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{E}$$

összefüggést  $\alpha^{(v)}$  szerint. A

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha^{(v)}} = \mathbf{A}^{(v)} \quad v = 1, 2$$

összefüggés alapján

$$-\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \alpha^{(v)}} \mathbf{M} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)} = 0 \quad v = 1, 2,$$

így az  $\mathbf{M}^{-1}$  mátrix  $\alpha^{(v)}$  szerinti parciális deriváltjára a

$$(1.7) \quad \frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \alpha^{(v)}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)} \mathbf{M}^{-1} \quad v = 1, 2$$



kifejezés adódik. Ha most figyelembe vesszük, hogy

$$(1.8) \quad \left\langle \frac{\partial \log f(\mathbf{d}')}{\partial \alpha^{(v)}} \right\rangle = 0 \quad v = 1, 2,$$

akkor (1.7) és (1.8) alapján a

$$(1.9) \quad \frac{\partial \log (\det \mathbf{M})}{\partial \alpha^{(v)}} = \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)}) \quad v = 1, 2$$

összefüggésre jutunk. Behelyettesítve az (1.7) és (1.9) kifejezéseket, az (1.6) egyenletrendszer

$$(1.10) \quad \frac{1}{2} \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)}) - \frac{1}{2} \mathbf{d}'(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{d} = 0 \quad \alpha^{(v)} = \bar{\alpha}^{(v)}; v = 1, 2$$

alakban írható. Ha a sűrűségfüggvény logaritmusát most  $\alpha^{(\mu)}$  szerint deriváljuk, akkor a

$$\frac{\partial^2 \log (\det \mathbf{M})}{\partial \alpha^{(\mu)} \partial \alpha^{(v)}} = - \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)}),$$

illetve a

$$\left\langle \mathbf{d}' \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{-1}}{\partial \alpha^{(\mu)} \partial \alpha^{(v)}} \mathbf{d} \right\rangle = \text{spur} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{M}^{-1}}{\partial \alpha^{(\mu)} \partial \alpha^{(v)}} \mathbf{M} \right) = 2 \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)})$$

összefüggések alapján a  $\log f(\mathbf{d}')$  függvény második parciális deriváltjainak várható értékére a

$$\left\langle \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{d}')}{\partial \alpha^{(\mu)} \partial \alpha^{(v)}} \right\rangle = - \frac{1}{2} \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)}) \quad \mu, v = 1, 2$$

kifejezéseket kapjuk. Vezessük be ezekre a  $-Q_{\mu\nu}^*$  jelölést:

$$(1.11) \quad Q_{\mu\nu}^* = - \left\langle \frac{\partial \log f(\mathbf{d}')}{\partial \alpha^{(\mu)} \partial \alpha^{(v)}} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)}) \quad \mu, v = 1, 2.$$

Könnyen belátható, hogy a  $Q_{\mu\nu}^*$  kifejezésekre érvényesek az alábbi összefüggések:

$$Q_{\mu\nu}^* = Q_{\nu\mu}^* \quad \mu, v = 1, 2,$$

$$(1.12) \quad \alpha^{(1)} Q_{1\nu}^* + \alpha^{(2)} Q_{2\nu}^* = \frac{1}{2} \text{spur}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)}) \quad v = 1, 2,$$

$$\alpha^{(1)2} Q_{11}^* + 2 \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} Q_{12}^* + \alpha^{(2)2} Q_{22}^* = \frac{1}{2} \text{spur} \mathbf{E} = \frac{N}{2}.$$

Az (1.12) összefüggések alapján a megoldandó (1.10) egyenletrendszer végül is

$$\alpha^{(1)} Q_{1\nu}^* + \alpha^{(2)} Q_{2\nu}^* = \frac{1}{2} \mathbf{d}'(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{d} \quad \alpha^{(v)} = \bar{\alpha}^{(v)}; v = 1, 2$$



alakban írható. Ebből pedig az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  becslések már kifejezhetők:

$$(1.13) \quad \bar{\alpha}^{(v)} = \frac{1}{2} \mathbf{d}' (Q_{v1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{M}^{-1} + Q_{v2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{d} \quad v = 1, 2,$$

ahol  $\mathbf{Q} = [Q_{\nu\mu}]$  jelöli a  $Q_{\nu\mu}^*$  elemekből alkotott mátrix inverzét.

Határozzuk meg végül az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  becslések, mint valószínűségi változók kovariancia mátrixát. Mivel a becslések várható értéke

$$\langle \bar{\alpha}^{(v)} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^2 Q_{\nu\kappa} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)}) \quad v = 1, 2,$$

a kovariancia mátrix elemeire

$$\begin{aligned} \langle \delta \bar{\alpha}^{(v)} \delta \bar{\alpha}^{(\mu)} \rangle &= \frac{1}{4} \left\langle \mathbf{d}' \left( \sum_{\kappa=1}^2 Q_{\nu\kappa} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)} \mathbf{M}^{-1} \right) \mathbf{d} \mathbf{d}' \left( \sum_{\lambda=1}^2 Q_{\mu\lambda} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\lambda)} \mathbf{M}^{-1} \right) \mathbf{d} \right\rangle - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ \sum_{\kappa=1}^2 Q_{\nu\kappa} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)}) \right] \left[ \sum_{\lambda=1}^2 Q_{\mu\lambda} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\lambda)}) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\kappa, \lambda=1}^2 Q_{\nu\kappa} Q_{\mu\lambda} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m=1}^N \sum_{p,q=1}^N \sum_{r,s=1}^N M_{ip}^* A_{pq}^{(\kappa)} M_{qj}^* M_{lr}^* A_{rs}^{(\lambda)} M_{sm}^* \langle d_i d_j d_l d_m \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ \sum_{\kappa=1}^2 Q_{\nu\kappa} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)}) \right] \left[ \sum_{\lambda=1}^2 Q_{\mu\lambda} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\lambda)}) \right] \end{aligned}$$

adódik. ( $M_{\alpha\beta}^*$  jelöli az  $\mathbf{M}^{-1}$  mátrix elemeit.) Az itt szereplő  $\langle d_i d_j d_l d_m \rangle$  várható értékeket legkönnyebben a  $\mathbf{d}' = (d_1, d_2, \dots, d_N)$  vektorváltozó karakterisztikus függvényéből határozhatjuk meg. A  $\mathbf{d}'$  valószínűségi vektorváltozó karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\mathbf{d}'}(t_1, t_2, \dots, t_N) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k,n=1}^N M_{kn} t_k t_n \right],$$

így a keresett várható értékekre a karakterisztikus függvény négyszeri parciális deriválásával a

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \langle d_i d_j d_l d_m \rangle &= \frac{\partial \varphi_{\mathbf{d}'}(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial t_i \partial t_j \partial t_l \partial t_m} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_N=0} = \\ &= M_{ij} M_{lm} + M_{il} M_{jm} + M_{jl} M_{im} \end{aligned}$$

kifejezést kapjuk. Ennek alapján

$$\begin{aligned} &\sum_{\kappa, \lambda=1}^2 Q_{\nu\kappa} Q_{\mu\lambda} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m=1}^N \sum_{p,q=1}^N \sum_{r,s=1}^N M_{ip}^* A_{pq}^{(\kappa)} M_{qj}^* M_{lr}^* A_{rs}^{(\lambda)} M_{sm}^* \langle d_i d_j d_l d_m \rangle = \\ &= \sum_{\kappa, \lambda=1}^2 Q_{\nu\kappa} Q_{\mu\lambda} [\text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)}) \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\lambda)}) + 2 \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\lambda)})] = \\ &= \sum_{\kappa=1}^2 Q_{\nu\kappa} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)}) \sum_{\lambda=1}^2 Q_{\mu\lambda} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\lambda)}) + 4 \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{\lambda=1}^2 Q_{\nu\kappa} Q_{\mu\lambda} Q_{\kappa\lambda}^*. \end{aligned}$$

Figyelembe véve még, hogy  $\sum_{\kappa=1}^2 \sum_{\lambda=1}^2 Q_{\nu\kappa} Q_{\mu\lambda} Q_{\kappa\lambda}^* = Q_{\nu\mu}$ , a becslések kovariancia mátrixának elemeire végül is

$$(1.15) \quad \langle \delta \bar{\alpha}^{(\nu)} \delta \bar{\alpha}^{(\mu)} \rangle = Q_{\nu\mu} \quad \nu, \mu = 1, 2$$

adódik. Ezzel a maximum likelihood módszer alapján megadtuk az  $\alpha^{(\nu)}$  paraméterek becslését és e becslések kovariancia mátrixát. Érdekes megjegyezni, hogy az (1.11) és (1.15) összefüggések alapján a  $\log f(\mathbf{d}')$  függvény Hesse-féle mátrixának várható értéke és a becslések kovariancia mátrixa között — egy (—1)-es faktortól eltekintve — reciprocitási kapcsolat áll fenn.

3. Most rátérünk annak a másik módszernek az ismertetésére, amellyel a paraméterek becslését végezni kívánjuk. Mint láttuk, az (1.13) összefüggés az  $\alpha^{(\nu)}$  paraméter becslését a mért  $d_i$  differenciák egy kvadratikus alakjaként adja meg. Bár az (1.13) alatti kvadratikus alak mátrixa maga is függ még a becslött paraméterektől, mégis célszerűnek látszik, hogy a mért  $d_i$  differenciáknak egy kvadratikus alakjából kiindulva próbáljunk az  $\alpha^{(\nu)}$  paraméterekre torzítatlan, jó hatásfokú becslést adni.

Legyen tehát

$$(1.16) \quad \bar{\alpha}^{(\nu)} = \mathbf{d}' \mathbf{C}^{(\nu)} \mathbf{d} \quad \nu = 1, 2$$

az  $\alpha^{(\nu)}$  paraméternek egy kvadratikus becslése, ahol  $\mathbf{C}^{(\nu)}$  a kvadratikus becslés mátrixa.

Mivel megkívánjuk, hogy a becslés torzítatlan legyen, tehát

$$\langle \bar{\alpha}^{(\nu)} \rangle = \alpha^{(\nu)} \quad \nu = 1, 2$$

(eljesüljön, így a  $\mathbf{C}^{(\nu)}$  mátrixnak ki kell elégítenie a

$$(1.17) \quad \text{spur}(\mathbf{C}^{(\nu)} \mathbf{A}^{(\mu)}) = \delta_{\nu\mu} \quad \nu, \mu = 1, 2$$

feltételeket, ahol  $\delta_{\nu\mu}$  a Kronecker-szimbólumot jelenti:

$$\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \nu = \mu \\ 0 & \text{ha } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Ahhoz, hogy a becslések hatásfokáról beszélhessünk, fel kell írunk az  $\bar{\alpha}^{(1)}$ ,  $\bar{\alpha}^{(2)}$  valószínűségi változók  $\mathbf{Q} = [Q_{\nu\mu}]$  kovariancia mátrixának elemeit. Figyelembe véve a  $\langle d_i d_j d_l d_m \rangle$  várható értékek (1.14) alatti kifejezéseit, a kovariancia mátrix elemeire

$$(1.18) \quad Q_{\nu\mu} = \langle \delta \bar{\alpha}^{(\nu)} \delta \bar{\alpha}^{(\mu)} \rangle = \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m=1}^N C_{ij}^{(\nu)} C_{lm}^{(\mu)} [\langle d_i d_j d_l d_m \rangle - M_{ij} M_{lm}] = \\ = 2 \text{ spur}(\mathbf{C}^{(\nu)} \mathbf{M} \mathbf{C}^{(\mu)} \mathbf{M}) \quad \nu, \mu = 1, 2$$

adódik. Jó hatásfokú becsléseket akkor kapunk, ha a  $\mathbf{C}^{(\nu)}$  mátrixokat úgy választjuk meg, hogy a  $Q_{\nu\mu}$  szórásnégyzeteket minimalizálja. Így tehát a következő szélsőérték-feladatra jutottunk: Meghatározandó

$$(1.19) \quad \min_{(\mathbf{C}^{(\nu)})} Q_{\nu\nu} \quad \nu = 1, 2$$

és azok a  $\mathbf{C}^{(\nu)}$  mátrixok, amelyek a minimumot szolgáltatják, ahol a  $\mathbf{C}^{(\nu)}$  befutja azoknak az  $N$ -edrendű szimmetrikus mátrixoknak az osztályát, amelyek



az (1.17) feltételi egyenleteket kielégítik. Ezt a feltételes szélsőértékfeladatot a Lagrange-féle multiplikátorok segítségével oldjuk meg. A minimumot szolgáltatató  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixok meghatározására így a

$$(1.20) \quad 4 \mathbf{M} \mathbf{C}^{(v)} \mathbf{M} - \sum_{\kappa=1}^2 L_{v\kappa} \mathbf{A}^{(\kappa)} = 0 \quad v = 1, 2$$

egyenleteket kapjuk, ahol  $L_{v\kappa}$  jelöli a Lagrange-féle multiplikátorokat.

A feladat tehát az (1.17) és (1.20) egyenletekből a  $\mathbf{C}^{(v)}$  ( $v = 1, 2$ ) mátrixok és az  $L_{v\kappa}$  ( $v, \kappa = 1, 2$ ) multiplikátorok kiszámítása. Könnyen belátható, hogy az (1.17) és (1.20) egyenletek az ismeretleneket egyértelműen meghatározzák. Mielőtt az egyenletrendszer megoldására rátérnénk, megmutatjuk, hogy a Lagrange-féle multiplikátorok a kovariancia mátrix elemeinek kétszeresei:

$$(1.21) \quad L_{v\mu} = 2 Q_{v\mu} \quad v, \mu = 1, 2.$$

Valóban, ha az (1.20) egyenletet balról a  $\mathbf{C}^{(\mu)}$  mátrixszal megszorozzuk és képezzük az így nyert mátrixok spurját, akkor az (1.17) és (1.18) összefüggés felhasználásával az (1.21) összefüggés adódik.

Ezek után a  $\mathbf{C}^{(v)}$  és a  $\mathbf{Q}$  mátrixok kiszámítása céljából a következőképpen járunk el. Helyettesítsük a Lagrange-féle multiplikátoroknak az (1.21) kifejezését az (1.20) egyenletbe és szorozzuk meg az egyenletet mindkét oldalról az  $\mathbf{M}^{-1}$  mátrixszal. Így a  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixra

$$(1.22) \quad \mathbf{C}^{(v)} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^2 Q_{v\kappa} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)} \mathbf{M}^{-1}$$

adódik. Ebből az összefüggésből az (1.17) feltételi egyenletek felhasználásával kifejezhetők a  $Q_{v\kappa}$  szórások. Szorozzuk meg ugyanis az (1.22) egyenletet jobbról az  $\mathbf{A}^{(\mu)}$  mátrixszal és vegyük az így adódó mátrixok spurját. Figyelembe véve az (1.17) feltételi egyenleteket, ezzel az

$$(1.23) \quad \frac{1}{2} \text{spur} \sum_{\kappa=1}^2 Q_{v\kappa} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\kappa)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)} = \delta_{v\mu} \quad v, \mu = 1, 2$$

összefüggésre jutunk. Innen már közvetlenül következik, hogy ha  $Q_{v\mu}^*$  ( $v, \mu = 1, 2$ ) jelöli a  $\mathbf{Q} = [Q_{v\mu}]$  kovariancia mátrix inverzének az elemeit, akkor ezekre a

$$(1.24) \quad Q_{v\mu}^* = \frac{1}{2} \text{spur} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(v)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)}) \quad v, \mu = 1, 2$$

kifejezést kapjuk. Figyelembe véve, hogy az (1.24) jobboldalán álló kifejezés  $N$ -nek monton növekvő függvénye, könnyű belátni, hogy a becslések  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrixa a méréspontok számának növelésével 0-hoz tart, tehát a *becslés konzisztens*.

Ezzel az optimális kvadratikus becslés mátrixait és kovariancia mátrixát meghatároztuk.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> E mátrixok ugyan még tartalmazzák a becsülendő paramétereket, azonban amint a III. részben látni fogjuk, a kapott összefüggéseink alkalmasak azok meghatározására.



Összevetve az (1.16) és (1.22) összefüggéseket az (1.13) összefüggéssel, illetve az (1.24) összefüggést az (1.15) alattival, látható, hogy az *optimális kvadratikus becslés* valóban *megegyezik a maximum likelihood becsléssel*, amint állítottuk.

A kapott (1.22) és (1.24) képletek azonban  $N \gg 1$  esetén, — vagyis amikor a mérési pontokat sűrítjük, — gyakorlati számításra nem alkalmasak. Célszerűnek látszik, hogy ilyen esetre érvényes, egyszerűbb és könnyen kezelhető aszimptotikus formulákat vezessünk le. A következőkben ezzel a feladattal foglalkozunk.

4. Az (1.2) és (1.24) összefüggésből látható, hogy a  $Q_{\nu\mu}^*$  elemek az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  paraméterek homogén kifejezései. Ezért célszerű, ha a paraméterek, illetve becsléseik hányadosára egy új változót vezetünk be és a további tárgyalás során valamennyi előforduló kifejezést e változó függvényében írunk fel. Jelölje  $x$  illetve  $\bar{x}$  ezt a változót, tehát

$$(1.25) \quad x = \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}} \quad \text{és} \quad \bar{x} = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}.$$

Vezessük be a

$$(1.26) \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\alpha^{(1)}} \mathbf{M} = \mathbf{A}^{(1)} + x \mathbf{A}^{(2)}$$

mátrixot és a

$$(1.27) \quad Q_{\nu\mu}^* = \frac{N}{2 \alpha^{(1)2}} q_{\nu\mu}^*(x) \quad \nu, \mu = 1, 2$$

összefüggés segítségével definiált  $q_{\nu\mu}^*(x)$  függvényeket. Ezekre az (1.2) és (1.26) összefüggések alapján a következő relációk érvényesek:

$$q_{\nu\mu}^*(x) = q_{\mu\nu}^*(x) \quad \nu, \mu = 1, 2,$$

$$q_{1\nu}^*(x) + x q_{2\nu}^*(x) = \frac{1}{N} \text{spur} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{(\nu)}) \quad \nu = 1, 2,$$

$$q_{11}^*(x) + 2x q_{12}^*(x) + x^2 q_{22}^*(x) = 1.$$

Az (1.24) összefüggés helyett

$$(1.28) \quad q_{\nu\mu}^*(x) = \frac{1}{N} \text{spur} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)}) \quad \nu, \mu = 1, 2$$

írható. Az (1.27) összefüggésből látszik, hogy az így nyert  $q_{\nu\mu}^*(x)$  elemekből alkotott mátrix inverzének  $q_{\nu\mu}(x)$  elemei és a keresett  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrix elemei között a következő egyszerű összefüggés áll fenn:

$$(1.29) \quad Q_{\nu\mu} = \frac{2 \alpha^{(1)2}}{N} q_{\nu\mu}(x) \quad \nu, \mu = 1, 2.$$

Feladatunk tehát abban áll, hogy a  $q_{\nu\mu}^*(x)$  (1.28) kifejezésekre, majd az inverz mátrix  $q_{\nu\mu}(x)$  elemeire  $N \gg 1$  esetén érvényes aszimptotikus formulákat nyerjünk. Ezt az a körülmény teszi lehetővé, hogy az (1.28) összefüggés jobb oldalán álló  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{A}^{(\nu)}$  mátrixok — egy-egy sarokelemtől eltekintve — a  $\mathbf{H} = [H_{ij}]$

$$(1.30) \quad H_{ij} = \delta_{i, i-j} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

mátrix polinomjaiként írhatók fel. A  $\mathbf{H}$  mátrixot a továbbiakban *elemi Toeplitz-féle* mátrixnak fogjuk nevezni. Az (1.28) összefüggések szerint tehát a  $q_{\nu\mu}^*(x)$  kifejezések meghatározásához a  $\mathbf{H}$  mátrix bizonyos racionális tört kifejezéseinek a spurját kell képezni. (A sarokelemek módosításával ugyanis elérhető, hogy az (1.28) összefüggés jobb oldalán álló mátrixok felcserélhetők legyenek és így a négy tényezőzős mátrix-szorzat a  $\mathbf{H}$  mátrixnak egy racionális törtkifejezéseként írható fel.)

A mondottak szerint tehát az  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  és a  $\mathbf{P}$  mátrix, az (1.3), (1.4) és (1.26) definíciójuk alapján a  $\mathbf{H}$  mátrix segítségével a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= 4\mathbf{E} + \mathbf{H} \\ (1.31) \quad \mathbf{A}^{(2)} &= 4\mathbf{E} - 4\mathbf{H} + \mathbf{H}^2 + \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{P} &= 4(1+x)\mathbf{E} + (1-4x)\mathbf{H} + x\mathbf{H}^2 + x\mathbf{H}_0. \end{aligned}$$

Az itt szereplő  $\mathbf{H}_0$  mátrixnak csak két zérustól különböző eleme van (a bal felső és a jobb alsó sarokelem). Megmutatható, hogy ha elhanyagoljuk a  $\mathbf{H}_0$  mátrixot, akkor a végeredményben elkövetett hiba  $\frac{1}{N}$  nagyságrendű, ezért a továbbiakban a  $\mathbf{H}_0$  mátrixot elhagyjuk.

Vezessük be az (1.28) összefüggésben szereplő mátrix-szorzatra az

$$(1.32) \quad \mathbf{R}^{(\nu\mu)} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{(\mu)} \quad \nu, \mu = 1, 2$$

jelölést. Az (1.31) összefüggések felhasználásával tehát (elhagyva a  $\mathbf{H}_0$  mátrixot),

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(11)} &= \left[ \frac{4\mathbf{E} + \mathbf{H}}{4(1+x)\mathbf{E} + (1-4x)\mathbf{H} + x\mathbf{H}^2} \right]^2 \\ (1.33) \quad \mathbf{R}^{(12)} = \mathbf{R}^{(21)} &= \frac{(4\mathbf{E} + \mathbf{H})(4\mathbf{E} - 4\mathbf{H} + \mathbf{H}^2)}{[4(1+x)\mathbf{E} + (1-4x)\mathbf{H} + x\mathbf{H}^2]^2} \\ \mathbf{R}^{(22)} &= \left[ \frac{4\mathbf{E} - 4\mathbf{H} + \mathbf{H}^2}{4(1+x)\mathbf{E} + (1-4x)\mathbf{H} + x\mathbf{H}^2} \right]^2 \end{aligned}$$

adódik. Vegyük most tekintetbe, hogy egy mátrix valamely racionális kifejezésének a sajátértékei megegyeznek a mátrix sajátértékeinek e racionális kifejezéseivel, továbbá, hogy egy mátrix spurját megadja a sajátértékeinek az összege. Ennek alapján, ha az  $\mathbf{R}^{(\nu\mu)}$  mátrix sajátértékeit  $\varrho_k^{(\nu\mu)}$  jelöli, az (1.33) összefüggések szerint pedig az  $\mathbf{R}^{(\nu\mu)}$  mátrixokat  $\mathbf{H}$  függvényében az

$$(1.34) \quad \mathbf{R}^{(\nu\mu)} = f_{\nu\mu}(\mathbf{H}) \quad \nu, \mu = 1, 2$$

függvénykapcsolat határozza meg, akkor a keresett  $q_{\nu\mu}^*(x)$  függvényekre

$$(1.35) \quad q_{\nu\mu}^*(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varrho_k^{(\nu\mu)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_{\nu\mu}(\eta_k) \quad \nu, \mu = 1, 2$$

adódik, ahol

$$\eta_k = 2 \cos \frac{k\pi}{N+1} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

a  $\mathbf{H}$  elemi Toeplitz-féle mátrix sajátértékeit jelenti (lásd pl. [5] 155–156 o.).



Az (1.35) összefüggésben szereplő összeg határozott integrál közelítő összegeként tekinthető, ezért ha  $N \gg 1$ , akkor az összeg az integrállal helyettesíthető:

$$q_{\nu\mu}^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_{\nu\mu}(2 \cos z) dz.$$

Figyelembe véve az (1.33) és (1.32) összefüggéseket, innen

$$q_{11}^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{1 + \frac{1}{2} \cos z}{1 + x + \left(\frac{1}{2} - 2x\right) \cos z + x \cos^2 z} \right]^2 dz,$$

$$q_{12}^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cos z\right) (1 - \cos z)^2}{\left[1 + x + \left(\frac{1}{2} - 2x\right) \cos z + x \cos^2 z\right]^2} dz,$$

$$q_{22}^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{(1 - \cos z)^2}{1 + x + \left(\frac{1}{2} - 2x\right) \cos z + x \cos^2 z} \right]^2 dz$$

adódik.

Ha ezeket az integrálokat kiszámítjuk, és az így nyert  $[q_{\nu\mu}^*(x)]$  másodrendű mátrixot invertáljuk, akkor az inverz mátrix  $q_{\nu\mu}(x)$  elemeire az alábbi kifejezéseket kapjuk:

$$q_{11}(x) = \frac{1}{K} \{32v^5 + 117v^4 + 126v^3 + 13v^2 - 72v - 48\},$$

$$q_{12}(x) = -\frac{1}{24K} \{(4v^3 + 20v^2 + 40v + 32)v^3 \sqrt{6(v+2)} +$$

$$(1.36) \quad + (15v^6 + 90v^5 + 222v^4 + 114v^3 - 117v^2 - 216v - 144)\},$$

$$q_{22}(x) = \frac{1}{576K} \{(12v^5 + 60v^4 + 100v^3 + 92v^2 + 120v + 96)v^3 \sqrt{6(v+2)} +$$

$$+ (45v^8 + 270v^7 + 591v^6 + 612v^5 + 423v^4 + 270v^3 - 171v^2 - 648v - 432)\},$$

ahol

$$K = (12v^3 + 30v^2 + 22v + 8)v \sqrt{6(v+2)} - (3v^4 + 18v^3 + 51v^2 + 72v + 48)$$

és

$$v = \sqrt{3 + 24x}.$$

A  $q_{\nu\mu}(x)$  függvények az 1. ábrán láthatók.



Az (1.26) és az (1.18) összefüggés alapján meghatározható az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  valószínűségi változók relatív szórása.

Tekintettel arra, hogy a feladat tulajdonképpen az  $\alpha^{(1)}$  jel-paraméter minél jobb becslése, ezért a továbbiakban elsősorban  $\alpha^{(1)}$  becslésének relatív szórását fogjuk vizsgálni. Jelölje ezt  $\sigma$ , akkor

$$(1.37) \quad \sigma^2 = \frac{\langle \delta(\bar{\alpha}^{(1)})^2 \rangle}{\alpha^{(1)^2}} = \frac{2}{N} q_{11}(x),$$

ahol

$$q_{11}(x) = \frac{q_{22}^*(x)}{q_{11}^*(x) q_{22}^*(x) - q_{12}^{*2}(x)}.$$

Gyakorlati alkalmazásnál az (1.37) egyenlet jobboldali kifejezésében  $\alpha^{(1)}$  és  $x$  valódi értéke helyére a becsléssel kapott  $\bar{\alpha}^{(1)}$  és  $\bar{x}$  értékeket kell behelyettesítenünk.

5. Az alábbiakban azzal foglalkozunk, hogy egyrészt „zaj” jelenléte, másrészt a mérések számának a növelése hogyan befolyásolja az  $\alpha^{(1)}$  jel-paraméter becslését.

Abban az esetben, ha tudjuk, hogy a mérési hiba *elhanyagolható*, akkor az  $\alpha^{(1)}$  jel-paraméter becslésének relatív szórását a következő kifejezés adja:

$$(1.38) \quad \frac{\langle (\delta \bar{\alpha}^{(1)})^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{(1)}} = \left( \frac{2}{N} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Összehasonlítva az (1.37) és (1.38) kifejezést, látható, hogy a  $q_{11}(x)$  függvény annak mértékéül szolgál, hogy zaj jelenléte mennyire rontja az elérhető pontosságot.

Érdekes megjegyezni, hogy

$$q_{11}(0) = 1,7561,$$

azaz a háttér figyelembevételével számoló két-paraméteres módszer segítségével  $\alpha^{(1)}$  kisebb pontossággal becsülhető, mint az egyparaméteres módszerrel, még abban az esetben is, amikor a kétparaméteres módszerrel végzett becslésnél  $\bar{\alpha}^{(2)} \sim 0$  adódik. Tehát zaj létezésének a pusztá feltételezése is számottevően befolyásolja a jel-paraméter becslésének a pontosságát, még abban az esetben is, ha a zaj elhanyagolhatóan kicsi.

Az (1.37) egyenlet abban az esetben adja meg az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórását, ha az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  paraméterekre egyidejűleg végezzük el a becslést a mért  $d_i$  differenciákkal.

Ha az  $\alpha^{(2)}$  zaj-paraméter más nyomokon végzett független mérésekből becsülhető, akkor a jel-paraméter becslésének hatásfoka valamivel javítható. Jelölje ebben az esetben  $\sigma_1$  az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  relatív szórását, akkor nyilvánvalóan

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{N q_{11}^*(x)}.$$

Annak mértékéül, hogy a becslés hatásfokában milyen veszteséget okoz, ha a zaj-paramétert nem tudjuk előzetesen más független mérésekből becsülni,

a  $\sigma^2$  és  $\sigma_1^2$  relatív szórásnégyzetek hányadosa szolgál:

$$p(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} = q_{11}(x) q_{11}^*(x) = \frac{1}{1 - \frac{q_{12}^{*2}(x)}{q_{11}^*(x) q_{22}^*(x)}}.$$

A  $p(x)$  függvény menetét az 1. ábra mutatja.

Most vizsgáljuk meg azt, hogy a becslés pontossága hogyan növekszik a mérési pontok sűrítésével. Tekintsünk egy nyomot, amelynek az  $X$  tengelyen való vetülete  $L$  hosszúságú. Ha  $N + 2$  mérést végzünk, akkor a cellahossz:

$$s = \frac{L}{N + 1}.$$

Bevezetve a

$$\gamma = \frac{\kappa_2^2}{aL}$$

jelölést, az (1.5) és (1.25) összefüggésből

$$x = \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}} = (N + 1)^3 \gamma$$

következik. Ezzel a relatív szórásnégyzet (1.37) képlete a

$$\sigma^2 = \frac{2 q_{11}([N + 1]^3 \gamma)}{N + 1}$$

alakban, illetve

$$z = (N + 1) \gamma^{\frac{1}{3}}$$

transzformációval

$$(1.39) \quad \sigma^2 = 2 \gamma^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{1}{N} \right) r(z)$$

alakban írható, ahol

$$(1.40) \quad r(z) = \frac{q_{11}(z^3)}{z}.$$

Az  $r(z)$  függvényt a 3. ábra tünteti fel. Az  $r(z)$  függvény monoton csökkenő, amiből következik, hogy  $\bar{\alpha}^{(1)}$  relatív szórása a mérési pontok sűrítésével monoton csökken. Ez az eredmény várható is, hiszen minél több koordinátát mérünk, annál több információhoz jutunk, tehát annál jobb becslést tudunk adni.

A  $q_{11}(x)$  függvény (1.36) alatti kifejezéséből következik, hogy nagy  $x$  értékekre

$$q_{11}(x) \sim x^{\frac{1}{4}},$$

ahonnan az (1.40) összefüggés felhasználásával nagy  $N$  értékekre

$$\sigma \sim N^{-\frac{1}{8}}$$



adódik. Ez azt jelenti, hogy  $\alpha^{(1)}$  becslésének a pontossága mindössze a mérési pontok számának *nyolcadik gyökével* nő, azaz a növekedés olyan lassúvá válik, hogy bizonyos határon túl nem érdemes a mérési pontokat sűríteni.

## II. rész

Az első részben foglaltak alapján látható, hogy a  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrix ismeretében meghatározhatók az optimális kvadratikus becslés  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixai (lásd [1.16] és [1.22]). Gyakorlatilag azonban ezeknek a  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixoknak a meghatározása igen fáradságos és hosszadalmas numerikus munkát igényelne. Ezért kívánatosnak látszik az első részben ismertetett optimális becslés helyett olyan *közelítő eljárás* kidolgozása, amelynél a megfelelő kvadratikus alakok mátrixai egyszerű szerkezetűek, tehát a jel- és zaj-paraméter becslése a mért  $d_i$  differenciákból könnyen számítható,  $\bar{\alpha}^{(1)}$  relatív szórása pedig nem növekszik számottevően. Ezért a következőkben az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixok helyett egyszerű szerkezetű, könnyen kezelhető mátrixok segítségével adunk az  $\alpha^{(v)}$  paraméterekre torzítatlan becslést. Az optimális becsléstől való megkülönböztetésül jelölje  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  ezen becslését  $\bar{\alpha}^{(1)}$  és  $\bar{\alpha}^{(2)}$ . Nyilván a becsléshez tartozó relatív szórások az optimális kvadratikus becsléshez tartozó relatív szórásoknál nagyobbak lesznek, azonban, mivel az „optimális relatív szórás” ismert, minden egyes esetben eldönthető, hogy kielégítő-e a választott becslés pontossága.

Tekintsük az  $\alpha^{(v)}$  paraméter

$$(2.1) \quad \bar{\alpha}^{(v)} = \mathbf{d}' \mathbf{V}^{(v)} \mathbf{d} \quad v = 1, 2$$

kvadratikus becslését. A  $\mathbf{V}^{(v)}$  mátrixokat úgy választjuk, hogy torzítatlan becsléseket kapjunk és a becslések relatív szórása lehetőleg kevésbé térjen el az „optimális relatív szórástól”. Vegyünk fel e célból egyelőre tetszőleges  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l$ ) alaplátrixokat és a  $\mathbf{V}^{(v)}$  mátrixokat tekintsük ezek lineáris kombinációinak:

$$(2.2) \quad \mathbf{V}^{(v)} = \sum_{\lambda=0}^l B_{\lambda v} \mathbf{G}^{(\lambda)} \quad v = 1, 2$$

Az itt szereplő  $B_{\lambda v}$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l$ ;  $v = 1, 2$ ) együtthatókat kell tehát úgy meghatározni, hogy a  $\mathbf{V}^{(v)}$  mátrixokra a fenti feltételek teljesüljenek. Az első rész (1.17), (1.18) és (1.19) képleteinek megfelelően most a következő feladatra jutunk:

A

$$(2.3) \quad \text{spur}(\mathbf{V}^{(v)} \mathbf{A}^{(\mu)}) = \delta_{v\mu} \quad v, \mu = 1, 2$$

feltételek mellett keressük a  $Q_{v\mu}$  kifejezésnek a  $B_{\lambda v}$  értékek szerint vett minimumát, ahol

$$(2.4) \quad Q_{v\mu} = \langle \delta \bar{\alpha}^{(v)} \delta \bar{\alpha}^{(\mu)} \rangle = 2 \text{ spur}(\mathbf{V}^{(v)} \mathbf{M} \mathbf{V}^{(\mu)} \mathbf{M}) \quad v, \mu = 1, 2.$$

Bevezetve a

$$(2.5) \quad T_{\lambda\mu} = \text{spur}(\mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{A}^{(\mu)}) \quad \lambda = 0, 1, \dots, l; \mu = 1, 2$$

jelöléseket, esetünkben a (2.3) feltételek a

$$(2.6) \quad \sum_{\lambda=0}^l B_{\lambda v} T_{\lambda\mu} = \delta_{v\mu} \quad v, \mu = 1, 2$$



összefüggésekre vezetnek. A feltételes szélsőérték-feladat a minimalizáló  $B_{\lambda\nu}$  értékek meghatározására a

$$(2.7) \quad 4 \sum_{\mu=0}^l \text{spur} (\mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{M} \mathbf{G}^{(\mu)} \mathbf{M}) B_{\mu\nu} - \sum_{\kappa=1}^2 T_{\lambda\kappa} L_{\kappa\nu} = 0,$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, l; \quad \nu = 1, 2$$

egyenletet adja, ahol  $L_{\kappa\nu}$  a Lagrange-multiplikátorokat jelöli.

Jelölje  $\mathbf{T}$  a  $T_{\lambda\nu}$  és  $\mathbf{B}$  a  $B_{\lambda\nu}$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l; \nu = 1, 2$ ) elemekből álló mátrixot, vezessük be továbbá az  $\mathbf{S} = [S_{\lambda\mu}]$  kvadratikus mátrixot, amelynek elemeit az

$$(2.8) \quad S_{\lambda\mu} = \text{spur} (\mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{P} \mathbf{G}^{(\mu)} \mathbf{P}) \quad \lambda, \mu = 0, 1, \dots, l$$

kifejezések adják (a  $\mathbf{P}$  mátrixot az (1.26) összefüggés definiálja).

A most bevezetett jelöléssel a (2.6) feltételek a

$$(2.9) \quad \mathbf{B}' \mathbf{T} = \mathbf{E}$$

mátrixegyenlet alakjában írhatók, ahol  $\mathbf{B}'$  a  $\mathbf{B}$  mátrix transzponáltját,  $\mathbf{E}$  pedig a másodrendű egység mátrixot jelöli.

A (2.8) alatt bevezetett  $\mathbf{S}$  mátrix segítségével a  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrixra a (2.4) helyett a

$$(2.10) \quad \mathbf{Q} = 2 \alpha^{(1)^2} \mathbf{B}' \mathbf{S} \mathbf{B}$$

összefüggés írható, a (2.7) minimumfeltétel pedig a

$$(2.11) \quad 4 \alpha^{(1)^2} \mathbf{S} \mathbf{B} - \mathbf{T} \mathbf{L} = 0$$

mátrixalakot ölti, ahol  $\mathbf{L}$  az  $L_{\kappa\nu}$  elemekből álló mátrix. Szorozzuk balról a (2.11) egyenletet a  $\mathbf{B}'$  mátrixszal, ekkor a (2.9) összefüggés alapján az  $\mathbf{L}$  mátrixra az

$$(2.12) \quad \mathbf{L} = 4 \alpha^{(1)^2} \mathbf{B}' \mathbf{S} \mathbf{B}$$

kifejezést kapjuk. Visszahelyettesítve ezt a (2.11) egyenletbe, az

$$(2.13) \quad \mathbf{S} \mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{B}' \mathbf{S} \mathbf{B}$$

összefüggésre jutunk. A (2.13) egyenlet már meghatározza a  $\mathbf{B}$  mátrixot. Szorozzuk ugyanis (2.13) mindkét oldalát balról az  $\mathbf{S}^{-1}$  mátrixszal (a  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  mátrixokat úgy kell megválasztani, hogy  $\mathbf{S}$  inverze létezzék), akkor:

$$(2.14) \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{B}' \mathbf{S} \mathbf{B}.$$

A kapott (2.14) összefüggést ismét szorozzuk meg balról a  $\mathbf{T}'$  mátrixszal (a  $\mathbf{T}$  transzponáltjával), akkor (2.9) alapján az

$$\mathbf{E} = (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}) (\mathbf{B}' \mathbf{S} \mathbf{B})$$

összefüggésre jutunk. Ha a  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  mátrixokat úgy választottuk, hogy a  $\mathbf{T}$  oszlopai lineárisan függetlenek legyenek, akkor a másodrendű  $\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}$  mátrix invertálható és így

$$(2.15) \quad \mathbf{B}' \mathbf{S} \mathbf{B} = (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T})^{-1}$$

adódik. Behelyettesítve ezt most már a (2.14) ill. (2.10) összefüggésbe, a **B** ill. **Q** mátrixra végül is a

$$(2.16) \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T})^{-1},$$

$$(2.17) \quad \mathbf{Q} = 2 \alpha^{(1)2} (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T})^{-1}$$

kifejezést kapjuk. Ilyenformán a becslés szórása, a **B** mátrix explicit ismerete nélkül is, csupán a **T** és **S** mátrixokkal kifejezhető.

### III. rész

1. A következőkben azzal foglalkozunk, hogy hogyan célszerű a  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l$ ) alaplátrixokat úgy megválasztani, hogy ezeknek egy-egy alkalmas lineáris kombinációja az optimális kvadrátikus becsléshez tartozó (1.22) alatti  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixokat lehetőleg jól közelítse. A közelítés mértékéül természetesen a választott becslés relatív szórásának az „optimális relatív szórás”-tól való (százalékos) eltérése szolgál. Először tehát azt vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi a  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixok szerkezetét. Meg fogjuk mutatni, hogy — nagy rendszám esetén, azaz ha  $N \gg 1$  — e mátrixok „kvázi Toeplitz-típusúak”, vagyis a mátrixok bal felső és jobb alsó sarkának bizonyos környezetétől eltekintve az elemek a főátló, valamint az ezzel párhuzamos ferde sorok mentén közel állandóak. Könnyen belátható, hogy a kvázi Toeplitz-típusú mátrixok szorzata is kvázi Toeplitz-típusú, ezért a  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixok (1.22) alatti kifejezését, valamint az (1.26), (1.3) és (1.4) jelöléseket figyelembe véve, elegendő azt megmutatni, hogy a **P** mátrix inverze minden pozitív  $x$ -re kvázi Toeplitz-típusú. Bontsuk fel ezért a **P** mátrixot a **H** mátrixban lineáris tényezők szorzatára:

$$(3.1) \quad \mathbf{P} = x (\mathbf{H} - z_1 \mathbf{E}) (\mathbf{H} - z_2 \mathbf{E}),$$

ahol

$$(3.2) \quad z_{1,2} = \begin{cases} \frac{4x - 1 \pm \sqrt{1 - 24x}}{2x} & \text{ha } x < \frac{1}{24} \\ -10 & \text{ha } x = \frac{1}{24} \\ \frac{4x - 1 \pm \sqrt{24x - 1}}{2x} & \text{ha } x > \frac{1}{24}. \end{cases}$$

A **P** mátrix inverzét  $x \neq \frac{1}{24}$  esetén a

$$(3.3) \quad [(\mathbf{H} - z_1 \mathbf{E}) (\mathbf{H} - z_2 \mathbf{E})]^{-1} \equiv \frac{1}{z_1 - z_2} [(\mathbf{H} - z_1 \mathbf{E})^{-1} - (\mathbf{H} - z_2 \mathbf{E})^{-1}]$$

azonosság felhasználásával számítjuk,  $x = \frac{1}{24}$  esetén pedig

$$(3.4) \quad \mathbf{P}^{-1} = 24 (\mathbf{H} + 10 \mathbf{E})^{-2}$$



a mátrix inverze. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $z_{1,2}$  valós. Mivel csak pozitív  $x$  értékek jönnek tekintetbe, ekkor  $0 < x \leq \frac{1}{24}$  és  $z_{1,2} < -4$ .

Ismeretes [6], hogy az  $\mathbf{R} = (\mathbf{H} - 2z\mathbf{E})^{-1}$   $(n-1)$ -edrendű reciprokmátrix elemei

$$(3.5) \quad z = -2 \cos \Theta$$

transzformációval

$$(3.6) \quad R_{kl} = \begin{cases} (-1)^{k+l} \frac{\sin k\Theta \sin(n-l)\Theta}{\sin \Theta \sin n\Theta} & \text{ha } k \leq l \\ (-1)^{k+l} \frac{\sin l\Theta \sin(n-k)\Theta}{\sin \Theta \sin n\Theta} & \text{ha } k \geq l \end{cases}$$

alakban írhatók. Innen látható, hogy amennyiben  $z$  olyan valós szám, amelyre  $z < -2$ , akkor  $\Theta$  tiszta imaginárius:  $\Theta = i\Psi$ , a trigonometrikus függvények helyébe tehát hiperbolikus függvények lépnek. Nagy rendszámú mátrixok esetén a reciprokmátrix elemeire tehát

$$(3.7) \quad R_{kl} \sim \begin{cases} (-1)^{k+l} \frac{\text{sh } k\Psi}{\text{sh } \Psi} e^{-l\Psi} & \text{ha } k \leq l \\ (-1)^{k+l} \frac{\text{sh } l\Psi}{\text{sh } \Psi} e^{-k\Psi} & \text{ha } k \geq l \end{cases}$$

adódik. Ha a  $\Psi$  értékétől függően a  $k$  és  $l$  indexeket olyan nagyra választjuk, hogy  $k\Psi$  és  $l\Psi$  hiperbolikus függvényei exponenciális függvénnyel jól közelíthetők, azaz ha a mátrix bal felső és jobb alsó sarkának bizonyos környezetében levő elemektől eltekintünk, akkor

$$(3.8) \quad R_{kl} \sim (-1)^{|k-l|} \frac{e^{-|k-l|\Psi}}{2 \text{sh } \Psi}$$

írható. Ez azt jelenti, hogy nagy rendszám esetén az  $\mathbf{R}$  reciprokmátrix *kvázi Toeplitz-típusú*. Mivel esetünkben az (3.3) azonosságban szereplő  $z_1$  és  $z_2$  teljesíti a kívánt feltételt (ugyanis  $z_{1,2} < -4$ ), tehát valós  $z_1, z_2$  mellett  $\mathbf{P}$  inverze is kvázi Toeplitz-típusú lesz. Felhasználva, hogy két kvázi Toeplitz-típusú mátrix szorzata is kvázi Toeplitz-típusú, a (3.4) összefüggésből látható, hogy a  $\mathbf{P}^{-1}$  reciprokmátrix az  $x = \frac{1}{24}$  határesetben is *kvázi Toeplitz-típusú*.

A következőkben azt az esetet kell megvizsgálni, amikor  $z_1$  és  $z_2$  konjugált komplexek. A

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = \bar{z}_1$$

jelöléssel a (3.3) azonosság

$$(3.9) \quad [(\mathbf{H} - z_1\mathbf{E})(\mathbf{H} - \bar{z}_1\mathbf{E})]^{-1} \equiv \frac{\text{Im}(\mathbf{H} - z_1\mathbf{E})^{-1}}{\text{Im } z_1}$$

alakban írható. Ahhoz tehát, hogy a  $\mathbf{P}^{-1}$  reciprokmátrixról ebben az esetben is belássuk, hogy az kvázi Toeplitz-típusú, elegendő megmutatni, hogy az



$\text{Im}(\mathbf{H} - z_1 \mathbf{E})^{-1}$  mátrix ilyen. A  $(\mathbf{H} - z_1 \mathbf{E})^{-1}$  reciprokmátrix elemeit a (3.5) transzformáció alkalmazásával ismét a (3.6) képlet szolgáltatja, most azonban  $\Theta$  komplex:

$$\Theta = \Phi + i\Psi.$$

Behelyettesítve a (3.6) kifejezésekbe, a reciprokmátrix elemeinek imaginárius része,  $\text{Im} R_{kl}$  felírható  $\Phi$  trigonometrikus és  $\Psi$  hiperbolikus függvényeinek a segítségével. Figyelembe véve, hogy nagy argumentumú hiperbolikus függvények exponenciális függvénnyel jól közelíthetők,  $n \gg 1$  esetén

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \text{Im} R_{kl} \sim & (-1)^{k+l} \frac{e^{-l\Psi}}{\sin^2 \Phi \text{ch}^2 \Psi + \cos^2 \Phi \text{sh}^2 \Psi} \times \\ & \times \{ \sin \Phi \text{ch} \Psi (\cos l \Phi \cos k \Phi \text{sh} k \Psi + \sin l \Phi \sin k \Phi \text{ch} k \Psi) + \\ & + \cos \Phi \text{sh} \Psi (\sin l \Phi \cos k \Phi \text{sh} k \Psi - \cos l \Phi \sin k \Phi \text{ch} k \Psi) \} \end{aligned}$$

adódik, ha  $k \leq l$  ( $k \geq l$  esetén  $k$  és  $l$  szerepet cserél). Ha  $\Psi$  értékétől függően a  $k$  és  $l$  indexeket ismét elég nagyoknak választjuk, akkor

$$\text{Im} R_{kl} \sim \frac{(-1)^{|l-k|}}{2} \frac{\sin \Phi \cos |l-k| \Phi \text{ch} \Psi + \cos \Phi \sin |l-k| \Phi \text{sh} \Psi}{\sin^2 \Phi \text{ch}^2 \Psi + \cos^2 \Phi \text{sh}^2 \Psi} e^{-|l-k|\Psi}$$

adódik. Ebből következik, hogy a  $\mathbf{P}^{-1}$  reciprokmátrix komplex  $z_{1,2}$  esetén, azaz  $x > \frac{1}{24}$  esetén is kvázi Toeplitz-típusú. Ezzel megmutattuk, hogy az optimális becsléshez tartozó  $\mathbf{C}^{(v)}$  mátrixok kvázi Toeplitz-típusúak.

2. A fentiekből önként kínálkozik az az elgondolás, hogy a  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  alapmátrixokat Toeplitz-típusúaknak válasszuk. E Toeplitz-típusú alapmátrixok megválasztásánál arra törekszünk, hogy a mérési adatok kiértékelése lehetőleg egyszerű számítások segítségével legyen elvégezhető. Mivel az  $\alpha^{(v)}$  paramétereket az  $Y_i$  mérési adatok második differenciáinak kvadratikuss alakjával becsüljük, célszerű a  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  alapmátrixokat úgy megválasztani, hogy azok a mérési adatokból különböző módon számított második differenciák *tiszta négyzetösszegével* való becslésnek feleljenek meg:

$$(3.11) \quad \mathbf{d}' \mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{d} = \mathbf{d}^{(j)\prime} \mathbf{d}^{(j)} \quad \mathbf{d}^{(j)\prime} = (d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \dots, d_N^{(j)}),$$

ahol  $d_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) a mérési adatokból, tetszőleges, de előre meghatározott módon számított második differenciákat jelöli. Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt indokolt, hogy a  $d_i^{(j)}$  második differenciákat a mérési adatokból a

$$(3.12) \quad \begin{aligned} d_i^{(j)} &= Y_{i+2^j} - 2Y_i + Y_{i-2^j} \\ i &= 1, 2, \dots, N; \quad Y_{-k} = Y_{N+1+k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2^j) \end{aligned}$$

képlet alapján számítsuk. Mint látható, e második differenciákat bizonyos mérési adatok átugrásával képezzük, ezért a (3.12) képlettel szerint számított második differenciákat *j-átugrásos második differenciáknak* fogjuk nevezni. Nyilvánvalóan  $j = 0$  esetén ezek a közönséges második differenciákat adják.



Abból a célból, hogy a (3.12)  $j$ -átugrásos második differenciákhoz tartozó (3.11) képlettel definiált  $\mathbf{G}$  alaplátrixot meghatározzuk, fel kell írunk azt a lineáris transzformációt, amely  $\mathbf{d}$  és  $\mathbf{d}^{(j)}$  között fennáll.

Könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{d}^{(j)} = \mathbf{K}^{(j)} \mathbf{d},$$

ahol a  $\mathbf{K}^{(j)}$  mátrix elemei:

$$(3.13) \quad K_{ik}^{(j)} = \begin{cases} 2^j - |i - k| & \text{ha } 2^j \geq |i - k| \\ 0 & \text{ha } 2^j \leq |i - k|. \end{cases}$$

Ezzel a (3.11) összefüggés alapján

$$\mathbf{d}' \mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{d} = \mathbf{d}' (\mathbf{K}^{(j\lambda)})^2 \mathbf{d}$$

adódik, azaz a  $j$ -átugrásos második differenciáknak megfelelő  $\mathbf{G}$  alaplátrix

$$(3.14) \quad \mathbf{G} = (\mathbf{K}^{(j)})^2$$

lesz. A (3.14) összefüggésből látható, hogy a  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  mátrix a Toeplitz-típusú  $\mathbf{K}^{(j\lambda)}$  mátrix négyzete, tehát *majdnem Toeplitz-típusú*.<sup>4</sup> Ebből következik, hogy felírható az elemi Toeplitz-típusú  $\mathbf{H}$  mátrix egy  $2(2^{j\lambda} - 1)$ -edfokú polinomjának és egy „majdnem zérus”  $\mathbf{G}_0^{(\lambda)}$  mátrixnak az összegeként, amely tehát csak a bal felső és jobb alsó sarkának bizonyos környezetében tartalmaz zérustól különböző elemeket:

$$(3.15) \quad \mathbf{G}^{(\lambda)} = P_{2(2^{j\lambda}-1)}(\mathbf{H}) + \mathbf{G}_0^{(\lambda)}.$$

A  $P_{2(2^{j\lambda}-1)}(\mathbf{H})$  polinomok  $j_\lambda = 0, 1, 2, 3$  esetén az alábbiak:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} j_\lambda = 0 & \quad P_0(\mathbf{H}) = \mathbf{E} \\ j_\lambda = 1 & \quad P_2(\mathbf{H}) = (\mathbf{H} + 2\mathbf{E})^2 \\ j_\lambda = 2 & \quad P_6(\mathbf{H}) = (\mathbf{H}^3 + 2\mathbf{H}^2)^2 \\ j_\lambda = 3 & \quad P_{14}(\mathbf{H}) = (\mathbf{H}^7 + 2\mathbf{H}^6 - 4\mathbf{H}^5 - 8\mathbf{H}^4 + 4\mathbf{H}^3 + 8\mathbf{H}^2)^2. \end{aligned}$$

Ezzel tehát meghatároztuk a  $j$ -átugrásos második differenciákhoz tartozó alaplátrixokat.

A következőkben olyan becslésekkel foglalkozunk, amikor két, illetőleg három  $\mathbf{G}^{(\lambda)}$  alaplátrixot választunk. Abban az esetben, amikor két alaplátrixot választunk, a kvadratikus becslés négy  $B_{\lambda\nu}$  paraméterét egyértelműen meghatározzák a becslés torzítatlanságának (2.6) alatti feltételi egyenletei, így ebben az esetben a szórásnégyzetek minimalizálásáról nem beszélhetünk. Ekkor nyilván nem várható, hogy a relatív szórás az „optimális relatív szórás”-t jól közelítse, de mindenesetre érdekes azt vizsgálni, hogy az alaplátrixok különböző megválasztása miként befolyásolja a relatív szórást.

A második részben foglaltak szerint a kvadratikus becslés  $B_{\lambda\nu}$  paramétereit és a becslés  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrixát a (2.16) és (2.17) képletek alapján

<sup>4</sup> *Majdnem Toeplitz-típusúnak* akkor nevezünk egy mátrixot, ha a jobb felső és bal alsó sarkának bizonyos környezetétől eltekintve a fődiagonálisban, illetve a fődiagonálissal párhuzamos sorokban álló elemek állandók. Belátható, hogy két majdnem Toeplitz-típusú mátrix szorzata is majdnem Toeplitz-típusú.

számíthatjuk. Két alaplátrix választása esetén az ezekben a képletekben előforduló mátrixok *kvadrátikus* mátrixok lesznek, tehát az előírt invertálás tényezőnként elvégezhető. Így az alábbi egyszerű összefüggéseket nyerjük:

$$(3.17) \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}'^{-1}$$

$$(3.18) \quad \mathbf{Q} = 2 \alpha^{(1)*} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}'^{-1}.$$

A következő három esetet fogjuk vizsgálni:

$$1^0 \quad j_0 = 0, \quad j_1 = 1,$$

azaz a becslést a közönséges és az egyátugrásos második differenciák tiszta négyzetösszegével végezzük;

$$2^0 \quad j_0 = 0, \quad j_1 = 2,$$

azaz a becslést a közönséges és a kétátugrásos második differenciák tiszta négyzetösszegével végezzük;

$$3^0 \quad j_0 = 0, \quad j_1 = 3,$$

azaz a becslést a közönséges és a háromátugrásos második differenciák tiszta négyzetösszegével végezzük.

Az egyes esetekben a  $\mathbf{T}$ , illetve  $\mathbf{S}$  mátrixok elemeit a (2.5) és (2.8) összefüggésekből számítjuk. Figyelembe véve a  $\mathbf{G}^{(2)}$  alaplátrixok (3.15) alatti előállítását, valamint az  $\mathbf{A}^{(v)}$  és  $\mathbf{P}$  mátrixok (1.3), (1.4), (1.26) alatti kifejezéseit, megállapítható, hogy mind a  $\mathbf{T}$  mind az  $\mathbf{S}$  mátrix elemei olyan mátrixok spurjaiból számíthatók, amelyek a bal felső és jobb alsó sarkok bizonyos környezetétől eltekintve, az elemi Toeplitz-típusú mátrix polinomjaiként írhatók fel. E polinomok majdnem Toeplitz-típusú mátrixok.

Tekintetbe véve, hogy a  $\mathbf{H}$  mátrix páratlan hatványainak diagonálelemei zérussal egyenlők, páros hatványának diagonálelemei pedig, a sarkok bizonyos környezetétől eltekintve, a következők:

$$(H^{2k})_{ii} = \binom{2k}{k} \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

tehát az elemi Toeplitz-típusú mátrix tetszőleges polinomjának a spurját a

$$\text{spur} \left( \sum_{j=0}^n a_j \mathbf{H}^j \right) = n \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} a_{2k} \binom{2k}{k} + O(1)$$

képlet szolgáltatja. Könnyen belátható, hogy az a hiba, amelyet akkor követünk el, ha a keresett spurokat a sarkok bizonyos környezetében levő elemek módosításával Toeplitz-típusúvá kiegészített mátrixokból számítjuk,  $\frac{1}{n}$  nagyságrendű lesz. Mivel tárgyalásaink során feltettük, hogy  $N \gg 1$ , az eddigiekhez hasonlóan az alábbiakban közölt eredményeket is aszimptotikusoknak kell tekintenünk.

A fentiek szerint az említett három esetben a következő eredményeket nyerjük:



1° Az alaplátrixok:

$$\mathbf{G}^{(0)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{H}^2 + 4 \mathbf{H} + 4 \mathbf{E}.$$

A  $\mathbf{T}$  mátrix elemei:

$$T_{01} = \text{spur}(\mathbf{G}^{(0)} \mathbf{A}^{(1)}) = \text{spur}(\mathbf{H} + 4 \mathbf{E}) = 4N,$$

$$T_{02} = \text{spur}(\mathbf{G}^{(0)} \mathbf{A}^{(2)}) = \text{spur}(\mathbf{H}^2 - 4 \mathbf{H} + 4 \mathbf{E}) = 6N,$$

$$T_{11} = \text{spur}(\mathbf{G}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)}) = \text{spur}(\mathbf{H}^3 + 8 \mathbf{H}^2 + 20 \mathbf{H} + 16 \mathbf{E}) = 32N,$$

$$T_{12} = \text{spur}(\mathbf{G}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)}) = \text{spur}(\mathbf{H}^4 - 8 \mathbf{H}^2 + 16 \mathbf{E}) = 6N,$$

tehát

$$\mathbf{T} = N \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}.$$

Az  $\mathbf{S}$  mátrix elemei:

$$\begin{aligned} S_{00} &= \text{spur}(\mathbf{G}^{(0)} \mathbf{P} \mathbf{G}^{(0)} \mathbf{P}) = \text{spur}\{[x \mathbf{H}^2 + (1 - 4x) \mathbf{H} + 4(1 + x) \mathbf{E}]^2\} = \\ &= (70x^2 + 32x + 18)N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{01} &= S_{10} = \text{spur}(\mathbf{G}^{(0)} \mathbf{P} \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{P}) = \\ &= \text{spur}\{[\mathbf{H}^2 + 4 \mathbf{H} + 4 \mathbf{E}][x \mathbf{H}^2 + (1 - 4x) \mathbf{H} + 4(1 + x) \mathbf{E}]\} = \\ &= (28x^2 + 48x + 174)N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \text{spur}(\mathbf{G}^{(1)} \mathbf{P} \mathbf{G}^{(1)} \mathbf{P}) = \\ &= \text{spur}\{[\mathbf{H}^2 + 4 \mathbf{H} + 4 \mathbf{E}]^2[x \mathbf{H}^2 + (1 - 4x) \mathbf{H} + 4(1 + x) \mathbf{E}]\} = \\ &= (70x^2 + 256x + 2212)N, \end{aligned}$$

tehát

$$\mathbf{S} = N \begin{bmatrix} 70x^2 + 32x + 18 & 28x^2 + 48x + 174 \\ 28x^2 + 48x + 174 & 70x^2 + 256x + 2212 \end{bmatrix}.$$

A (3.17) és (3.18) képletekből a becslés  $B_{\lambda\nu}$  paramétereit tartalmazó  $\mathbf{B}$  mátrix és a  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrix most már közvetlenül számítható:

$$(3.19) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{N} \frac{1}{84} \begin{bmatrix} -3 & 16 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$(3.20) \quad \mathbf{Q} = \frac{2\alpha^{(1)^2}}{N} \frac{1}{3528} \begin{bmatrix} 378x^2 + 864x + 8469 & -(1134x^2 + 240x + 2370) \\ -(1134x^2 + 240x + 2370) & 8204x^2 + 3072x + 1160 \end{bmatrix}.$$

Vezessük be a  $j$ -átugrásos második differenciák négyzeteinek átlagára a

$$(3.21) \quad \tilde{d}^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^{(j)^2}$$

jelölést, akkor  $\alpha^{(v)}$  becslésére (3.19) alapján az

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}^{(1)} &= \frac{1}{28} (-\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(1)}) \\ \bar{\alpha}^{(2)} &= \frac{1}{42} (8\tilde{d}^{(0)} - \tilde{d}^{(1)}) \end{aligned}$$

kifejezéseket nyerjük. Az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórásnégyzetét (3.20) szerint a

$$(3.23) \quad q_{11}^{(01)}(x) = \frac{1}{392} (42x^2 + 96x + 941)$$

függvény, továbbá I. részben bevezetett (1.39), (1.40) jelölésekkel, az

$$(3.24) \quad r^{(01)}(z) = \frac{q_{11}^{(01)}(z^3)}{z} = \frac{1}{392} \left( 42z^5 + 96z^2 + 941 \frac{1}{z} \right) \quad (z^3 = x)$$

függvény segítségével számíthatjuk, ha  $x$  helyére az

$$(3.25) \quad \bar{x} = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}} = \frac{2}{3} \frac{8\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(1)}}{-\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(1)}}$$

értéket helyettesítjük be.

Hasonló módon határozható meg a **B** és a **Q** mátrix a másik két esetben. A számítások mellőzésével csupán a végeredményeket közöljük.

2° Az alaplátrixok:

$$\mathbf{G}^{(0)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{H}^6 + 4\mathbf{H}^5 + 4\mathbf{H}^4.$$

A becslés paramétereit tartalmazó **B** mátrix:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{N} \frac{1}{756} \begin{bmatrix} -3 & 128 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A kovariancia mátrix:

$$\mathbf{Q} = \frac{2\alpha^{(1)a}}{N} \frac{1}{285768} \times \begin{bmatrix} 306x^2 + 8928x + 1259055 & -(6630x^2 + 2928x + 560406) \\ -(6630x^2 + 2928x + 560406) & 564364x^2 + 253952x + 330512 \end{bmatrix}.$$

Innen  $\alpha^{(v)}$  becslésére az

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}^{(1)} &= \frac{1}{252} (-\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(2)}) \\ \bar{\alpha}^{(2)} &= \frac{1}{378} (64\tilde{d}^{(0)} - \tilde{d}^{(2)}) \end{aligned}$$



kifejezéseket kapjuk. Az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórásnégyzetét most a

$$(3.27) \quad q_{11}^{(02)}(x) = \frac{1}{31752} (34x^2 + 992x + 139895),$$

illetve az

$$(3.28) \quad r^{(02)}(z) = \frac{q_{11}^{(02)}(z^3)}{z} = \frac{1}{31752} \left( 34z^5 + 992z^2 + 139895 \frac{1}{z} \right) \quad (z^3 = x)$$

függvény segítségével számíthatjuk, ha  $x$  helyére most a

$$(3.29) \quad \bar{x} = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}} = \frac{2}{3} \frac{64\tilde{d}^{(0)} - \tilde{d}^{(2)}}{-\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(2)}}$$

értéket helyettesítjük.

3° Az alapmátrixok:

$$\mathbf{G}^{(0)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{H}^{14} + 4\mathbf{H}^{13} - 4\mathbf{H}^{12} - 32\mathbf{H}^{11} - 8\mathbf{H}^{10} + 96\mathbf{H}^9 + \\ + 64\mathbf{H}^8 - 128\mathbf{H}^7 - 112\mathbf{H}^6 + 64\mathbf{H}^5 + 64\mathbf{H}^4.$$

A  $\mathbf{B}$  mátrixra

$$\mathbf{B} = \frac{1}{N} \frac{1}{6132} \begin{bmatrix} -3 & 1024 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

adódik. A kovariancia mátrix pedig

$$\mathbf{Q} = \frac{2\alpha^{(1)^2}}{N} \frac{1}{18800712} \times \\ \times \begin{bmatrix} 306x^2 + 73440x + 162738963 & - (52326x^2 + 24432x + 87981102) \\ - (52326x^2 + 24432x + 87981102) & 36626572x^2 + 16711680x + 54380064 \end{bmatrix}$$

lesz. Innen  $\alpha^{(v)}$  becslésére

$$(3.30) \quad \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{2044} (-\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(3)}) \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{3066} (512\tilde{d}^{(0)} - \tilde{d}^{(3)})$$

kifejezéseket kapjuk. Az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórásnégyzetét itt a

$$(3.31) \quad q_{11}^{(03)}(x) = \frac{1}{2088968} (34x^2 + 8160x + 18082107),$$

illetve az

$$(3.32) \quad r^{(03)}(z) = \frac{q_{11}^{(03)}(z^3)}{z} = \frac{1}{2088968} \left( 34z^5 + 8160z^2 + 18082107 \frac{1}{z} \right), \quad (z^3 = x)$$

függvény segítségével számíthatjuk, ha  $x$  helyére az

$$\bar{x} = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}} = \frac{2}{3} \frac{512\tilde{d}^{(0)} - \tilde{d}^{(3)}}{-\tilde{d}^{(0)} + \tilde{d}^{(3)}}$$

értéket helyettesítjük.



Az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórását jellemző  $q_{11}^{(0j)}(x)$  függvények görbéit, amelyek az  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  és  $3^\circ$  esetnek megfelelően a (3.23), (3.27) illetve (3.31) egyenletű parabolák, a 2. ábrán tüntettük fel. Az ábra egyszersmind az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $q_{11}(x)$  függvény görbéjét is feltünteti. Az ábrából látható, hogy az  $1^\circ$  és  $2^\circ$  becsléseknek megfelelő parabolák metszéspontjának  $x^{(1,2)} = 3,4560$  abszcisszája, illetve a  $2^\circ$  és  $3^\circ$  becslésnek megfelelő parabolák metszéspontjának  $x^{(2,3)} = 51,8336$  abszcisszája az  $x$  tengelyt három intervallumra osztja. Nyilvánvaló, hogy  $x < x^{(1,2)}$  esetén az  $1^\circ$ ,  $x^{(1,2)} < x < x^{(2,3)}$  esetén a  $2^\circ$ ,  $x > x^{(2,3)}$  esetén pedig a  $3^\circ$  becslés közelíti meg legjobban az optimális kvadratikus becslést. Nevezzük ezeket az intervallumokat az  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ , illetve  $3^\circ$  becslés számára „jó” intervallumnak. Ebből következik, hogy amennyiben az  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ , illetve  $3^\circ$  becsléssel számított (3.25), (3.29) illetve (3.33)  $\bar{x}$  érték az illető becslés számára jó intervallumba esik, akkor az  $\alpha^{(1)}$  és  $\alpha^{(2)}$  paraméterek becslésére kapott  $\bar{\alpha}^{(1)}$  és  $\bar{\alpha}^{(2)}$  értékeket mint „jó” becsléseket elfogadhatjuk, ha azonban  $\bar{x}$  egy másik becslés számára jó intervallumba esik, akkor a becslést ennek megfelelően kell megismételni.

Az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórását változó  $N$  esetén jellemző, — az  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  és  $3^\circ$  esetnek megfelelő (3.24), (3.28) illetve (3.32) egyenletű —  $r^{(0j)}(z)$  függvények görbéit a 3. ábra tünteti fel. Ugyanitt ábráztuk az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $r(z)$  függvényt is. Az ábrából látható, hogy az  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  és  $3^\circ$  becslésekhez olyan  $r^{(0j)}(z)$  függvények tartoznak, amelyeknek jól definiált pozitív  $z_0^{(0j)}$  helyeken minimumuk van. Tekintettel arra, hogy  $z$  arányos a mérések számával,  $N + 1$ -gyel, ez annyit jelent, hogy — az optimális kvadratikus becsléstől eltérően — az  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  illetve  $3^\circ$  becslés esetén a mérési pontok számának növelésével  $\bar{\alpha}^{(1)}$  relatív szórása csak egy bizonyos határig csökken, azon túl ismét növekszik. A  $z_0^{(0j)}$  minimumhelyek az egyes becsléseknél a következők:

$$1^\circ \quad z_0^{(01)} = 1,1956,$$

$$2^\circ \quad z_0^{(02)} = 2,8618,$$

$$3^\circ \quad z_0^{(03)} = 6,5550.$$

A 2. ábrából látható, hogy az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés szórását jellemző  $q_{11}^{(0j)}(x)$  függvény általában nem közelíti meg elég jól az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $q_{11}(x)$  függvényt. A közelítés mértékéül nyilvánvalóan a  $q_{11}^{(0j)}(x)$  függvénynek az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $q_{11}(x)$  függvénytől való százalékos eltérése, azaz

$$h^{(0j)}(x) = \frac{q_{11}^{(0j)}(x) - q_{11}(x)}{q_{11}(x)} 100 \%$$

szolgál. A  $h^{(0j)}(x)$  függvényeket szakaszosan, — csak a megfelelő jósági intervallumokban — ábrázolva a 7. ábrán tüntettük fel.

3. A következőkben azzal az esettel foglalkozunk, amikor a  $\mathbf{G}^{(2)}$  alaplát-rixokat a közönséges, az egyátugrásos és a kétátugrásos második differenciák tiszta négyzetösszegének megfelelően választjuk. A (3.15) és (3.16) képletek felhasználásával tehát,  $j_\lambda = \lambda$  ( $\lambda = 0, 1, 2$ ) választással az alaplát-rixok a következők:

$$(3.34) \quad \mathbf{G}^{(0)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{H}^2 + 4\mathbf{H} + 4\mathbf{E}, \quad \mathbf{G}^{(2)} = \mathbf{H}^6 + 4\mathbf{H}^5 + 4\mathbf{H}^4.$$



A (2.5) illetve (2.8) összefüggéssel definiált  $\mathbf{T}$  és  $\mathbf{S}$  mátrixra ebben az esetben

$$(3.35) \quad \mathbf{T} = N \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 32 & 6 \\ 256 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3.36) \quad \mathbf{S} = N \begin{bmatrix} 70x^2 + 32x + 18 & 29x^2 + 48x + 174 & 36x^2 + 48x + 1494 \\ 28x^2 + 48x + 174 & 70x^2 + 256x + 2212 & 28x^2 + 384x + 22188 \\ 36x^2 + 48x + 1494 & 28x^2 + 384x + 22188 & 70x^2 + 2048x + 282760 \end{bmatrix}$$

adódik.

A  $\mathbf{Q}$  kovariancia mátrix és a becslés  $B_{\lambda}$  paramétereiből alkotott  $\mathbf{B}$  mátrix meghatározásához, amint az a (2.16), (2.17) képletekből látható, a három-tényezős  $\mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$  mátrix-szorzat invertálását kell elvégezni. Tekintettel arra, hogy a  $\mathbf{T}$  mátrix ebben az esetben *nem kvadrátikus*, az invertálást nem lehet tényezőnként elvégezni, indokolt azonban az a törekvés, hogy a keresett reciprok-mátrixot ismét közvetlenül az  $\mathbf{S}$  mátrix segítségével határozzuk meg. Esetünkben ez máresak azért is igen célszerű lenne, mert az  $\mathbf{S}$  mátrix elemei polinomok, ami az invertálást nehezéssé teszi, a bonyolult végeredményből pedig nem volna könnyű felismerni az egyszerűsítés lehetőségét.

A  $\mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$  mátrix invertálásának leglényegesebb gondolata abban áll, hogy a téglalap alakú  $\mathbf{T}$  mátrixot egy harmadik oszloppal nemszinguláris harmadrendű mátrixszá egészítjük ki. Ennek lehetőségét az biztosítja, hogy a  $\mathbf{T}$  mátrix két oszlopa lineárisan független. Jelölje a kiegészített  $\mathbf{T}$  mátrixot  $\hat{\mathbf{T}}$ . Nyilvánvaló, hogy  $\mathbf{T}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$  a kiegészített  $\hat{\mathbf{T}}$  mátrixszal számított  $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{T}}'\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{T}}$  mátrixnak az a minormátrixa, amelyet a harmadik sor és oszlop elhagyásával nyerünk. A feladatot tehát a  $\mathbf{Z}$  mátrix egy minor-mátrixának az invertálására vezettük vissza. Ismeretes azonban (lásd pl. [6]), hogy egy minormátrix inverze az adott mátrix inverzének ismeretében úgy számítható, hogy az adott mátrix ismert inverzéből egy alkalmasan választott diádot levonunk, s a kapott mátrixnak a diád levonása által triviálisan csupa zérust tartalmazó sorát és oszlopát elhagyjuk.<sup>5</sup>

Esetünkben a

$$\mathbf{Z}^{-1} = \hat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{S} \hat{\mathbf{T}}'^{-1}$$

mátrixból kell levonni ennek harmadik oszlopából s harmadik sorából alkotott, és a mátrix (zérustól különböző) jobb alsó sarokelemének reciprokával szorzott diádot.

Ha  $\mathbf{u}$  jelöli a kiegészített  $\hat{\mathbf{T}}'$  mátrix inverzének harmadik oszlopát, akkor ez a levonandó diád

$$\hat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{u} (\mathbf{u}' \mathbf{S} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}' \mathbf{S} \hat{\mathbf{T}}'^{-1}$$

<sup>5</sup> Megjegyezzük, hogy ez az eljárás tetszőleges rendszámú mátrixok esetén alkalmazható, az egyetlen feltétel természetesen az, hogy a  $\mathbf{T}$  mátrix oszlopoi lineárisan független vektorok legyenek. Ha  $\mathbf{S}$   $n$ -edrendű,  $\mathbf{T}$  pedig  $r$  oszlopos mátrix, és  $\mathbf{S}$  elemei polinomok, akkor a fenti három tényezős mátrix-szorzat invertálásához, polinomot tartalmazó  $n$ -edrendű és  $r$ -edrendű mátrixok invertálása helyett csupán egyetlen,  $(n-r)$ -edrendű (polinomot tartalmazó) mátrix invertálását kell elvégezni.

tehát a  $\mathbf{Z}$  mátrixból a harmadik sor és oszlop elhagyásával adódó minormátrix keresett inverzét a

$$(3.37) \quad \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{T}}'^{-1} - \hat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{u}' \mathbf{S} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}' \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{T}}'^{-1}$$

mátrixnak a csupa zérust tartalmazó, harmadik sor és oszlop elhagyásával kapott minormátrixa adja. Kiemelve balra a  $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$ , jobbra a  $\hat{\mathbf{T}}'^{-1}$  mátrixokat, a  $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$  mátrix első két oszlopából alkotott minormátrixot pedig  $\mathbf{U}$ -val jelölve, a keresett reciprokmátrixra a

$$(3.38) \quad (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{U}' \{ \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{u}(\mathbf{u}' \mathbf{S} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}' \mathbf{S} \} \mathbf{U}$$

kifejezés adódik. Ezzel tehát elértük azt, hogy a keresett reciprokmátrix meghatározásához nem szükséges a kellemetlen polinom-elemeket tartalmazó  $\mathbf{S}$  mátrixot invertálni, csupán az  $\mathbf{u}' \mathbf{S} \mathbf{u}$  egyetlen elemet alkotó kifejezést. Esetünkben, amikor az  $\mathbf{S}$  mátrix elemei másodfokú polinomok, látható, hogy a keresett reciprokmátrix elemei negyedfokú és másodfokú polinomok hányadosai lesznek. (Ha a  $\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}$  szorzatot közvetlenül invertáltuk volna, akkor ezen elemek egy tizedfokú és egy nyolcadfokú polinom hányadosaként adódtak volna, amelyek egyszerűsíthetősége nem nyilvánvaló.) A (3.37) képlet felhasználásával, figyelembevétel, hogy e mátrix harmadik sora és oszlopa csupa zérus elemet tartalmaz, a  $\mathbf{B}$  mátrixra

$$(3.39) \quad \mathbf{B} = \mathbf{U} - \mathbf{u}(\mathbf{u}' \mathbf{S} \mathbf{u})^{-1} \mathbf{u}' \mathbf{S} \mathbf{U}$$

adódik.

Esetünkben a (3.35) mátrixot a következőképpen egészítjük ki nonsinguláris  $\hat{\mathbf{T}}$  mátrixszá:

$$\hat{\mathbf{T}} = N \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 32 & 6 & 0 \\ 256 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen

$$\hat{\mathbf{T}}'^{-1} = \frac{1}{84N} \begin{bmatrix} -3 & 16 & 672 \\ 3 & -2 & -756 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix}.$$

Tehát a képleteinkben szereplő  $\mathbf{U}$  és  $\mathbf{u}$  mátrixokra

$$\mathbf{U} = \frac{1}{84N} \begin{bmatrix} -3 & 16 \\ 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \frac{1}{84N} \begin{bmatrix} 672 \\ -756 \\ 34 \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adódik. Behelyettesítve a (3.38) és (3.39) képletekbe, végül a következő eredményre jutunk:



$$\mathbf{B} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \frac{-(121x^2 + 128x + 22837)}{28(1565x^2 + 2944x + 15637)} & \frac{2(1565x^2 + 5632x + 32822)}{21(1565x^2 + 2944x + 15637)} \\ \frac{-(119x^2 + 448x - 47474)}{56(1565x^2 + 2944x + 15637)} & \frac{(1565x^2 - 512x - 6458)}{12(1565x^2 + 2944x + 15637)} \\ \frac{(361x^2 + 704x - 1800)}{56(1565x^2 + 2944x + 15637)} & \frac{-(1565x^2 + 256x - 1548)}{84(1565x^2 + 2944x + 15637)} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

és

$$(3.41) \quad \mathbf{Q} = \frac{2\alpha^{(1)s}}{N} \times \begin{bmatrix} \frac{1139x^4 + 39488x^3 + 5628070x^2 + 11077312x + 26188834}{784(1565x^2 + 2944x + 15637)} & q_{12}^{(012)}(x) \\ q_{12}^{(012)}(x) & q_{22}^{(012)}(x) \end{bmatrix}.$$

(A mátrix  $q_{12}^{(012)}(x)$  és  $q_{22}^{(012)}(x)$  elemeit, — amelyek szintén racionális törtfüggvényei az  $x$ -nek —, ezúttal nem írtuk ki.) A (3.40) képletből látható, hogy a becslés paramétereire nem állandó értékeket, hanem függvényeket kaptunk. Ezeket a 4. és 5. ábrán tüntettük fel. A független változó az (1.25) összefüggés szerint éppen azoknak a paramétereknek a hányadosa, amelyeket becsülni akarunk. A keresett becslésekhez most a következő megfontolással juthatunk. Az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  becsléseket először felírjuk, mint a  $j$ -átugrásos második differenciák négyzetátlagának a  $B_{\lambda\nu}(x)$  becslési paraméterekkel képzett lineáris kombinációját:

$$(3.42) \quad \bar{\alpha}^{(1)}(x) = \sum_{\lambda=0}^2 B_{\lambda 1}(x) \tilde{d}^{(\lambda)}$$

$$(3.43) \quad \bar{\alpha}^{(2)}(x) = \sum_{\lambda=0}^2 B_{\lambda 2}(x) \tilde{d}^{(\lambda)}.$$

Ha képezzük a két becslés hányadosát, és  $x$  helyére az  $\bar{x} = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}$  kifejezést írjuk, akkor nyilvánvaló, hogy a hányadosnak az az értéke, amelyik  $\bar{x}$ -szel megegyezik, szolgáltatja azt az  $\bar{x}_0$  értéket, amelyből a (3.42) és (3.43) képletek segítségével a keresett becslések kiszámíthatók. Tehát a

$$(3.44) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{\lambda=0}^2 B_{\lambda 2}(\bar{x}) \tilde{d}^{(\lambda)}}{\sum_{\lambda=0}^2 B_{\lambda 1}(\bar{x}) \tilde{d}^{(\lambda)}}$$

egyenlet  $\bar{x}_0$  gyökével az  $\bar{\alpha}^{(v)}$  paraméterek becslésére

$$\bar{\alpha}^{(v)} = \sum_{\lambda=0}^2 B_{\lambda\nu}(\bar{x}_0) \tilde{d}^{(\lambda)} \quad v = 1, 2$$

adódik. Az  $\bar{\alpha}^{(1)}$  becslés relatív szórásnégyzete a (3.41) kifejezés szerint a

$$(3.45) \quad q_{11}^{(012)}(x) = \frac{1139x^4 + 39488x^3 + 5628070x^2 + 11077312x + 26188834}{784(1565x^2 + 2944x + 15637)},$$

illetve az

$$(3.46) \quad r^{(012)}(z) = \frac{q_{11}^{(012)}(z^3)}{z} = \frac{1139z^{12} + 39488z^9 + 5628070z^6 + 11077312z^3 + 26188834}{784(1565z^7 + 2944z^4 + 15637z)} \quad (z^3 = x)$$

függvény segítségével számítható, ha  $x$  helyére az  $\bar{x}_0$  értéket helyettesítjük be. A (3.45) függvényt a 2. ábra tünteti fel. Látható az ábrából, hogy  $x < 54,3766$  esetén a függvény görbéje jobban közelíti az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $q_{11}(x)$  függvény görbáját, mint a két alaplátrixszal számított becsléshez tartozó bármelyik  $q_{11}^{(0j)}(x)$  függvény,  $x > 54,3766$  esetén azonban a  $q_{11}^{(03)}(x)$  függvény görbéje közelíti jobban a  $q_{11}(x)$  függvény görbáját. Abban a — gyakorlatilag kevésbé érdekes — esetben tehát, amikor a háttér zaja a jelhez képest igen nagy, akkor a két alaplátrixszal számított  $3^\circ$  becslés jobb a három alaplátrixszal számított becslésnél.

A közelítés mértékéül nyilvánvalóan a  $q_{11}^{(012)}(x)$  függvénynek az optimális kvadratikus becsléshez tartozó  $q_{11}(x)$  függvénytől való százalékos eltérése, azaz

$$h^{(012)}(x) = \frac{q_{11}^{(012)}(x) - q_{11}(x)}{q_{11}(x)} 100\%$$

szolgál. (A  $h^{(012)}(x)$  függvény görbéje a 7. ábrán látható.)

A (3.46) függvény görbáját a 3. ábrán tüntettük fel. Innen látható, hogy az  $r^{(012)}(z)$  függvénynek is van minimuma, mégpedig a

$$(3.47) \quad z_0^{(012)} = 2,9088$$

helyen. Az  $r^{(012)}(z)$  függvény minimuma itt

$$r_{\min}^{(012)} = 1,9954.$$

Ez azt jelenti, hogy a három alaplátrixszal végzett becslésnél a legkisebb relatív szórás a (3.47) kifejezésnek megfelelő  $N_0$  mérés-szám esetén érhető el. A 3. ábrából az is látható, hogy a  $z_0^{(012)}$  minimumhely a két alaplátrixszal végzett  $1^\circ$  és  $2^\circ$  becslésnek megfelelő  $r^{(0j)}(z)$  függvények  $z_0^{(0j)}$  minimumhelyénél nagyobb, az  $r^{(012)}(z)$  függvény  $r_{\min}^{(012)}$  minimuma pedig e két  $r^{(0j)}(z)$  függvény minimumánál kisebb. A  $3^\circ$  becslésnek megfelelő  $r^{(03)}(z)$  függvény minimumhelye azonban nagyobb, a minimuma pedig kisebb, mint az  $r^{(012)}(z)$  függvényé, ami azt jelenti, hogy megfelelő számú mérés esetén a  $3^\circ$  becsléssel kisebb relatív szórás érhető el, mint a három alaplátrixszal végzett becsléssel.

A három alaplátrixszal végzett becslés legfőbb nehézsége a (3.44) egyenlet numerikus megoldásából áll. A (3.44) egyenletet az egyszerűbb

$$(3.48) \quad \sum_{\lambda=0}^2 \tilde{d}^{(\lambda)} g_{\lambda}(x) = 0$$



alakban írjuk, ahol

$$g_0(x) = -(0,0726 x^3 + 2,5808 x^2 + 22,7134 x + 52,5152),$$

$$g_1(x) = -0,0357 x^3 - 2,3254 x^2 + 14,9590 x + 9,0412,$$

$$g_2(x) = 0,1083 x^3 + 0,5242 x^2 - 0,4888 x - 0,3096.$$

(A függvények görbéi a 6. ábrán láthatók.) E harmadfokú egyenlet keresett gyökének első közelítéseként a (3.25), (3.29) vagy (3.33) képletből számított  $\bar{x}$  értéket tekinthetjük, amelyből kiindulva pl. a Newton-módszerrel néhány iterációs lépésben eljuthatunk a keresett gyökhöz.

A 2. ábrán vázolt függvények vizsgálata azt mutatja, hogy három alaplármátrix esetén a gyakorlatban szóba jöhető  $\frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}}$  értékek esetén az  $\alpha^{(1)}$  jel-paraméter becslésének szórása kielégítő pontossággal közelíti az optimális kvadrátikus becslés szórását. Amennyiben a közelítés mértéke nem volna kielégítő, a kívánt pontosság mértéke az alaplármatrixok megfelelő más megválasztásával, számuk növelésével azonban mindenesetre tovább fokozható.

(Beérkezett: 1961. XII. 1.)

#### IRODALOM

- [1] JÁNOSSY, L.: „On the determination of the energy of a particle from its track in an emulsion”. *Acta Physica Acad. Sci. Hung.* **7** (1957) 385—401.
- [2] JÁNOSSY, L.: „On the simultaneous distribution of the sagittas of a track in emulsion in the case of background noise”. *Acta Physica Acad. Sci. Hung.* **12** (1960) 139—150.
- [3] SOLNTSEFF, N.: „On the theory of scattering measurements in nuclear emulsion”. *Nuclear Physics* **6** (1958) 222—251.
- [4] JÁNOSSY, L.—RÓZSA, P.: „Maximum likelihood determination of the scattering constant of an emulsion track in the presence of noise”. *Il Nuovo Cimento Serie X*, Vol. **20** (1961) 817—835.
- [5] PASCAL, E.: *Die Determinanten*. Teubner, Leipzig, 1900.
- [6] EGERVÁRY, E.: „Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete”. *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 341—361.

#### ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА РАССЕИВАНИЯ КУЛОНА НА ОСНОВАНИИ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ В ФОТОЭМУЛЬСИИ

L. JÁNOSSY — A. LEE — P. RÓZSA

#### Резюме

В настоящей статье речь идет об оценке параметра рассеивания Кулона частиц с большой энергией на основании измерений в фотоэмульсии, с учетом ошибок измерений. В I. части авторы дают оценку параметра рассеивания при помощи метода наибольшего правоподобия.

Из-за дальнейших приложений авторы дадут оценку с помощью такой квадратичной формы вторых разностей, которая является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. Они называют эту оценку *оптимально*



квадратичной и доказывают, что она совпадает с оценкой наибольшего правдоподобия. Для относительного среднего квадратического отклонения оценки дается асимптотически явные формулы при маленькой длины ячейки; таким образом, становится возможным определение оптимально квадратичной оценки параметра рассеивания в случае произвольного отношения сигнала шума. Они дают в явном виде матрицы, принадлежащие к оптимально квадратичной оценке; численное определение их элементов, однако, очень длительно, поэтому необходимо отыскать подходящий метод приближения. Так как относительно среднее квадратическое отклонение оптимальной оценки параметра рассеивания известно, то можно определить, насколько ухудшается точность оценки в случае применения какого-либо метода приближения, и так в каждом отдельном случае можно взвесить, подходит ли примененная оценка или же необходимо улучшить.

Во II-ой части авторы выработали общий метод квадратичной оценки, подходящий для практического применения. Сущность метода состоит в том, что они выражают матрицу квадратичной оценки как линейную комбинацию подходящим образом выбранных *основных матриц*. Наконец в части III, с помощью общих рассуждений второй части, авторы рекомендуют, для оценки параметра рассеивания конкретный метод, который является годным для вычислений. По предложению М. Козинса (Cosyns) упомянутые основные матрицы выбираются таким образом, чтобы они соответствовали оценке, так называемой чистой суммы квадратов *перепрыгающих* вторых разностей. В явном виде рассматриваются оценки при двух и трех основных матриц.

## ON THE ESTIMATION OF THE SCATTERING CONSTANT OF AN EMULSION TRACK IN THE PRESENCE OF NOISE

by

L. JÁNOSSY — A. LEE — P. RÓZSA

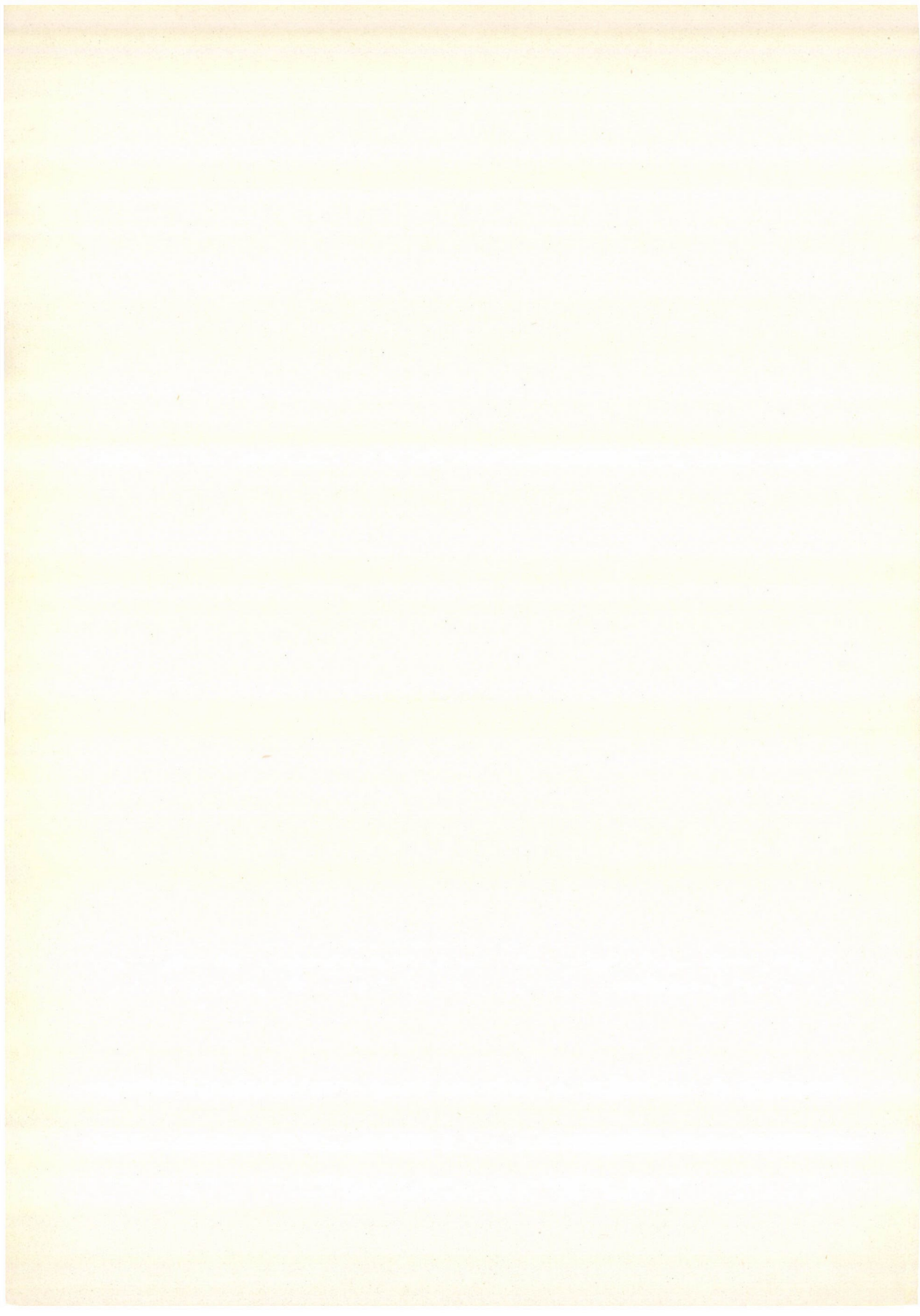
### Abstract

The present paper deals with the estimation of the scattering constant of high energy particles passing through an emulsion taking the background noise into account. In Part I an estimation of the scattering constant is given based on the maximum likelihood method. In view of further application another estimation is given in the form of quadratic expression in the sagittas which is unbiased and the variance of which is minimum. This is being called *optimum quadratic* estimation. This optimum quadratic estimation is proved to be the same as that gained by the maximum likelihood method. For the relative standard deviations of the estimations of the scattering parameters asymptotically exact explicit solutions are given in the case of a large number of measurements. Thus it becomes possible to determine the optimum quadratic estimation of the scattering constant in the case of an arbitrary noise-to-signal ratio. The matrices of the optimum quadratic estimation are given in explicit form, their numerical computation is however extremely cumbersome so that an approximate method has to be chosen. As the relative standard deviation of



the best estimation of the scattering parameter is known, the loss of accuracy when using an approximate method can be determined, and thus the suitability of the approximation used can in every case be decided and improved upon if necessary.

In Part II a general method for the quadratic estimation convenient for practical use is worked out. The method essentially consists in expressing the matrix of the quadratic estimation as a linear combination of suitably chosen *basic matrices*. Finally in Part III, making use of the general principle developed in Part II a concrete method for the estimation of the scattering constant convenient for practical computation is proposed. Following a suggestion by M. Cosyns the above-mentioned basic matrices were chosen to correspond to the estimation using quadratic sums of the so-called *several-step sagittas*. Estimations using two and three resp. basic matrices are treated explicitly.





## AZ ÁGAZATI ÉS IGAZGATÁSI RENDSZERŰ INPUT-OUTPUT MÉRLEGEK KAPCSOLATÁRÓL

BOD PÉTER

A magyar népgazdasági tervezési gyakorlatban az elmúlt évek során két ún. ágazati kapcsolati mérlegmodell került kidolgozásra: a K. S. H. ágazati kapcsolatok mérlege és az O. T. saktábla mérlege. Mind a kettő az irodalomból nyílt input-output modellek néven ismert makroökonómiai modelleknek egy egy változata a magyar népgazdaság ágazati kapcsolatainak ábrázolására.

A két mérleg aggregációs szerkezete lényegesen eltér egymástól. A K. S. H. mérleg a népgazdaságot iparcsoportokra bontja; míg az O. T. mérlegben az egyes főhatóságok alá rendelt termelőszervezetek képezik a szektorokat. A K. S. H. modell tehát „ágazati rendszerű”, míg az O. T. modellt „igazgatási rendszerűnek” nevezzük.

A mérlegek gyakorlati felhasználása során szerzett tapasztalatok azt mutatják, hogy gyakran célszerű lehet ugyanazokat a népgazdasági folyamatokat egyidejűleg ágazati és igazgatási bontásban is vizsgálni. Ez teszi szükségessé a kétféle aggregációs elv szerint felépített modellekben szerepelő mennyiségek egymás közötti összefüggéseinek a vizsgálatát.

Az alábbiakban — bizonyos közgazdaságilag elfogadható feltevések mellett — bemutatjuk ezeket az összefüggéseket. Az összefüggések ismerete megkönnyíti a népgazdasági folyamatok ágazati és igazgatási szerkezetben történő egyidejű tanulmányozását és lehetővé teszi, hogy a kétféle modell ma még meg nem levő konzisztenciáját biztosítsuk.

### I.

Tekintsük a szocialista gazdaság egy zárt (külkereskedelmi kapcsolatok nem tartalmazó) egységét, amely bizonyos mennyiségű termelőkapacitás (állóeszközkapacitás) segítségével  $n$  féle homogén termelési ágat üzemeltet; miközben a termelőapparátus  $m$  számú főhatóság irányítása alatt áll.

Rendelkezésünkre áll két technológiai mátrix, amelyeket az ágazati kapcsolatok mérlege, illetve a saktábla mérleg alapján számítottunk ki. Az ágazati kapcsolatok mérlegéből készült technológiai mátrix ( $A$ ) a termelési ágak számának megfelelően:  $(n \times n)$  méretű, míg a saktábla mérlegből számított ( $Q$ ):  $(m \times m)$  méretű. Az ágazatok szerinti aggregációban a teljes és netto termelések vektorait  $\mathbf{x}$ -szel és  $\mathbf{y}$ -nal jelöljük, míg az igazgatási szerkezetben  $\mathbf{q}$ -val és  $\mathbf{r}$ -rel. Az ágazati szerkezetű vektorok nyilván  $n$ , az igazgatási szerkezetűek pedig  $m$  dimenziósak.

Fenti jelöléseknek megfelelően két alapmodellünk van, amelyek a társadalmi termék újratermelésének folyamatát két különböző vetületben ábrázolják. A két alapmodell egyenletei:

$$(1) \quad (E - A) \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{és} \quad (2) \quad (E - Q) \mathbf{q} = \mathbf{r} \\ \mathbf{x} = (E - A)^{-1} \cdot \mathbf{y} = B\mathbf{y} \quad \mathbf{q} = (E - Q)^{-1} \cdot \mathbf{r} = R \cdot \mathbf{r}.$$

( $E$  mindig a megfelelő rendű egységmátrixot jelöli)

A termelés anyagi előfeltételei közé tartozó állóeszközök a népgazdaságban kétféle szempont szerint vannak elosztva. Minden állóeszköz egyrészt meghatározott termelési ághoz tartozik (annak megfelelően, hogy vele milyen használati értéket termelnek), másrészt az az üzem, amelyben a szóban levő állóeszköz működik, valamelyik főhatóság alá tartozik. Az állóeszközöknek ezt a kettős elosztottságát ágazatok és igazgatási egységek között egy ún.  $K$  kapacitásmátrix segítségével ábrázolhatjuk.

$$(3) \quad K = (k_{ij}).$$

$k_{ij}$  megmutatja, hogy az  $i$ -ik főhatóság irányítása alatt milyen méretű állóeszközkapacitás áll a  $j$ -ik fajta használati értéket termelő, tehát a  $j$ -ik termelési ágazatba tartozó állóeszközök közül. Itt célszerűnek látszik, hogy az állóeszközök kapacitását a velük elérhető maximális — árakban mért — termelési volumenekkel fejezzük ki.

Képezzünk a  $K$  mátrixból két megoszlási viszonyszámokat tartalmazó mátrixot. Mégpedig:

*az ágazati kapacitások igazgatási szerkezetét tükröző mátrixot :*

$$(4) \quad [\lambda] = \left( \frac{k_{ij}}{\sum_{l=1}^m k_{lj}} \right)$$

*az igazgatási egységek kapacitásainak ágazati összetételét tükröző mátrixot :*

$$(5) \quad [\mu] = \left( \frac{k_{ij}}{\sum_{l=1}^n k_{il}} \right).$$

Tételezzük fel, hogy az állóeszköz kapacitások kihasználása nagyjából azonos szinten van a népgazdaság minden ágában. E feltevés mellett igazak az alábbi összefüggések  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{r}$  között:

$$(6) \quad \mathbf{q} = [\lambda] \mathbf{x} \quad \text{és}$$

$$(6a) \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{q}^* [\mu] \quad \text{illetve}$$

$$(7) \quad \mathbf{x} = [\mu^*] \mathbf{q}$$

$$(8) \quad \mathbf{y} = (E - A) \mathbf{x} = (E - A) [\mu^*] \mathbf{q} = (E - A) [\mu^*] R \cdot \mathbf{r}$$

$$(9) \quad \mathbf{r} = (E - Q) \mathbf{q} = (E - Q) [\lambda] \mathbf{x} = (E - Q) [\lambda] B \cdot \mathbf{y}$$

(\* a transzpozíció jele)

A kapacitás kihasználás azonos fokának feltételezése megkerülhető. Lásd: [3].



## II.

Bontsuk a népgazdaságot  $N = n \cdot m$  szektorra; külön szektornak tekintve minden ágazat összes ( $m$  féle) főhatóság alá tartozó részét; vagy minden igazgatási egység összes ( $n$  féle) ágazatát. Ez a kétféle csoportosítás csak a szektorok sorszámban tér el egymástól. Az a szektor, amely az  $a$  sorszámu ágazathoz és a  $b$  sorszámu igazgatási egységhez tartozik az első esetben az  $[(a-1)m+b]$  sorszámot, míg a második esetben a  $[(b-1)n+a]$  sorszámot kapja.

Készítsük el az  $N$  szektorú modell ún. teljes ágazati kapcsolati mérlegét. A kétféle csoportosításnak megfelelően két táblát kapunk:

$$(10) \quad [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11}^{11} \dots x_{11}^{1m} & & x_{1n}^{11} \dots x_{1n}^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{11}^{m1} \dots x_{11}^{mm} & & x_{1n}^{m1} \dots x_{1n}^{mm} \\ \dots & & \dots \\ & x_{ij}^{11} \dots x_{ij}^{1m} & \\ & x_{ij}^{kl} & \\ & x_{ij}^{m1} \dots x_{ij}^{mm} & \\ \dots & & \dots \\ x_{n1}^{11} \dots x_{n1}^{1m} & & x_{nn}^{11} \dots x_{nn}^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{m1} \dots x_{n1}^{mm} & & x_{nn}^{m1} \dots x_{nn}^{mm} \end{bmatrix}$$

$$(11) \quad [x^{kl}] = \begin{bmatrix} x_{11}^{11} \dots x_{1n}^{11} & & x_{11}^{1m} \dots x_{1n}^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{11} \dots x_{nn}^{11} & & x_{n1}^{1m} \dots x_{nn}^{1m} \\ \dots & & \dots \\ & x_{11}^{kl} \dots x_{1n}^{kl} & \\ & \vdots & \vdots \\ & x_{ij}^{kl} & \\ & x_{n1}^{kl} \dots x_{nn}^{kl} & \\ \dots & & \dots \\ x_{11}^{m1} \dots x_{1n}^{m1} & & x_{11}^{mm} \dots x_{1n}^{mm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{m1} \dots x_{nn}^{m1} & & x_{n1}^{mm} \dots x_{nn}^{mm} \end{bmatrix}$$

$x_{ij}^{kl}$  jelenti az  $k$ -ik főhatóság alá tartozó  $i$ -ik ágazat termelőegységeinek a termelését a  $j$ -ik ágazat  $l$ -ik főhatóság alá tartozó termelőszervezeteinek termelőfogyasztása számára.

Mivel az  $[X_{ij}]$  és  $[X^{kl}]$  mátrixok csak a sorok és oszlopok sorrendjében különböznek egymástól, van olyan  $V$  permutációs mátrix, hogy

$$(12) \quad [X_{ij}] = V [X^{kl}] V, \quad \text{illetve}$$

$$(13) \quad [X^{kl}] = V [X_{ij}] V.$$

## III.

A két teljes ágazati mérlegből két ún. teljes technológiai mátrixot számíthatunk, amelyek szintén csak a sorok és oszlopok sorrendjében térnek el egymástól. Jelölje  $[A_{ij}]$  az  $[X_{ij}]$ -ből és  $[Q_{kl}]$  a  $[X^{kl}]$ -ből számított technológiai mátrixokat, akkor:

$$(14) \quad [A_{ij}] = V [Q_{kl}] V, \quad \text{illetve:}$$

$$(15) \quad [Q_{kl}] = V [A_{ij}] V.$$

Az alapmodellek technológiai mátrixai nem egyebek, mint a teljes technológiai mátrixok megfelelő aggregátumai.

Értelmezzük az alábbi aggregáló operátorokat:

$$(16) \quad G^{(1)} = \text{diag} (G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, \dots, G_n^{(1)}), \quad \text{ahol } G_i^{(1)} = \overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^m \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(17) \quad H^{(1)} = \text{diag} (H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, \dots, H_n^{(1)}), \quad \text{ahol } H_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(18) \quad G^{(2)} = \text{diag} (G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \dots, G_m^{(2)}), \quad \text{ahol } G_k^{(2)} = \overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^n \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$(19) \quad H^{(2)} = \text{diag} (H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots, H_m^{(2)}), \quad \text{ahol } H_k^{(2)} = \begin{pmatrix} \mu_{k1} \\ \mu_{k2} \\ \vdots \\ \mu_{kn} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy igazak az alábbi összefüggések:

$$(20) \quad \underset{(n \times n)}{A} = \underset{(n \times mn)}{G^{(1)}} \underset{(mn \times n)}{[A_{ij}]} \cdot \underset{(mn \times n)}{H^{(1)}},$$

$$(21) \quad \underset{(m \times m)}{Q} = \underset{(m \times mn)}{G^{(2)}} \underset{(mn \times m)}{[Q_{kl}]} \cdot \underset{(mn \times m)}{H^{(2)}}.$$

Célszerűen választott ún. desagregáló operátorok segítségével elérhetjük, hogy az  $A$  illetve  $Q$  mátrixokból olyan  $[\bar{A}_{ij}]$  illetve  $[\bar{Q}_{kl}]$   $N \times N$  méretű mátrixokat állítsunk elő, amelyeket 18. és 19. szerint aggregálva, ismét  $A$ -t illetve  $Q$ -t kapunk. Ezt használjuk fel arra, hogy  $A$  és  $Q$  között közvetlen kapcsolatot teremtsünk.

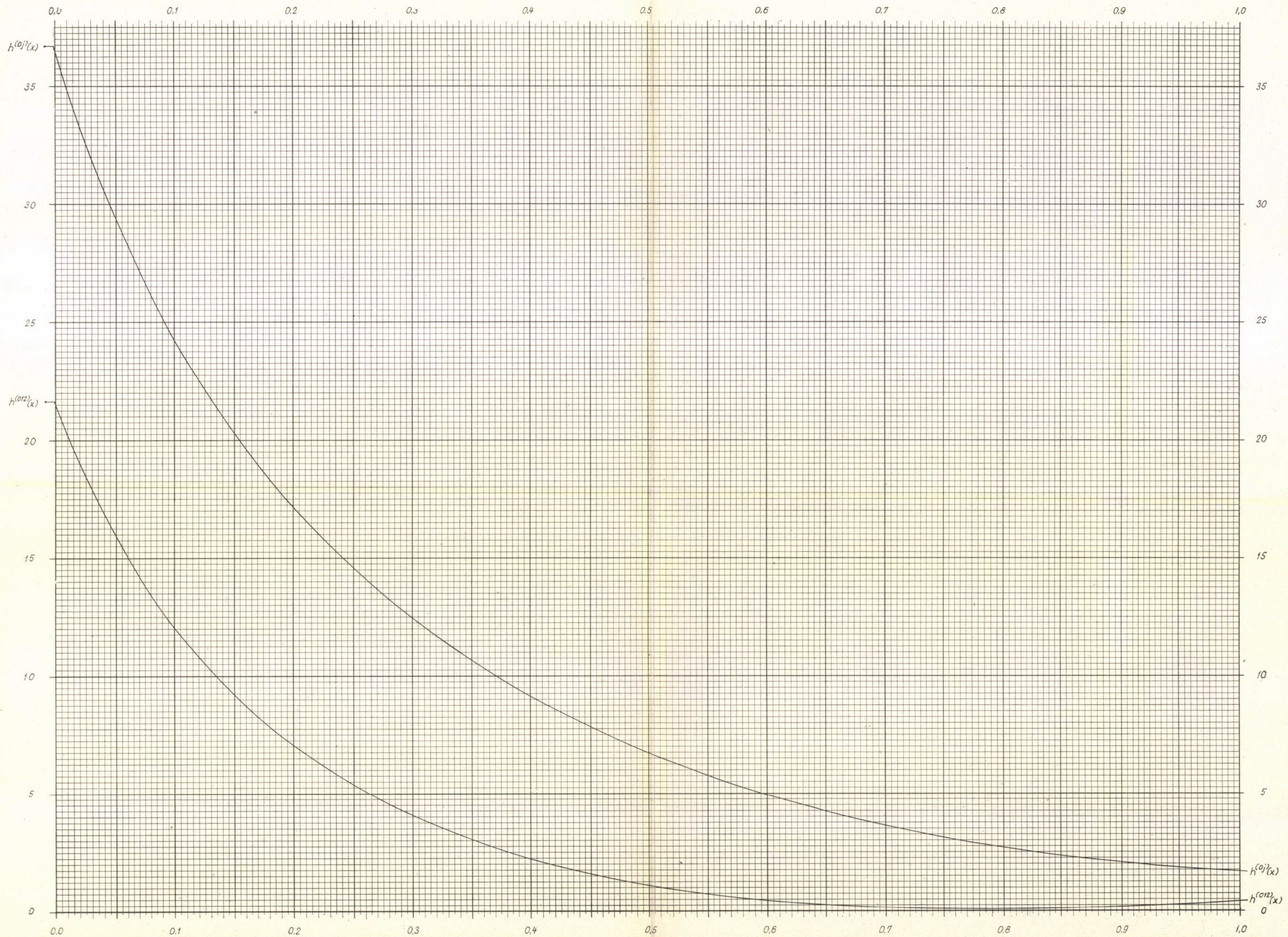
Legyen:

$$(22) \quad \bar{H}^{(1)} = \text{diag} (\bar{H}_1^{(1)}, \bar{H}_2^{(1)}, \dots, \bar{H}_n^{(1)}), \quad \text{ahol } \bar{H}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} l_{1i} \\ l_{2i} \\ \vdots \\ l_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

úgy, hogy

$$\sum_{j=1}^m l_{ji} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

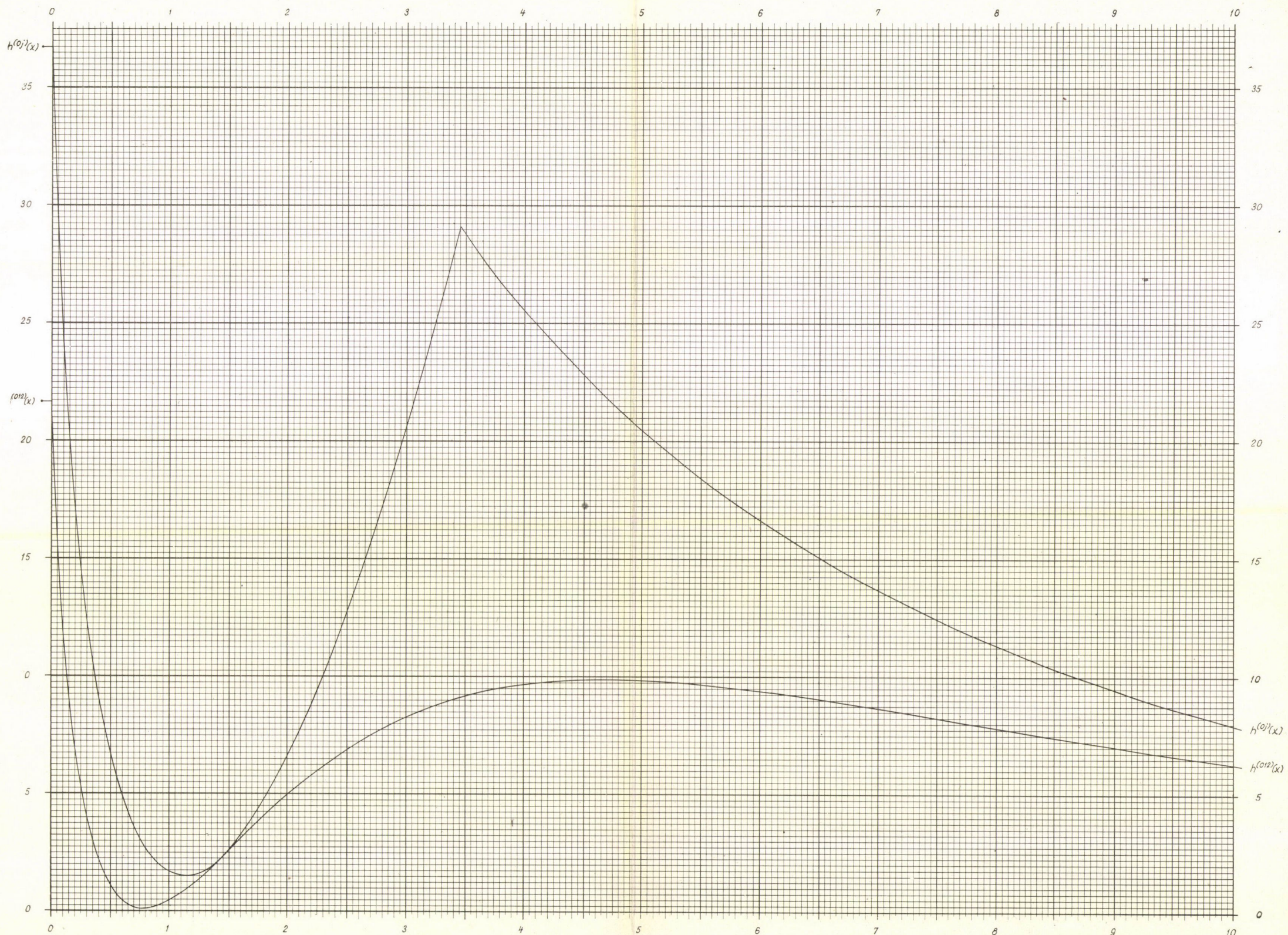








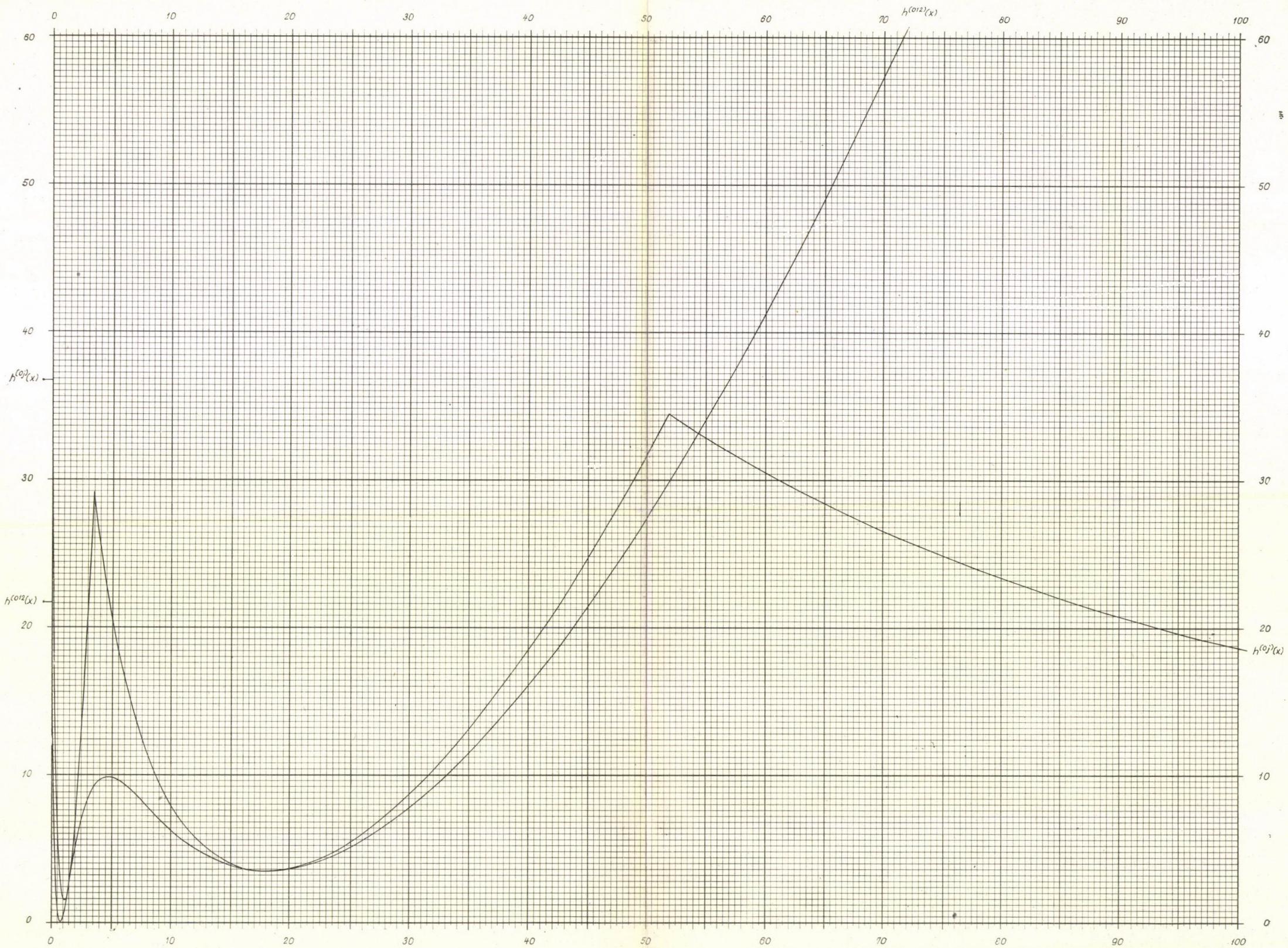








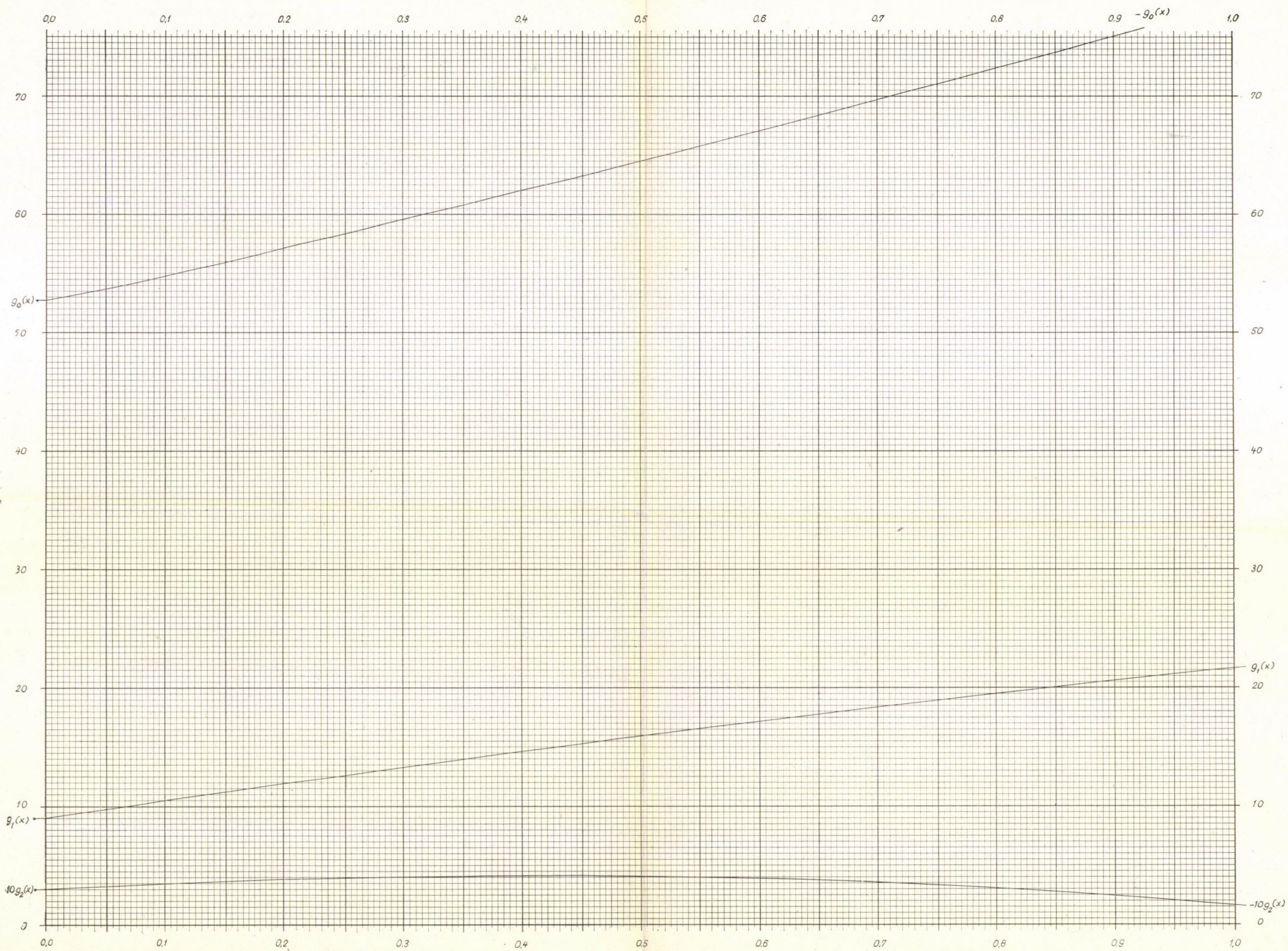




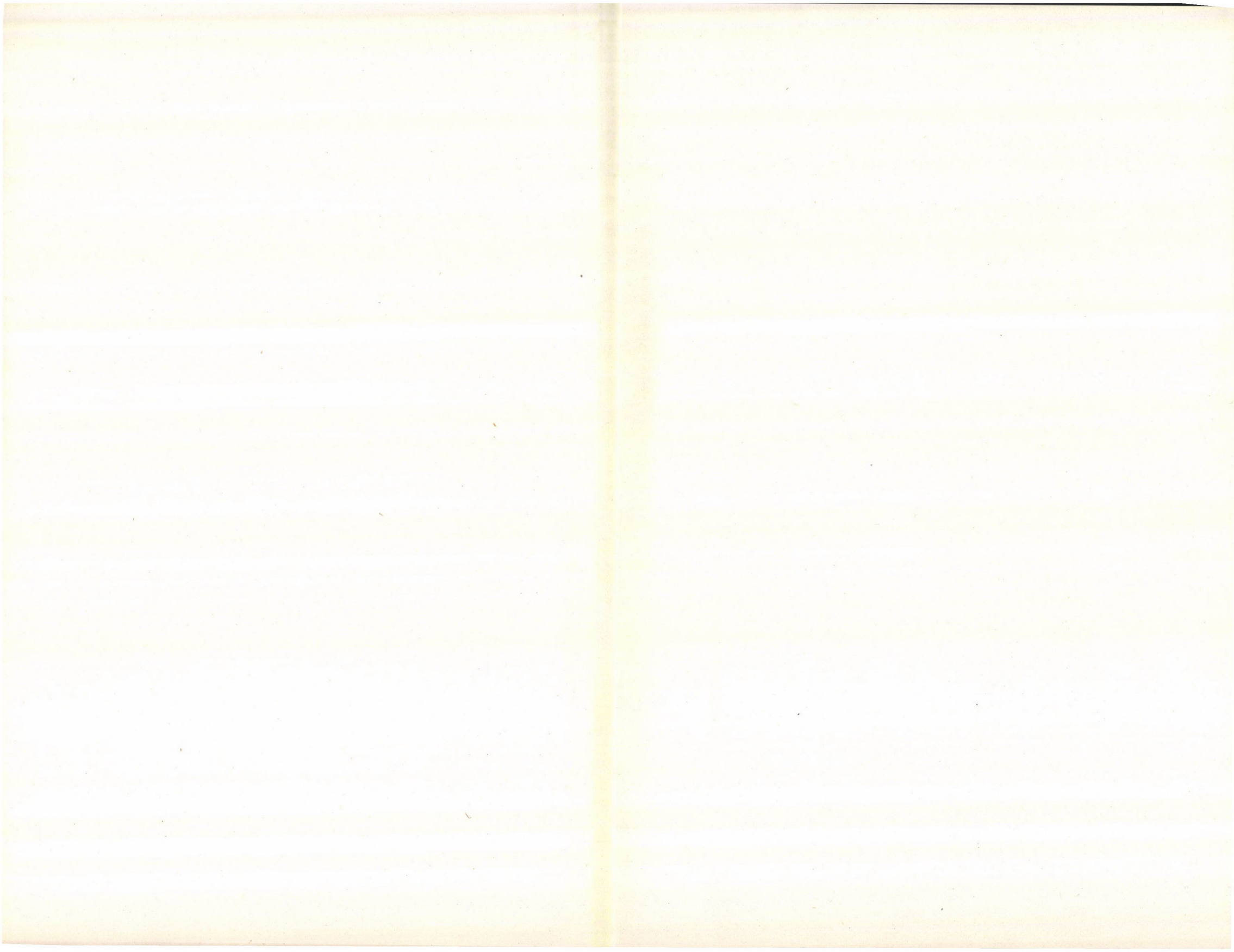




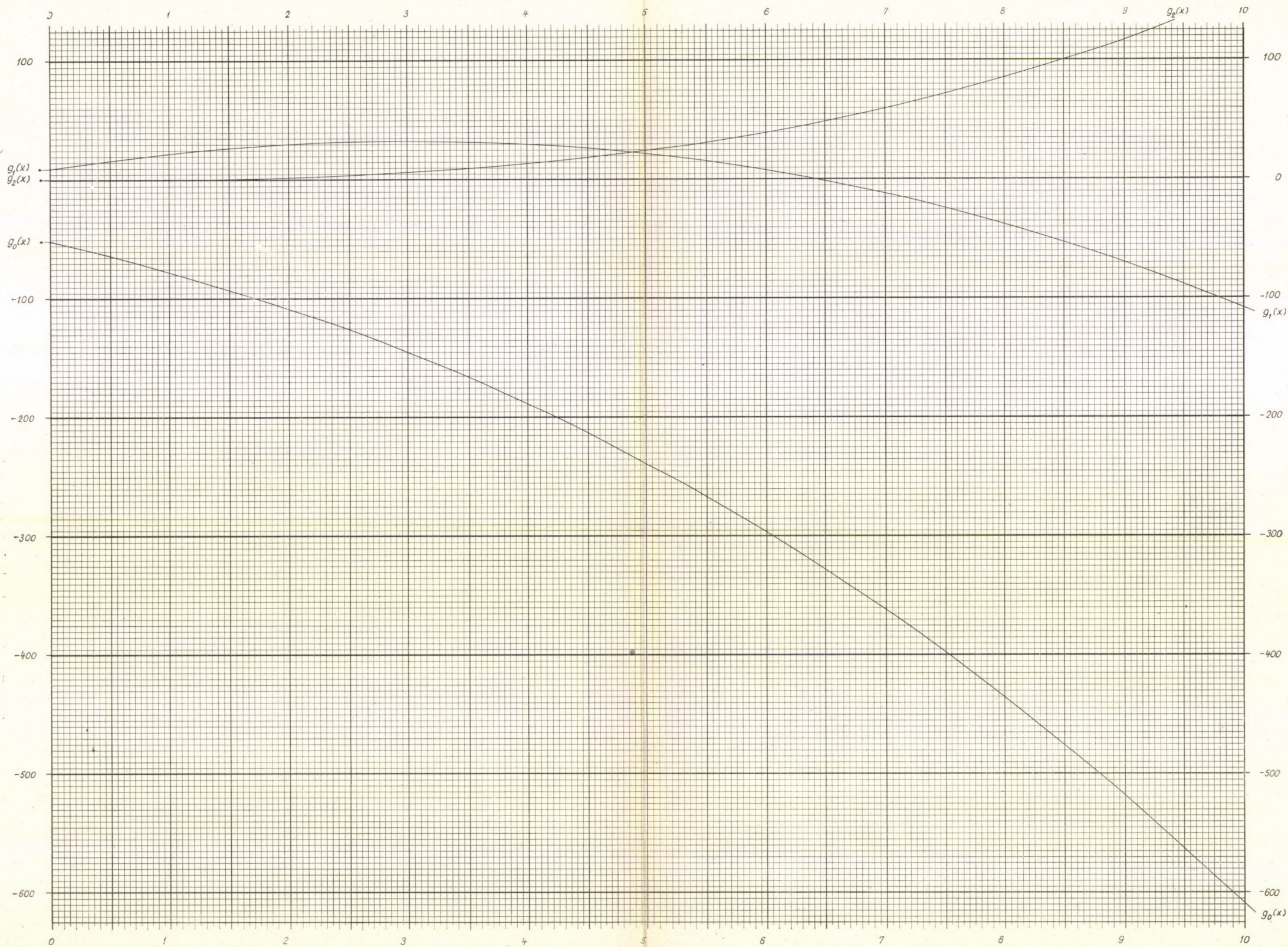








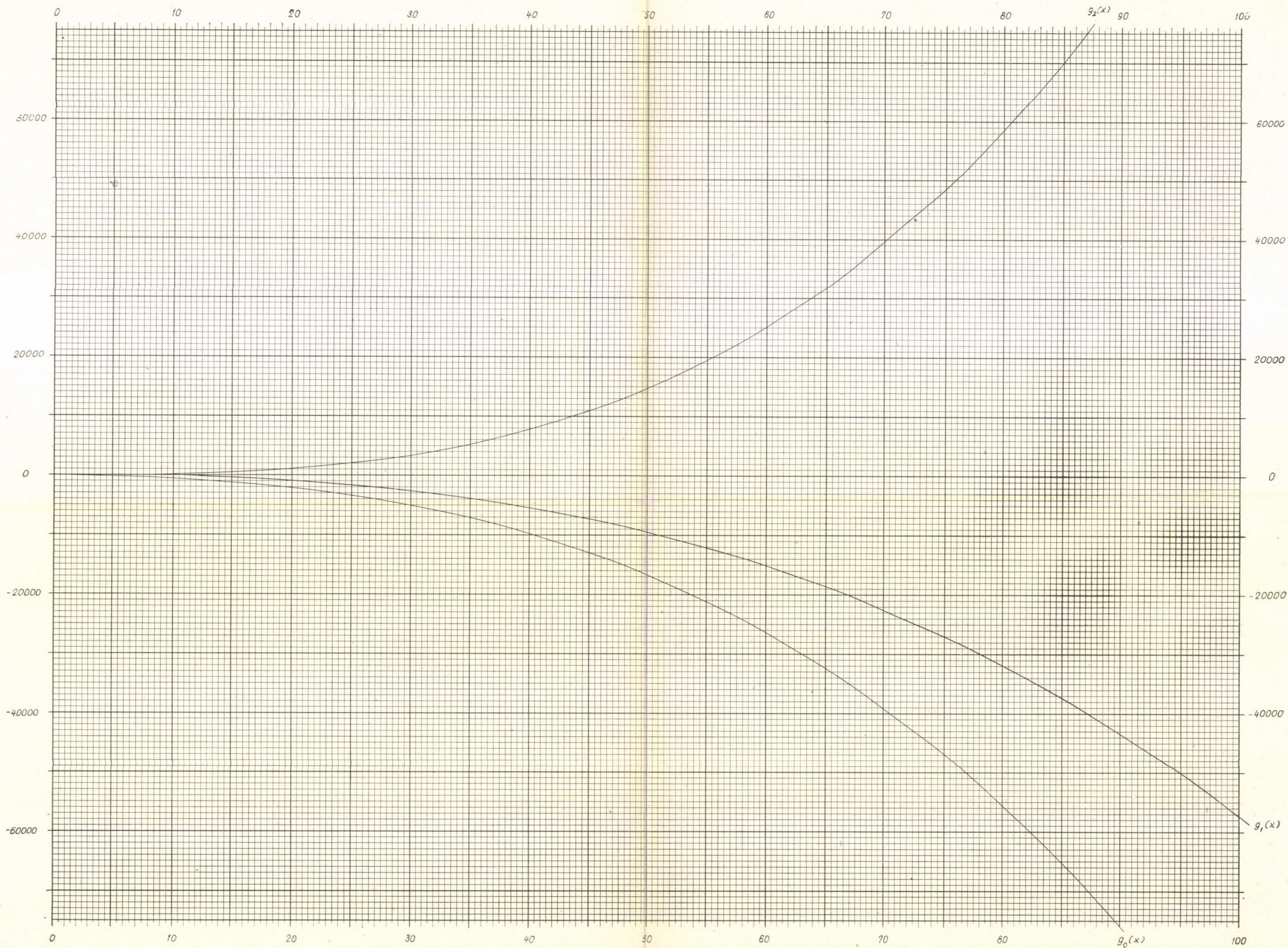




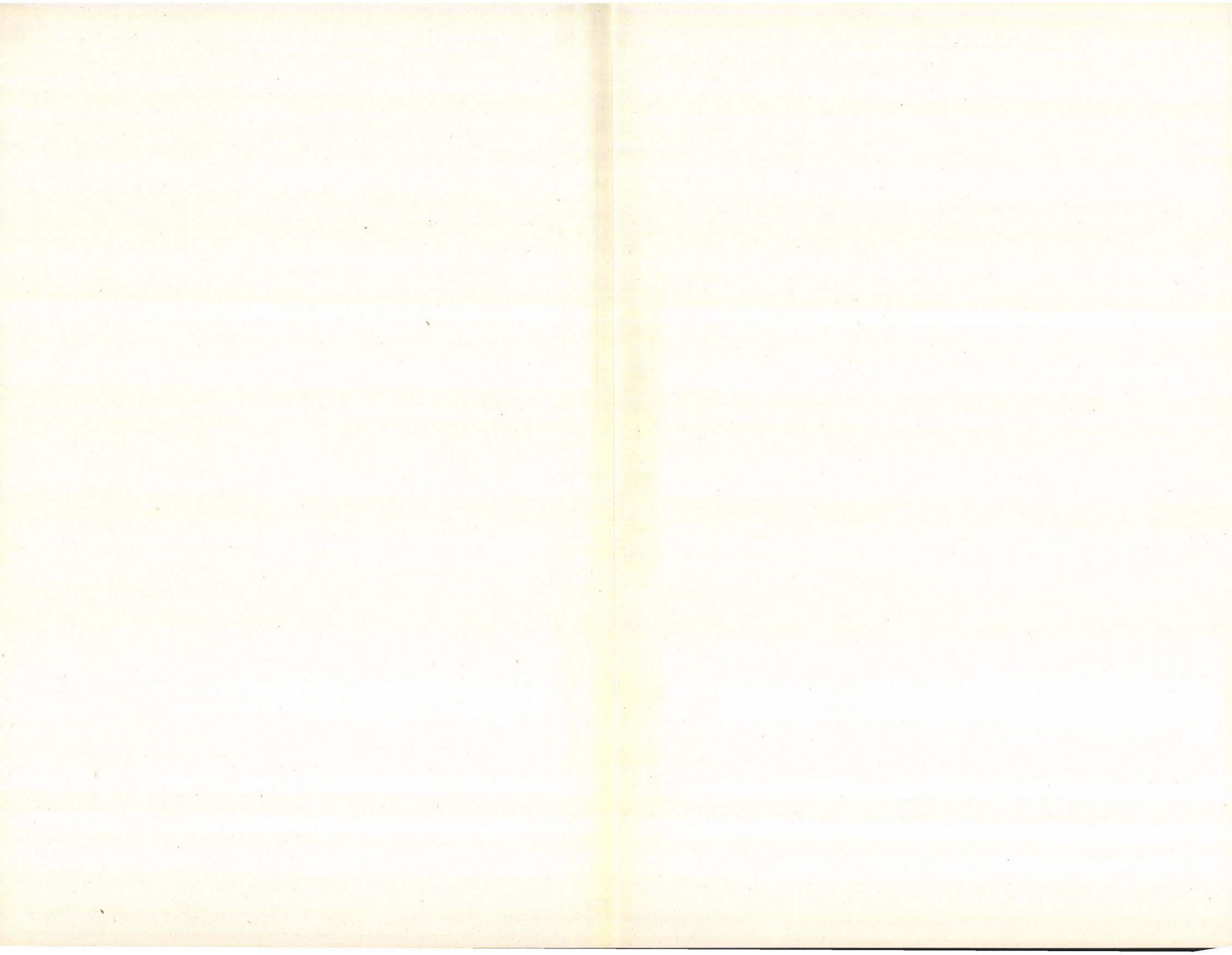




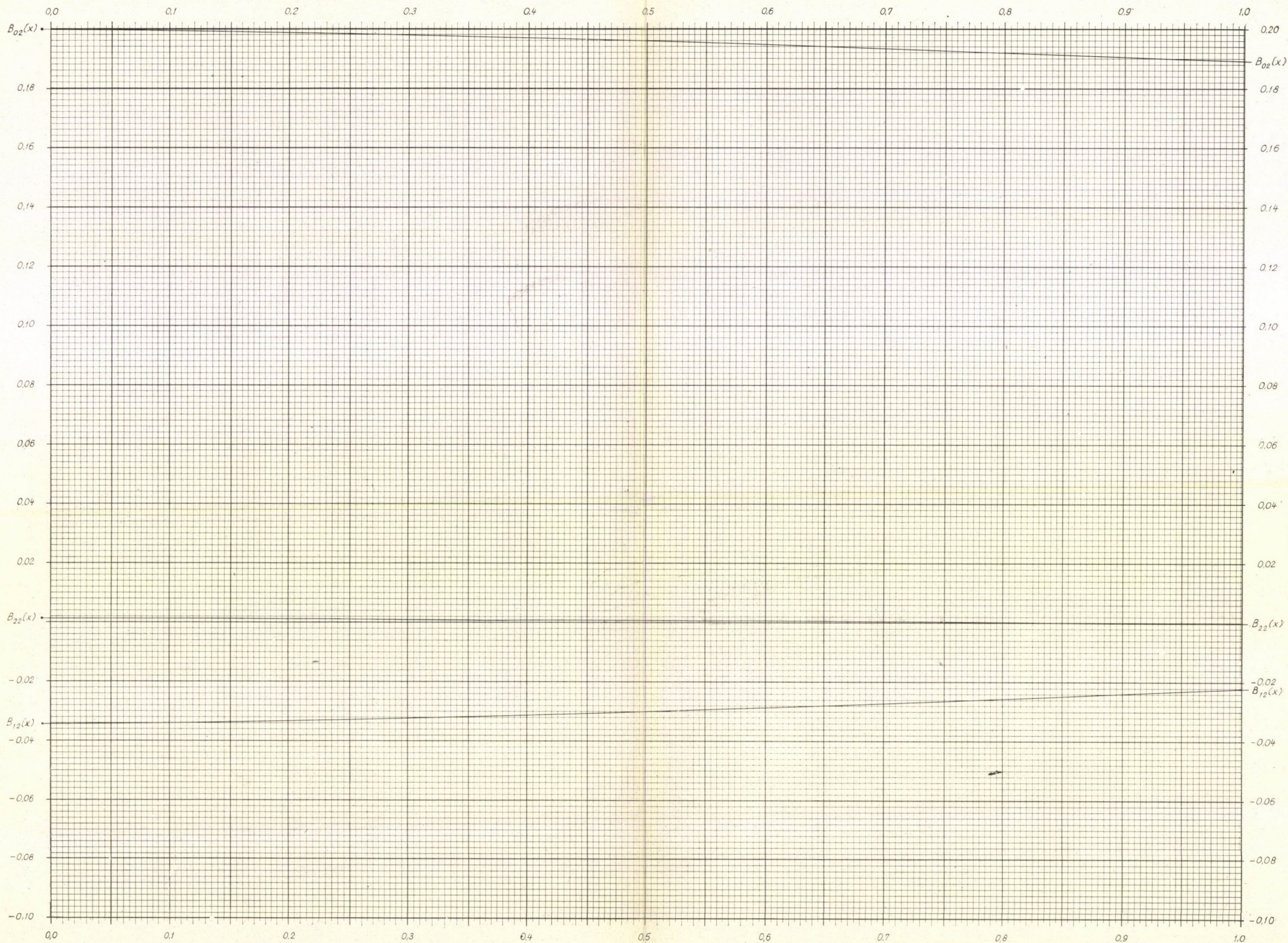








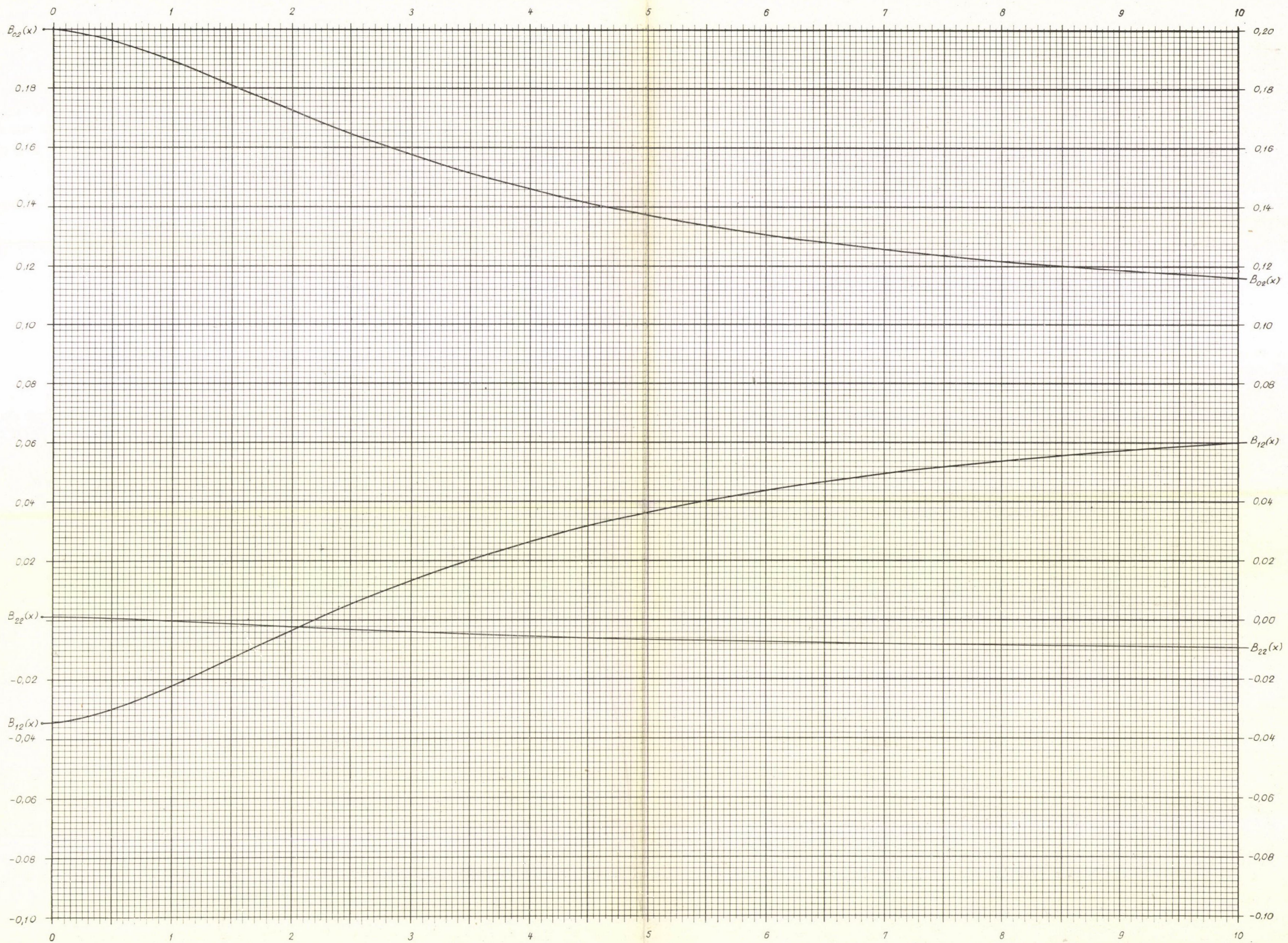




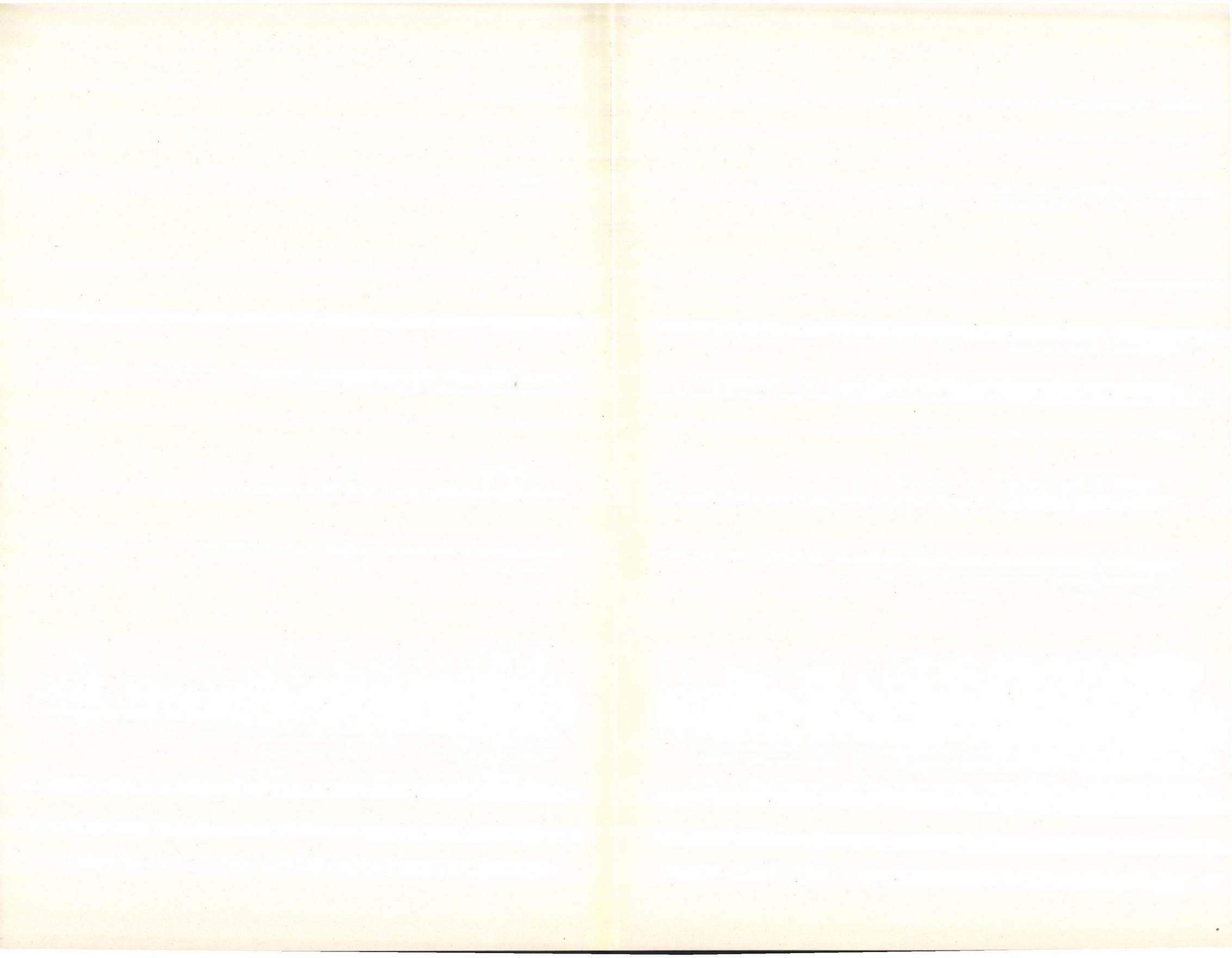




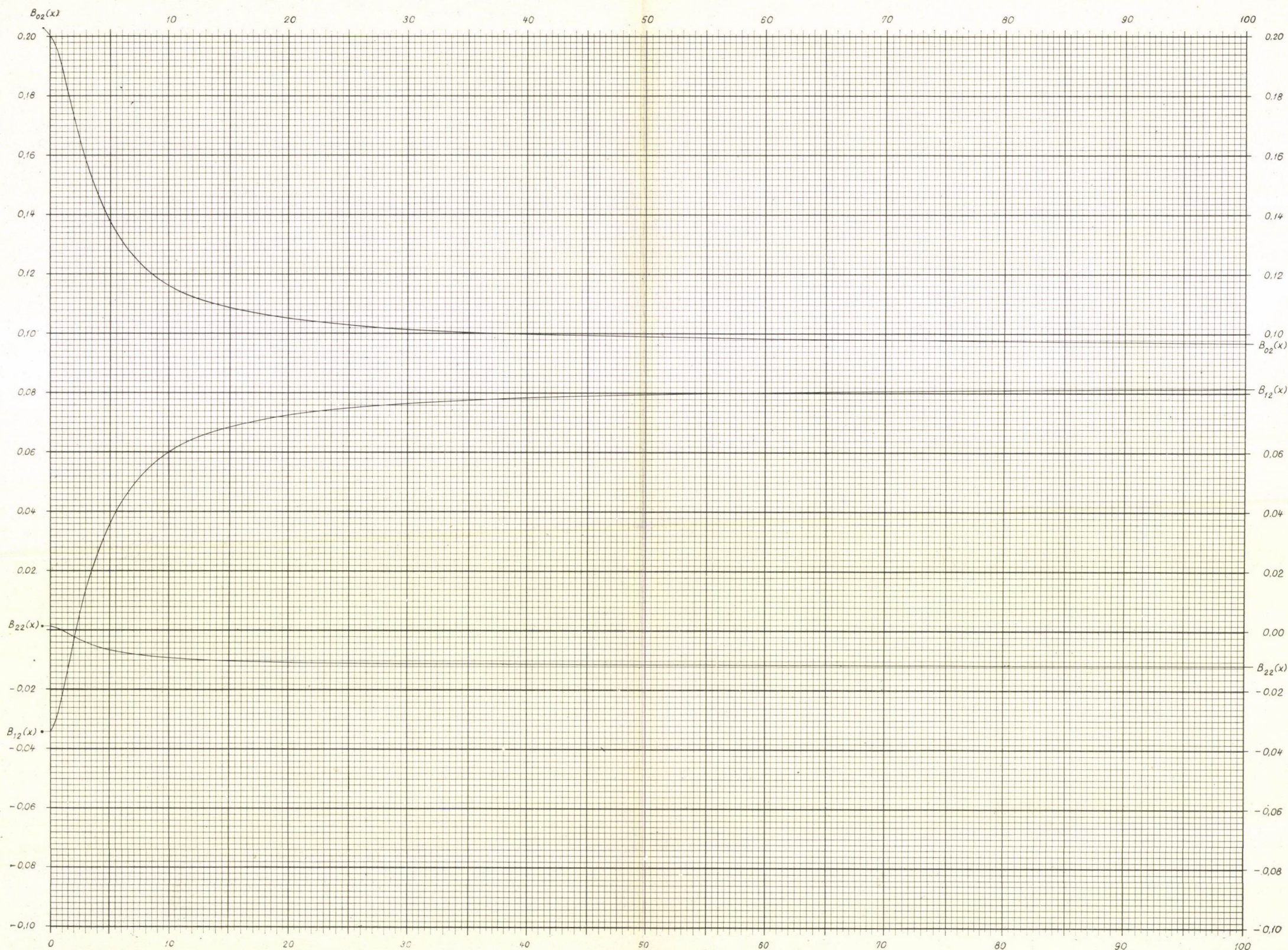








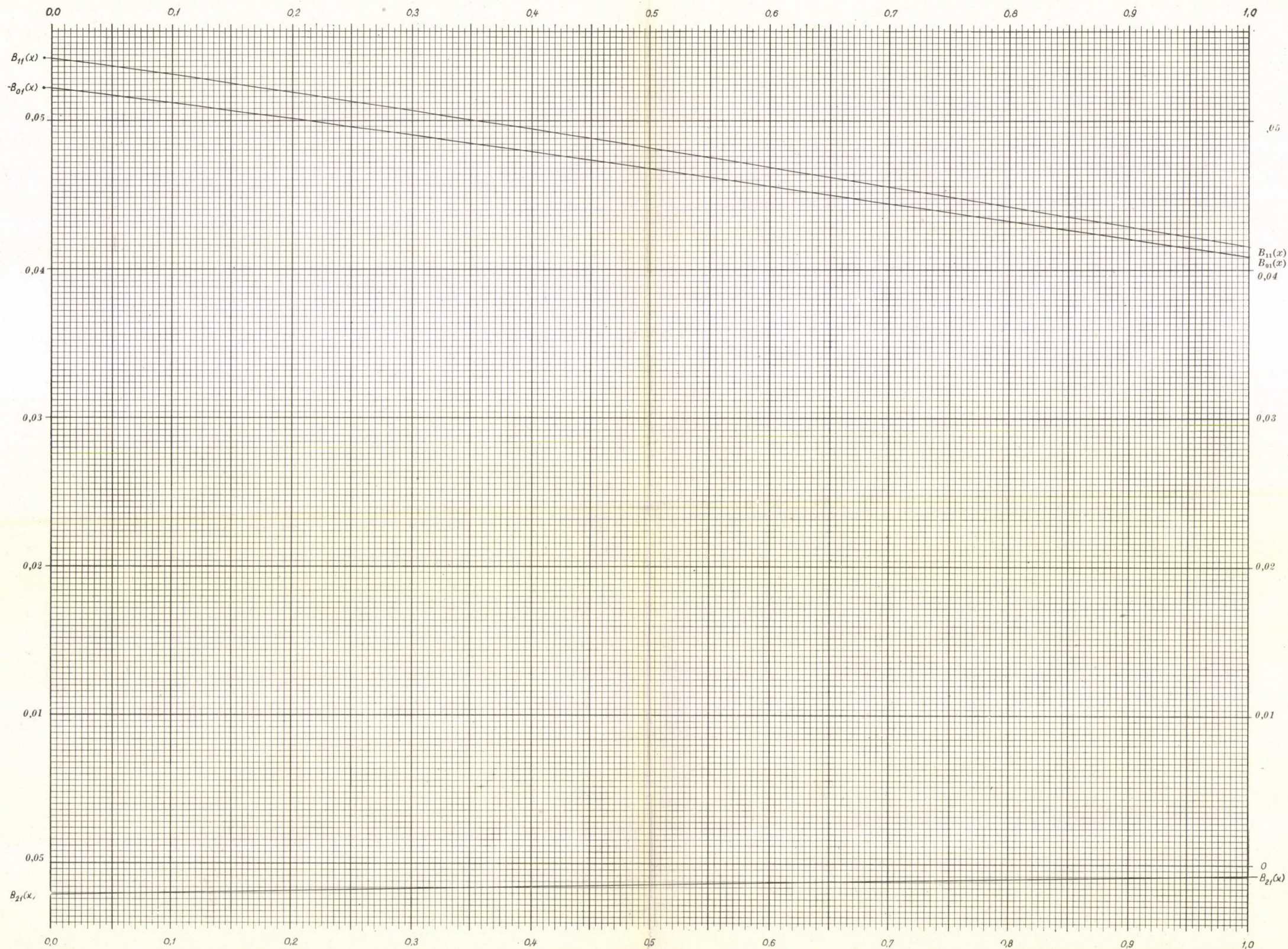








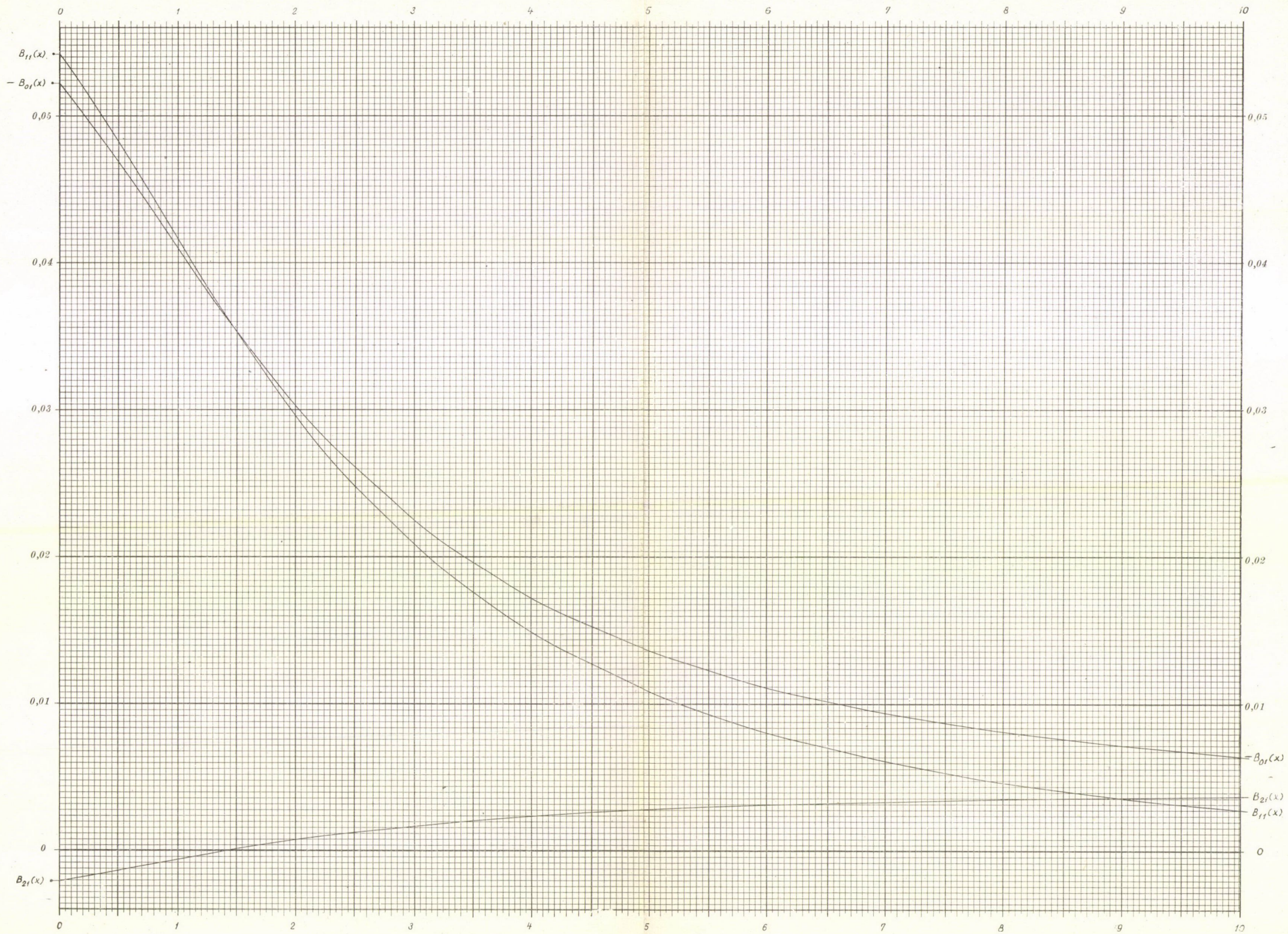




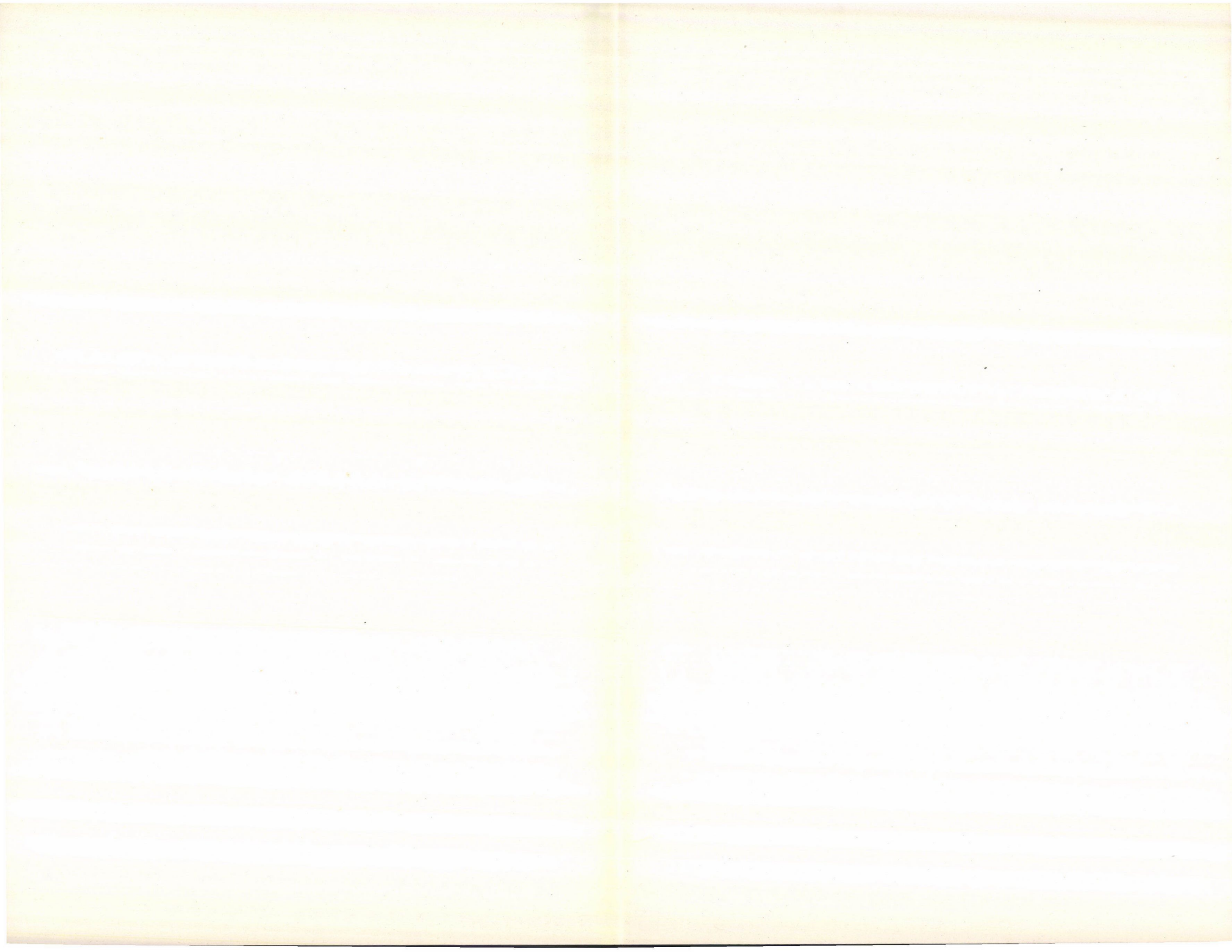




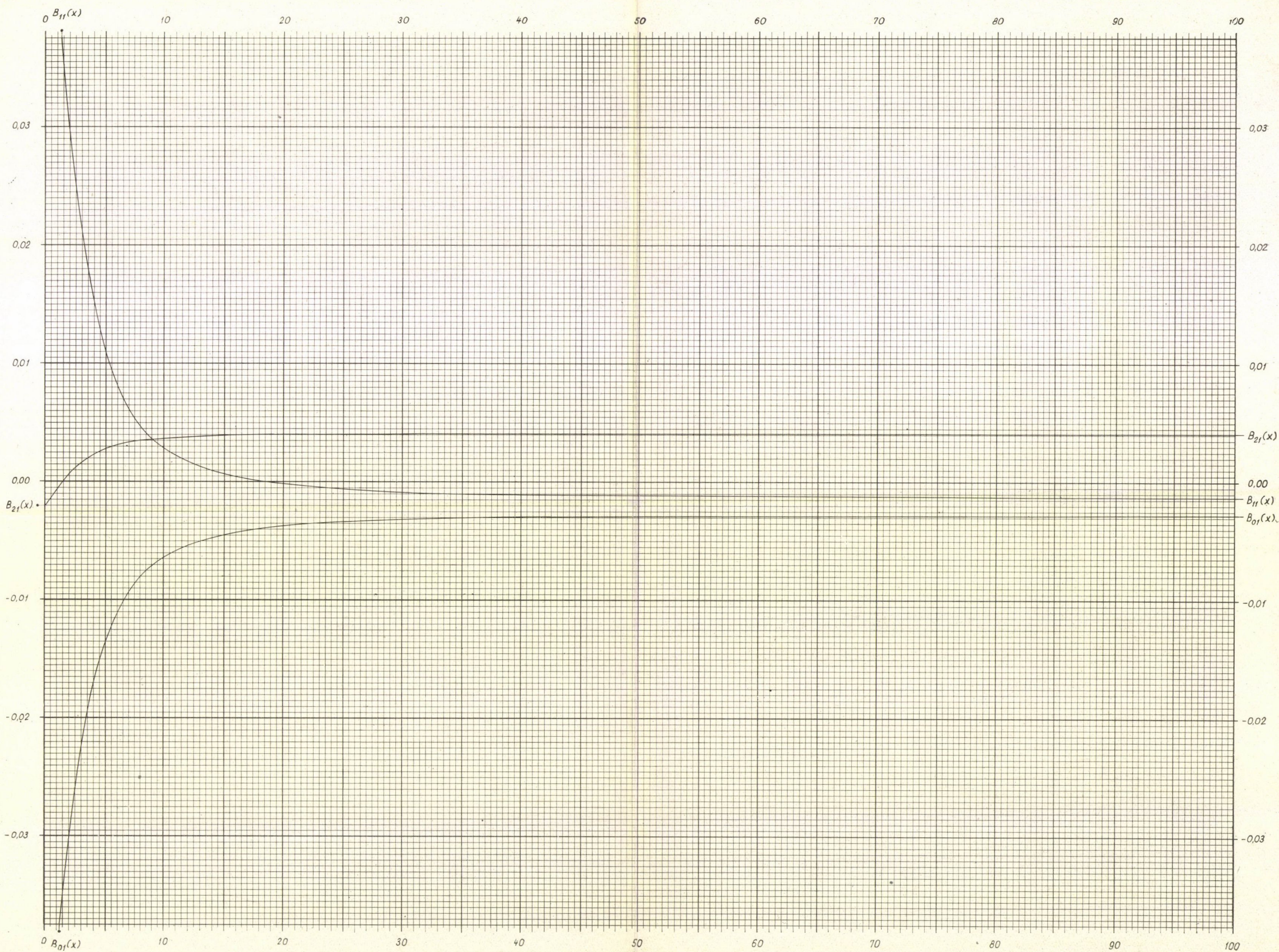








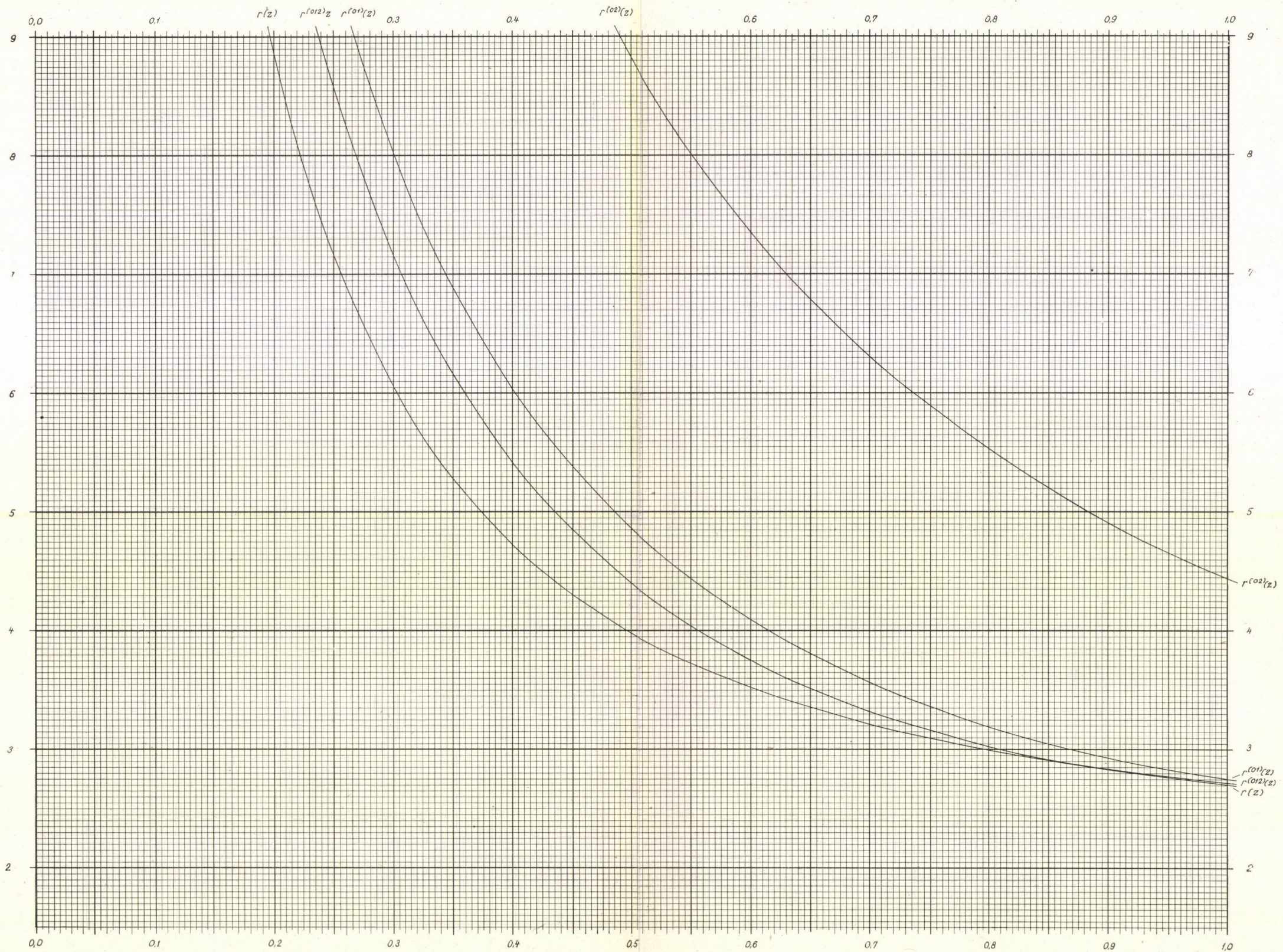








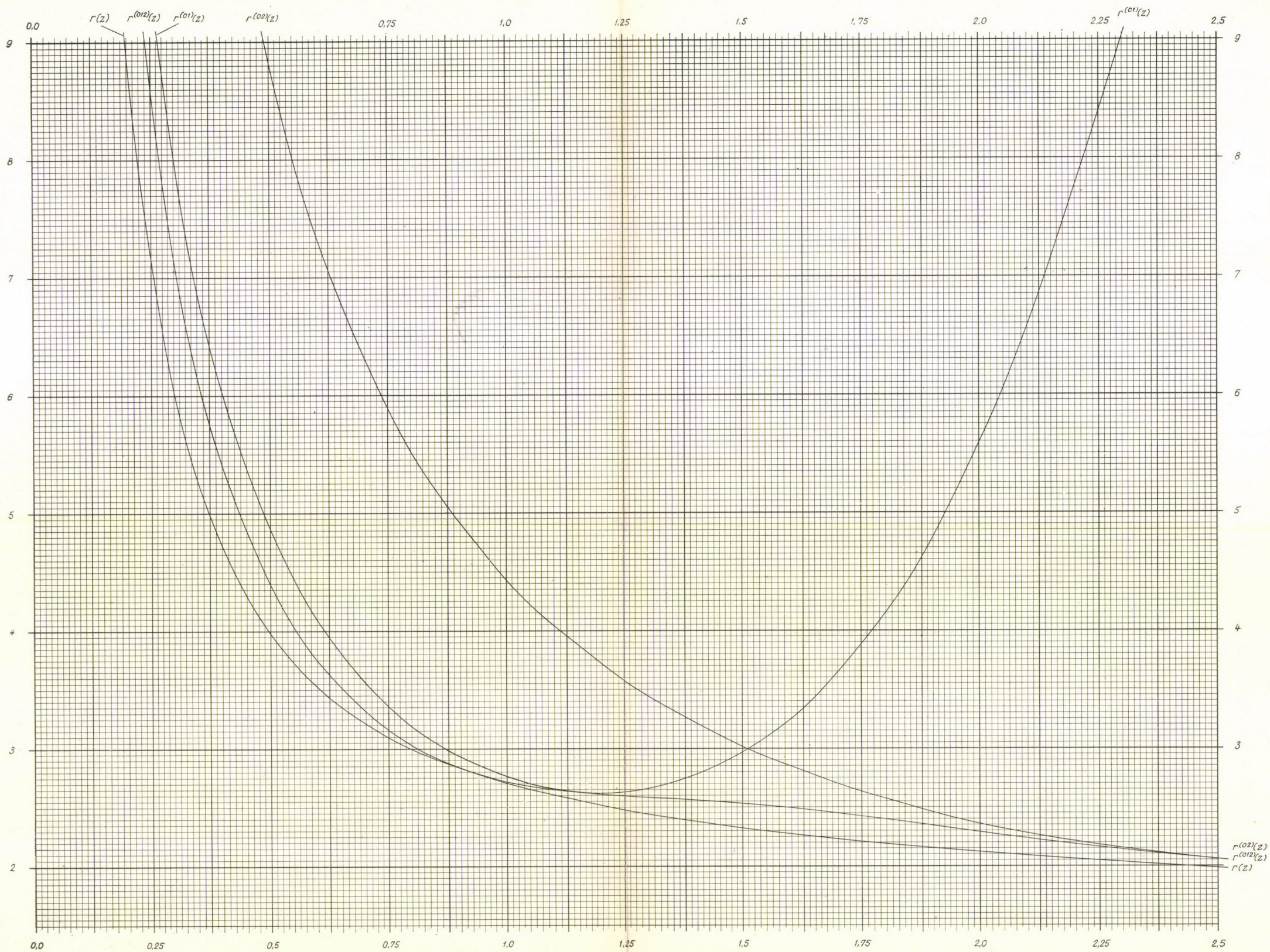








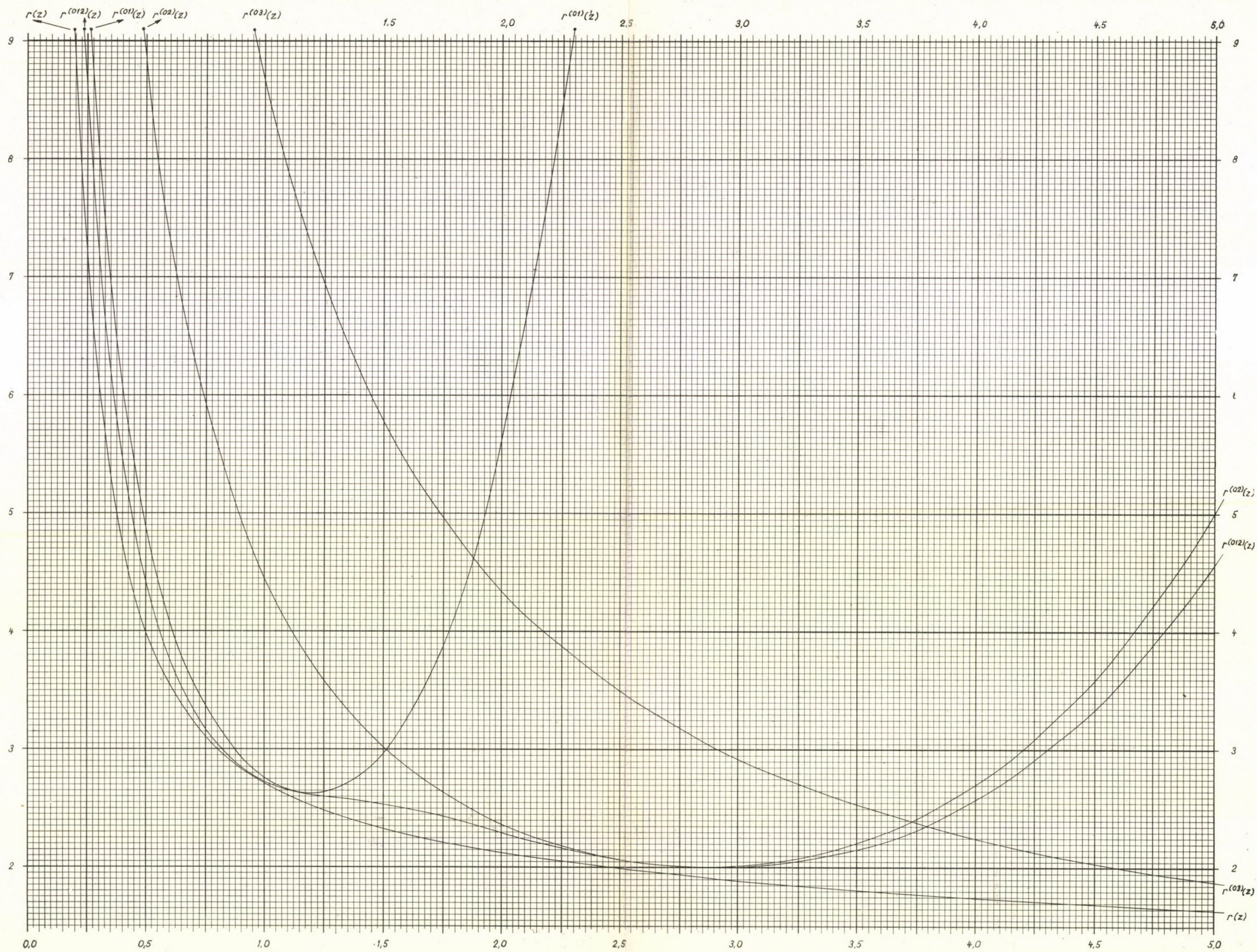










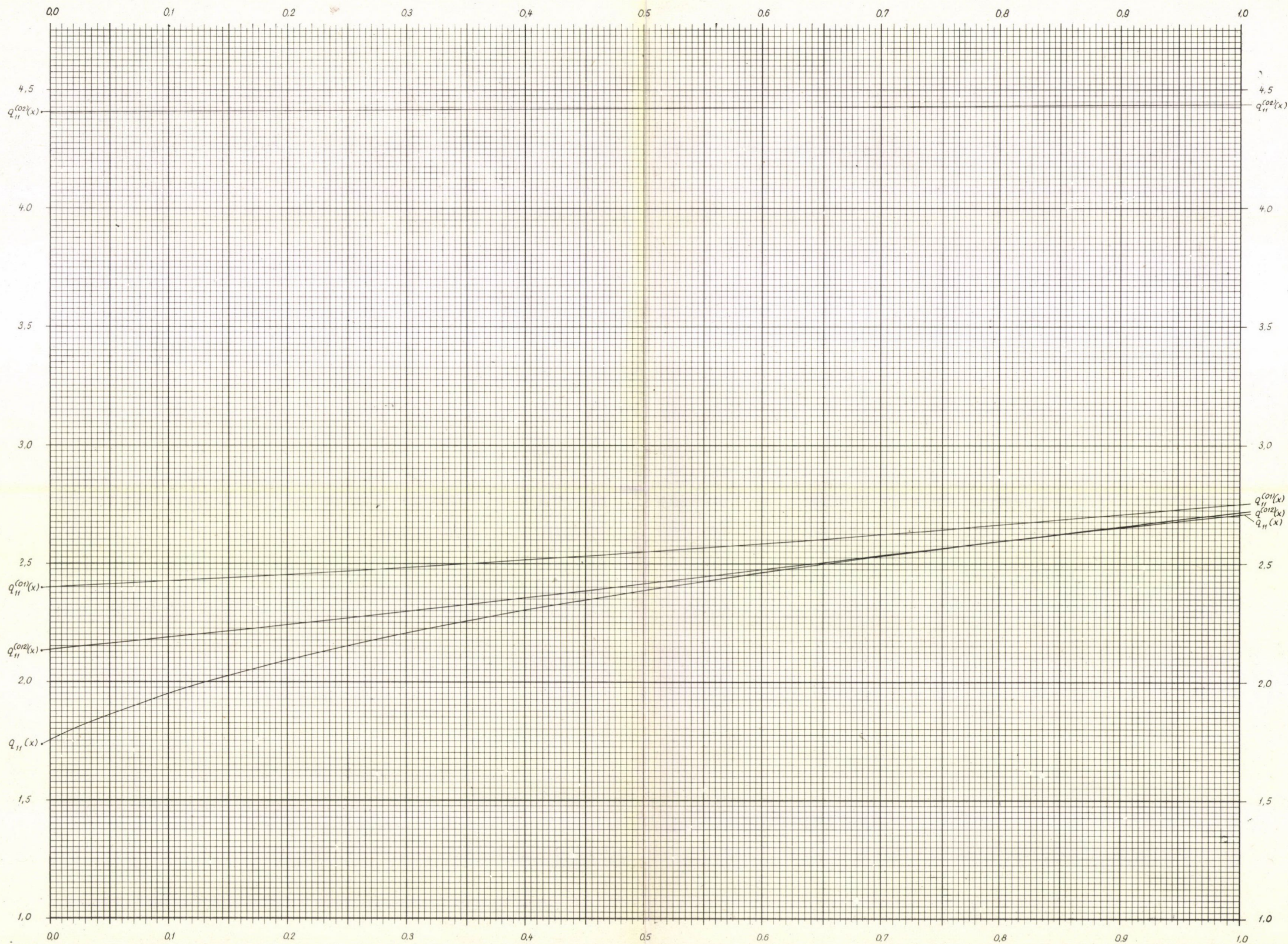


3/a. ábra





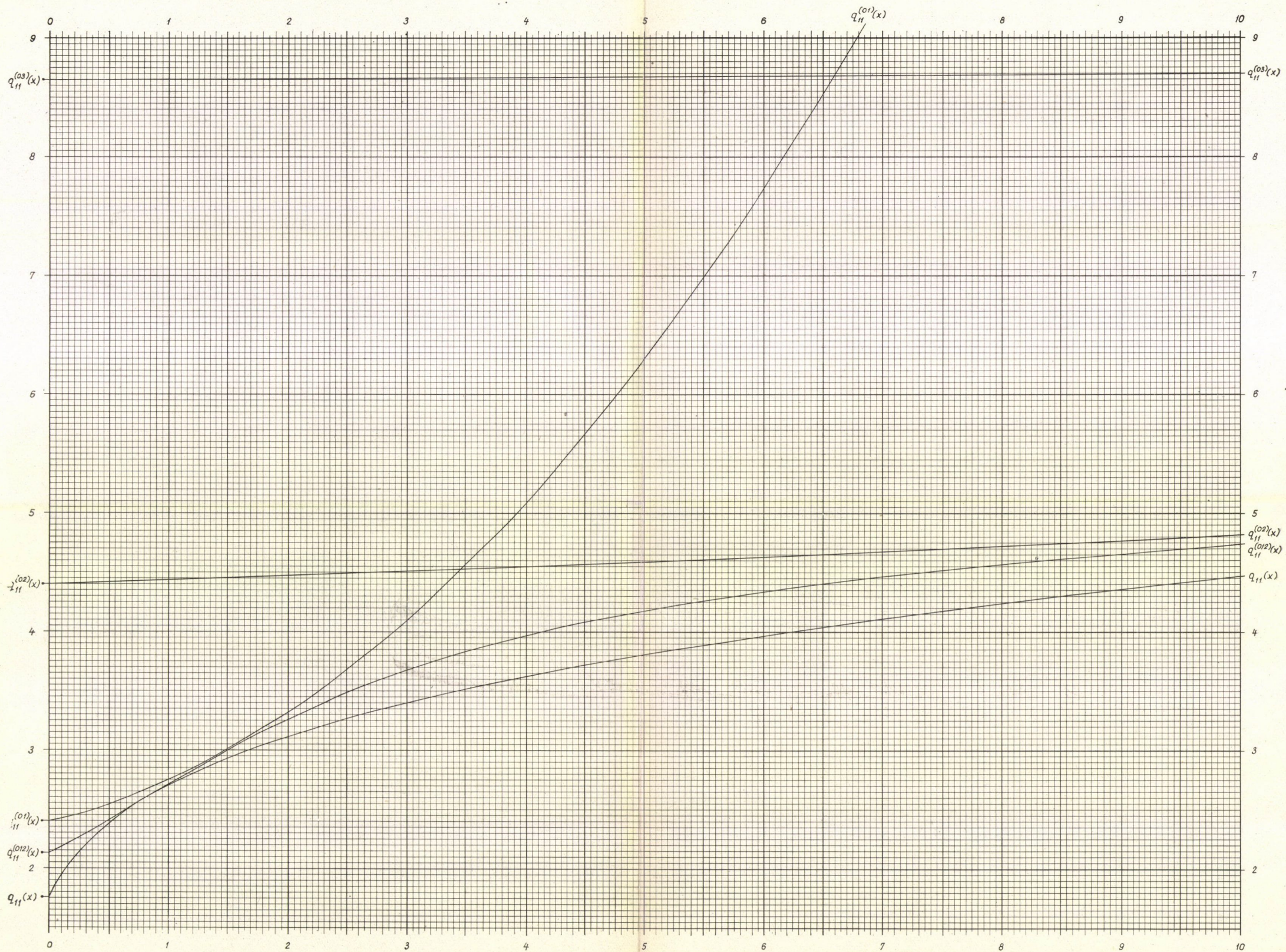








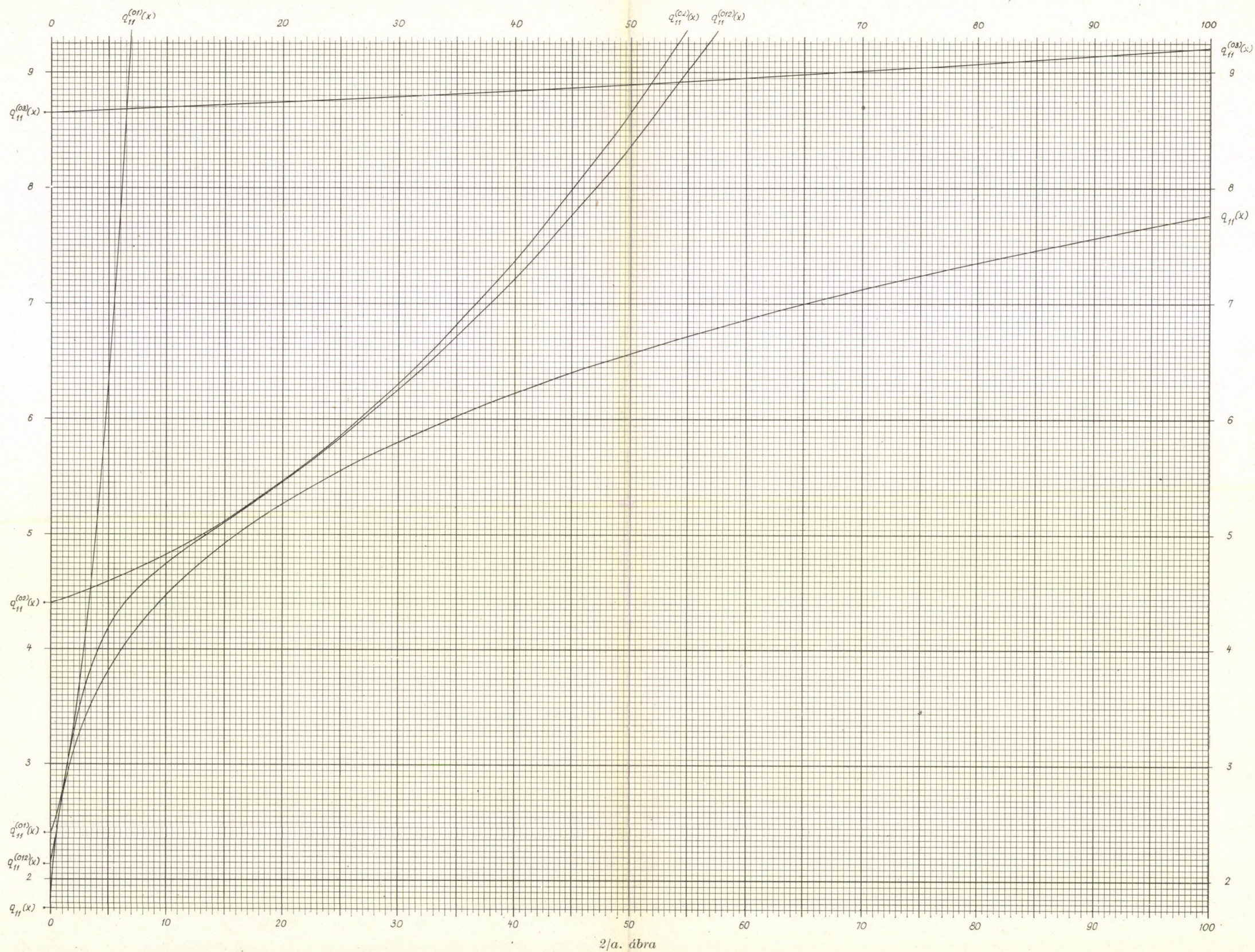








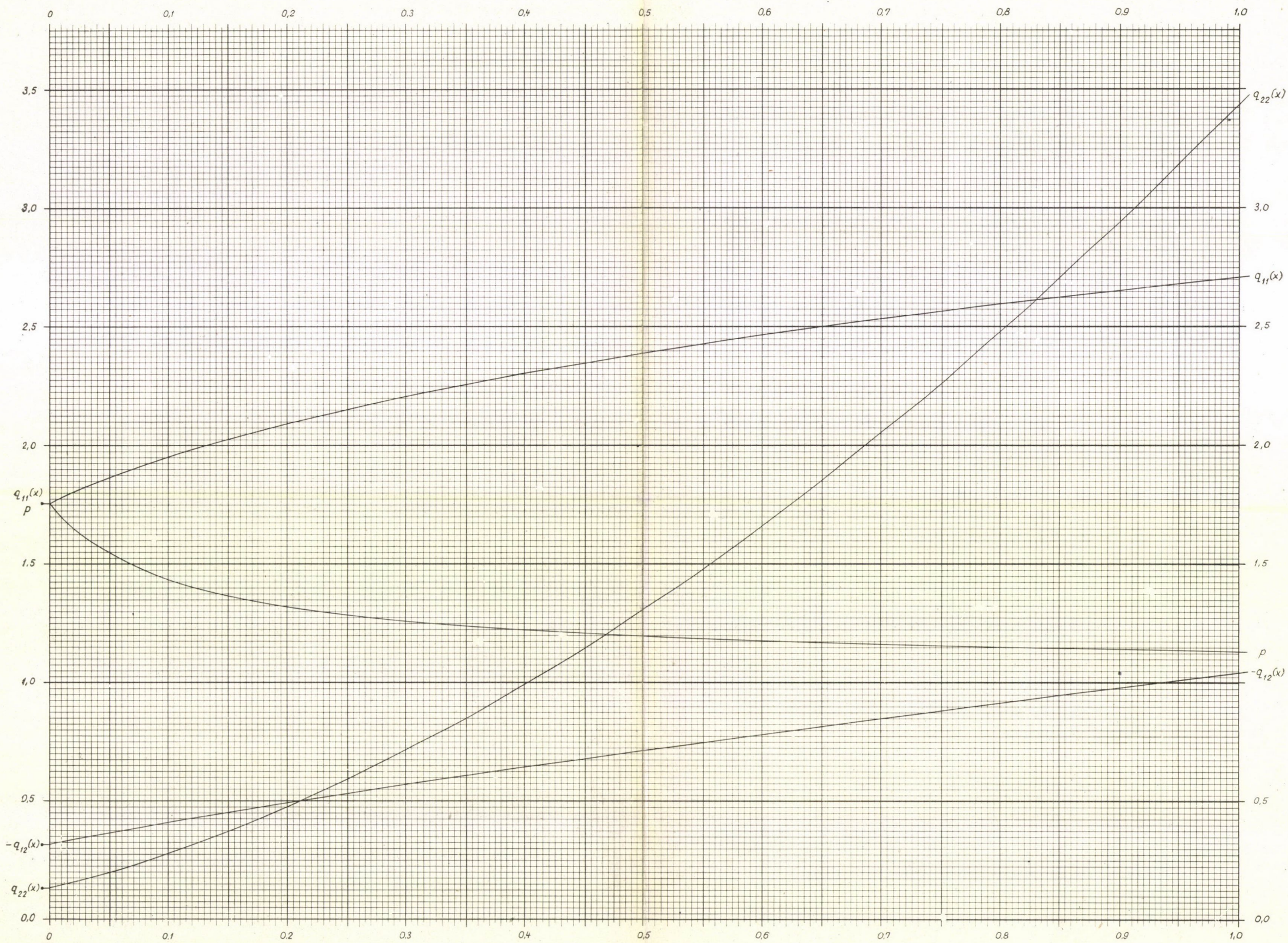








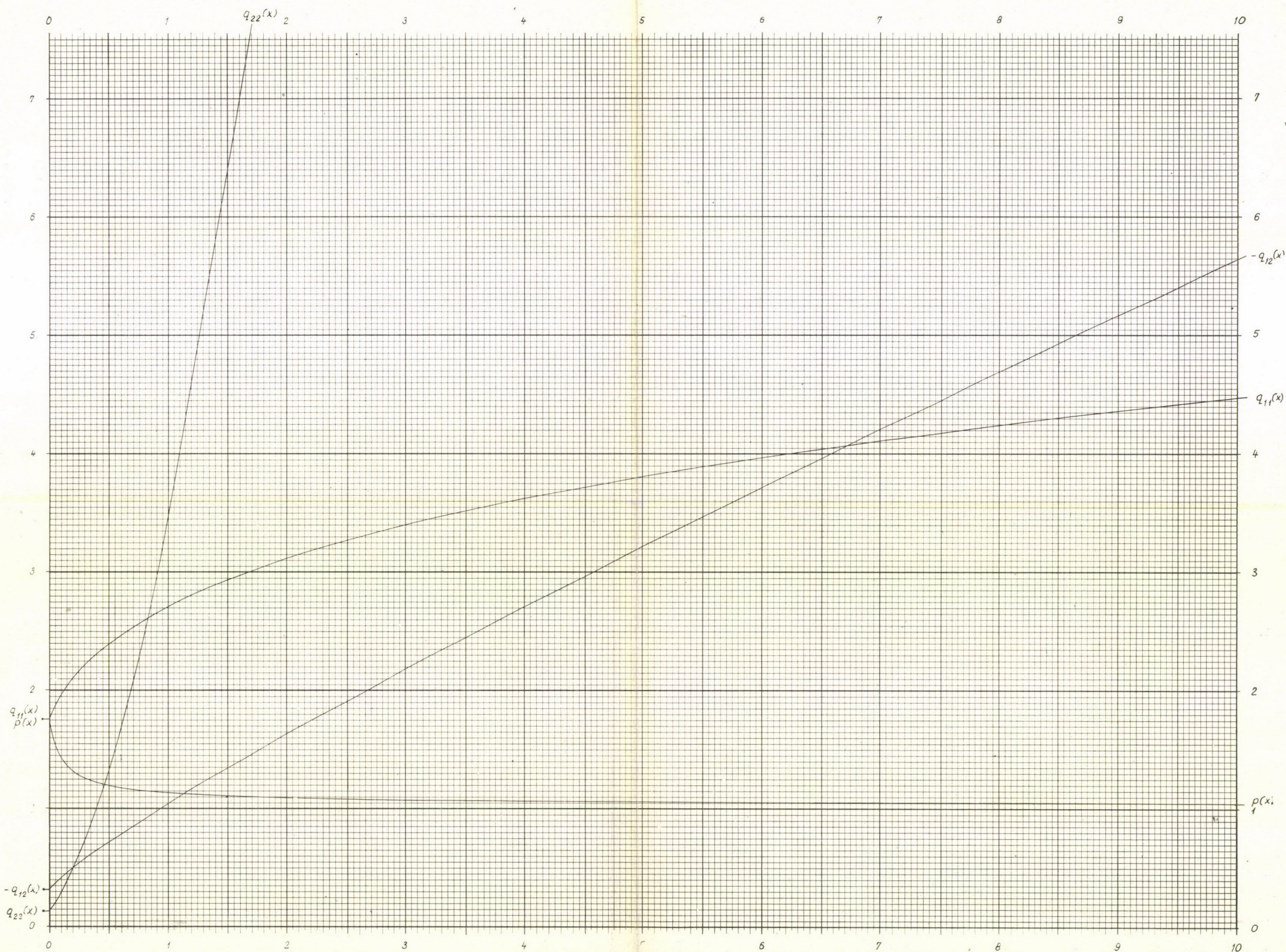








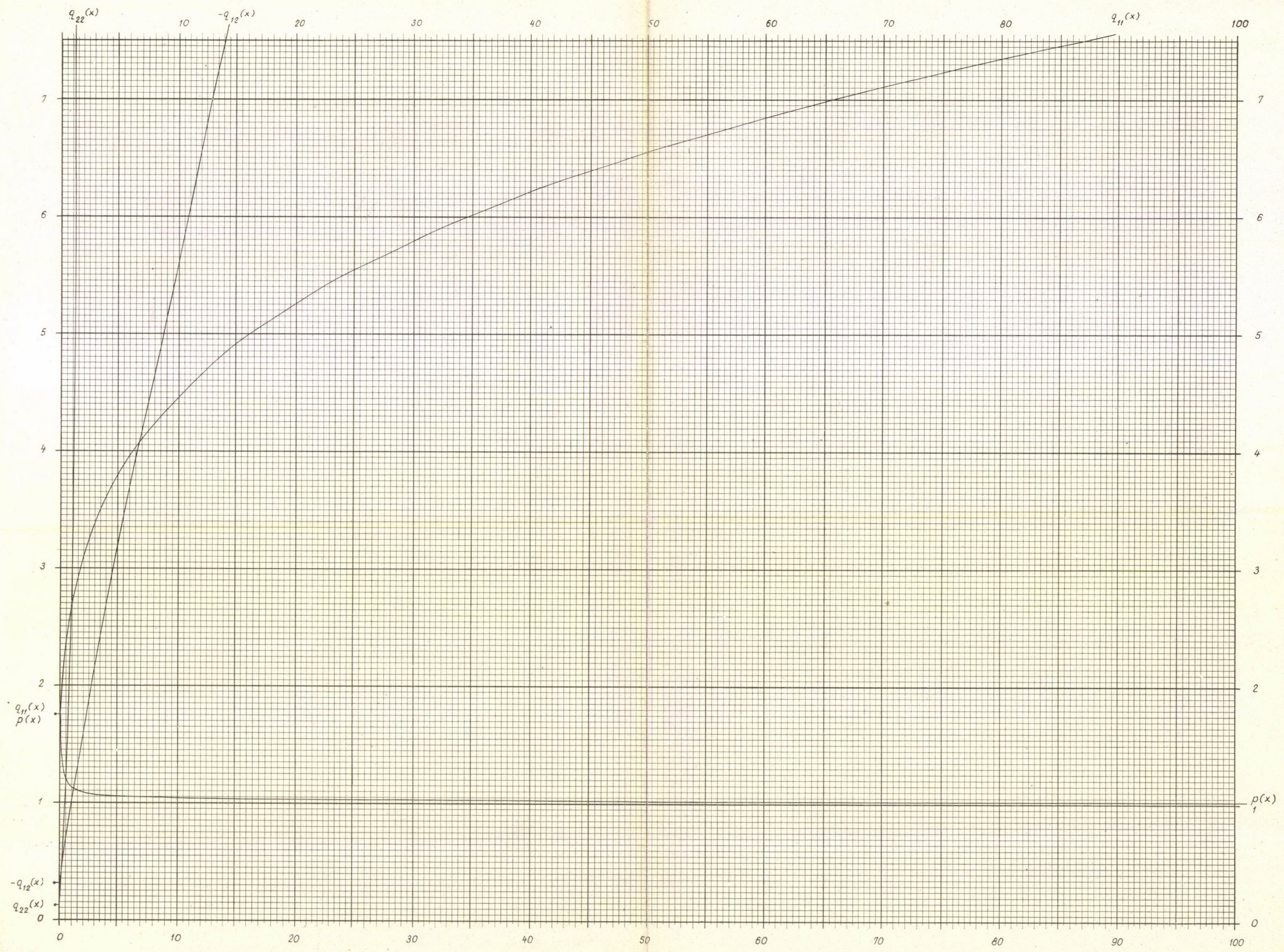












1/a. ábra







Valamint

$$(23) \quad \bar{H}^{(2)} = \text{diag} (\bar{H}_1^{(2)}, \bar{H}_2^{(2)} \dots \bar{H}_m^{(2)})$$

ahol

$$\bar{H}_k^{(2)} = \begin{pmatrix} m_{k1} \\ m_{k2} \\ \vdots \\ m_{kn} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

úgy, hogy

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Ezeknek az operátoroknak segítségével

$$(24) \quad [\bar{A}_{ij}] = \bar{H}^{(1)} \cdot A \cdot G^{(1)},$$

$$(25) \quad [\bar{Q}_{kl}] = \bar{H}^{(2)} \cdot Q \cdot G^{(2)}.$$

Mivel az itt értelmezett operátorok az aggregálásnál használt megfelelő operátorokkal szorozva az egységmatrixot adják; ténylegesen a fenti tulajdonságú desagregálást hajtjuk velük végre.

A (14), (15), (20) és (21) számú összefüggések felhasználásával a két alapmodell technológiai mátrixai között az alábbi azonosságok állanak fenn:

$$(26) \quad Q = G^{(2)} \cdot [\bar{Q}_{kl}] H^{(2)} = G^{(2)} V [\bar{A}_{ij}] V H^{(2)} = \\ = G^{(2)} \cdot V \cdot H^{(1)} \cdot A \cdot G^{(1)} \cdot V \cdot H^{(2)}$$

$$(27) \quad A = G^{(1)} [\bar{A}_{ij}] H^{(1)} = G^{(1)} \cdot V \cdot [\bar{Q}_{kl}] \cdot V \cdot H^{(1)} = \\ = G^{(1)} \cdot V \cdot \bar{H}^{(2)} \cdot Q \cdot G^{(2)} \cdot V \cdot H^{(1)}.$$

Célkitűzésünknek megfelelően a (6) és (7) összefüggések révén a teljes termeléseket, (8) és (9) segítségével a netto termeléseket, míg végül (26.) és (27) alapján a technológiai mátrixokat transzformálhatjuk az egyik alapmodellből a másikba. A két alapmodell párhuzamosan történő felépítésével és felhasználásával kapcsolatos közgazdasági problémákat illetően utalunk [3]-ra.

(Beérkezett: 1960. X. 5.)

#### IRODALOM

- [1] BODEWIG: *Matrix Calculus*. North Holland Publishing Comp. 1959, Amsterdam.
- [2] FEI, J. C. N.: „A fundamental Theorem for the Aggregation Problem of Input-Output Analysis.” *Econometrica* **24** (1956) 400—412.
- [3] BOD P.: Néhány gyakorlati megjegyzés az ágazati kapcsolatok formális elemzéséhez. Statisztikai Tudományos Konferencia. (Budapest, 1961. jún. 1—5.) Sokszorosított előadás anyag, 36. o.

## О СВЯЗИ «ИНПУТ-ОУТПУТ» БАЛАНСОВ ОТРАСЛЕГО И АДМИНИСТРАТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ

P. BOD

### Резюме

В практике планирования венгерского народного хозяйства с истекших годов употребались для выявления связей между отраслями два баланса. В одном народное хозяйство группируется по производственным отраслям, второй опирается на административное воззрение.

Опыты практического применения упомянутых моделей показали, что процессы народного хозяйства оказывается часто целесообразным рассматривать одновременно и в административной и в отраслевой структуре.

Это сделает нужным исследовать взаимную связь между переменными построенных на двух разных агрегационных принципов моделей.

Формулы (6) и (7) показывают комплексные производственные связи, а формулы (8) и (9) связи между производственными величинами. Формулы (26) и (29) отражают связь между матрицами коэффициентов.

## ÜBER DIE ZUSAMMENHÄNGE DER NACH PRODUKTIONSZWEIGEN BZW. VERWALTUNGSZWEIGEN ZUSAMMENGESTELLTEN VERFLECHTBILANZEN

P. BOD

### Zusammenfassung

Die ungarische Praxis der Volkswirtschaftsplanung nahm in den vergangenen Jahren zwei Verflechtungsbilanzen in Gebrauch. In dem einen wird die gesamte Volkswirtschaft in Produktionsgruppen geteilt der andere beruht dagegen auf der sog. Verwaltungs-Betrachtungsweise.

Die Erfahrungen, die man mittels der praktischen Anwendung der erwähnten Modelle erreichen konnte — zeigten, dass es oft zweckmässig ist die Prozesse der Volkswirtschaft gleichzeitig in Verwaltungsstruktur und in Produktionszweigstruktur zu betrachten.

Das nötigt die Untersuchung der gegenseitigen Zusammenhänge diejeniger Variablen, die in den mit der Hilfe zweierlei Aggregationsprinzipien erbauten Modelle vorkommen.

Die Formeln No. 6 und 7 zeigen den Zusammenhang zwischen die Brutto-produktionen der zwei Modelle; die Formeln No. 8 und 9 den der Nettoproduktionen. Die Formeln 26 und 27 schildern den Verhältniss zwischen die Koeffizientenmatrizen.



## EGY INFORMÁCIÓELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD

### Bevezetés

E dolgozatban egy olyan probléma matematikai modelljét állítjuk fel és oldjuk meg, amely a legkülönbözőbb tudományokban, valamint számos egymástól távolos gyakorlati tevékenység során szinte mindennapos. A problémát először egy konkrét példán keresztül ismertetjük; azután rámutatunk néhány más szituációra is, ahol olyan probléma lép fel, amely ugyanarra a matematikai modellre vezet.

Tegyük fel, hogy egy sok alkatrészből álló, bonyolult, összetett berendezésben (pl. egy autó motorjában, egy elektromos hálózatban, egy elektronikus számológépben vagy más sok elemből felépített komplex berendezésben) valami hiba lép fel; a hiba kijavítására törekvő szerelő először meg kell, hogy találja a hibát; csak ez után kerülhet sor a hiba kiküszöbölésére. Tudvalevő, hogy a hiba megkeresése gyakran sokkal több időt és fáradságot igényel, mint a hiba kijavítása. Mi itt csak a hiba megkeresésének folyamatával foglalkozunk.

Jelöljük  $H$ -val az összetett berendezés önálló egységét alkotó részeinek halmazát; jelöljék  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $H$  halmaz elemeit. A hiba tehát vagy  $x_1$ -ben, vagy  $x_2$ -ben,  $\dots$ , vagy  $x_n$ -ben van. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  alkatrészek között csak egyetlen egy hibás van. Attól, hogy milyen jellegű a hiba (pl. kiégett egy elektroncső, valahol zárlat van, stb.) tekintsünk el. Minket csak az érdekel, hogy *melyik* a hibás alkatrész. Hogyan lát a szerelő munkához? Megpróbálja működtetni a berendezés egyes részrendszereit. Ha a berendezés egy részrendszere, amely pl. az  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$  elemekből áll, nem működik, akkor a hibás alkatrész az  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$  elemek között van; ha ez a részrendszer hibátlanul működik, akkor a hibás alkatrész nem az  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$  elemek között, hanem a  $H$  halmaznak az  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$  sorozathoz nem tartozó elemei között van. Akár működik tehát a kiválasztott részrendszer, akár nem, a hibát sikerült bizonyos mértékig lokalizálni, a hiba tekintetében számbajövő alkatrészek  $H$  halmazát ezen halmaz egy részhalmazára leszűkíteni. Tekintve, hogy ez a részhalmaz általában még mindig sok alkatrészt tartalmaz, a szerelő ezután egy másik részrendszerrel próbálkozik. Kellő számú részrendszer megvizsgálása alapján a hibás alkatrész egyértelműen lokalizálható. A részrendszerek kiválasztását a berendezés konstrukciója bizonyos tekintetben korlátozza; ezen korlátokon belül azonban a szerelő tetszésétől (mondhatjuk bátran: intuíciójától) függ, hogy mely részrendszereket vizsgálja meg és milyen sorrendben.

Mivel feltehetőleg egy másik szerelő másként járt volna el, úgy tekinthetjük, hogy a megvizsgált részrendszerek kiválasztása véletlenszerűen tör-



ténik. Előfordulhat az is, hogy az egyes részvizsgálatok eredménye téves és így félrevezető. (Pl. a vizsgálat céljából összekapcsolt alkatrészek között létesített kontaktus laza; a vizsgálatához felhasznált mérőműszer maga sem kifogástalanul működik stb.). Így tehát a hibakeresés folyamatára a következő matematikai modellt állíthatjuk fel:

Meg akarjuk határozni az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elemekből álló  $\mathbf{H}$  halmaz egy előttünk ismeretlen elemét — jelöljük ezt  $x$ -szel. E célból taláalomra kiválasztjuk a  $\mathbf{H}$  halmaz  $H_1, H_2, \dots, H_k$  részhalmazait. Tegyük fel, hogy a  $H_1, H_2, \dots, H_k$  halmazok választásai egymástól függetlenek és a  $H_1, H_2, \dots, H_k$  halmazok mindegyike ugyanakkora  $\left(\text{tehát } \frac{1}{2^n}\right)$  valószínűséggel lehet azonos a  $\mathbf{H}$  halmaz

bármely részhalmazával. Miután a  $H_j$  halmazt megválasztottuk, választ kapunk arra a kérdésre, hogy a keresett  $x$  elem hozzátartozik-e a  $H_j$  halmazhoz. Az így kapott válaszok azonban nem mindig felelnek meg a valóságnak; tegyük fel, hogy arra a kérdésre, hogy a  $H_j$  halmaz tartalmazza-e a keresett  $x$  elemet,  $\beta$  valószínűséggel  $(\frac{1}{2} < \beta \leq 1)$  a valóságnak megfelelő választ, és  $1 - \beta$  valószínűséggel hamis választ kapunk. Tegyük fel továbbá, hogy az egyes kérdésekre kapott válaszok helyes vagy hibás volta egymástól független. A matematikai probléma mármost a következő: ha  $n$  és  $\beta$  értéke ismert, és elő van írva egy  $\alpha$  szám  $(0 < \alpha < 1)$ , milyen nagyra kell választani  $k$  értékét (tehát hány taláalomra választott részhalmazt kell megvizsgálni) ahhoz, hogy a kapott (részben helyes, részben téves) válaszokból legalább  $\alpha$  valószínűséggel identifikálni tudjuk a keresett  $x$  elemet?

Mielőtt a fentiekben megfogalmazott matematikai probléma megoldását megadnánk, megemlítünk néhány más, az összetett berendezésekben fellépő hiba keresésétől látszólag nagyon is távolieső szituációt, amely ugyanerre a matematikai modellre vezethető vissza. Természetesen a felsorolt példák mindegyike rendelkezik bizonyos sajátos vonásokkal, amelyek a fentemlített leegyszerűsített modellben nem tükröződnek. Egy-egy konkrét szituáció leírására a matematikai modell természetesen megfelelően módosítható. Mi itt első lépésként csak a fentiekben ismertetett leegyszerűsített modellel foglalkozunk, mivel az a szóbanforgó, egymástól sok szempontból különböző konkrét szituációk bizonyos közös vonásait ragadja meg.<sup>1</sup> További vizsgálatok tárgyát kell, hogy képezze a fentemlített alapmodell olyan módosításainak vizsgálata, amely révén egy-egy konkrét szituáció sajátosságait pontosabban lehet visszaadni.<sup>2</sup>

Második példaként tekintünk az orvosi diagnózis példáját. Amikor egy orvos egy betegről diagnózist állít fel, lényegében hasonló módon jár el, mint a szerelő, aki a hibát keresi. E példában célszerűbb a  $\mathbf{H}$  halmaz elemeinek az összes lehetséges betegségeket tekinteni (és nem pl. a beteg egyes szerveit, hiszen számos betegség nem egy szervnek, hanem az egész szervezetnek a megbetegedése). A beteget diagnosztizáló orvos úgy jár el, hogy a betegen bizonyos vizsgálatokat végez (megméri a hőmérsékletet, vérnyomást, vérsejtszármányt,

<sup>1</sup> Az [1], [2] és [3] dolgozatokban már foglalkoztunk a jelen dolgozat tárgyát képező probléma azon speciális esetével, amikor  $\beta = 1$ , vagyis amikor a kapott válaszok kivétel nélkül helyesek, továbbá ezen speciális eset másirányú általánosításával. Jelen dolgozatban éppen az a novum, hogy megengedjük azt is, hogy a válaszok egy része hibás legyen.

<sup>2</sup> A [3] dolgozatban a  $\beta = 1$  esetre nézve már foglalkoztunk a modell olyan módosításával, amelynél a különböző részhalmazok nem egyenlő valószínűséggel kerülnek kiválasztásra. Ez a  $\beta < 1$  esetben is megvizsgálandó.



kopogtatja a tüdejét, megnézi a torkát, különböző laboratóriumi vizsgálatokat végeztet, stb.). Az egyes vizsgálatok eredményeképpen a számításba jövő betegségek halmaza egyre jobban leszűkül. Itt is számolni kell azzal, hogy egyes részvizsgálatok eredményei tévesek és félrevezetőek. Itt nemcsak arról van szó, hogy pl. a laboratóriumi vizsgálat során téves műszerleolvasás történhet, hanem arról is, hogy vannak olyan tünetek, amelyek bizonyos betegségnél legtöbbször fellépnek, kivételes esetekben azonban hiányozhatnak. A fent felállított matematikai modell az orvosi diagnózis-felállítás folyamatának kétségtelenül csak nagyon leegyszerűsített képe, azonban a szóbanforgó folyamat bizonyos vonásait helyesen tükrözi.

Harmadik példaként vizsgáljuk meg, hogy hogyan jár el a kémikus, amikor valamilyen ismeretlen anyag kémiai összetételét kívánja megállapítani. Az egyszerűség kedvéért gondoljunk a kvalitatív kémiai analízisre, mivel a kvantitatív analízis olyan problémákat vet fel, amelyek bonyolultabb matematikai modellre vezetnek. Ez esetben a **H** halmaz elemeit az összes számbajövő vegyületek képezik. Az ismeretlen anyag összetételének megállapítása céljából a kémikus az anyagot bizonyos vizsgálatoknak veti alá (pl. bizonyos savak, lúgok, stb. hatásának teszi ki, lakmusz-papír-próbát végez stb.). Minden egyes részvizsgálat eredménye szűkíti a lehetőségek halmazát, míg végül kellő számú vizsgálat után a lehetőségek számát sikerül egyre redukálni. Nyilvánvaló, hogy e példában sem elhanyagolható az a lehetőség, hogy egy-egy részvizsgálat eredménye hibás.

A kvalitatív kémiai analízis példája alkalmas arra is, hogy rámutassunk, hogy a gyakorlatban sokszor nem egyetlen ismeretlent, hanem egyidejűleg több ismeretlent kell meghatározni; hiszen a megvizsgálendő anyag legtöbbször nem homogén, hanem több különböző anyagból áll. A  $\beta = 1$  speciális esetre vonatkozólag a [3] dolgozatban a probléma ilyenirányú általánosítását is megvizsgáltuk. A szimultán meghatározás problémájára a  $\beta < 1$  esetben más alkalommal kívánunk visszatérni.

A kémiai analízis példáján keresztül rámutathatunk a modell egy másik általánosítási lehetőségére is. Egyes részvizsgálatok ugyanis a számításbajövő lehetőségek halmazát nem két, hanem kettőnél több részhalmazra bontják, vagyis az egyes adalékok nem egyszerű dichotómiák, hanem általánosabb felbontások. A  $\beta = 1$  esetet illetőleg [3]-ban ezzel az általánosabb modellel is foglalkoztunk. Itt egyelőre az egyszerű dichotómiákra szorítkozunk; az általános osztályozás modelljét a  $\beta < 1$  esetben is érdemes volna azonban megvizsgálni.

Negyedik példaként tekintsük egy vizsgálóbíró munkáját, aki egy bűntény elkövetőjét akarja megtalálni. Ez esetben a halmaz a gyanúba kerülő egyénekből áll, míg részvizsgálatoknak ez esetben az egyes tanúk kihallgatásai, a bűnjelek megvizsgálása, és más vizsgálatok (pl. ujjlenyomat-vizsgálat, stb.) tekintendők. Mindezek az adatok egyre szűkebbre szorítják a kört a valódi bűnös körül. Az, hogy ez esetben az egyes adatok (pl. tanúvallomások) hitelesége gyakran kérdéses, teljesen nyilvánvaló.

E példák számát szinte korlátlanul lehetne folytatni. Befejezésül még csak egy példát említünk meg, amely mintegy középúton van a fentebb említett gyakorlati problémák és ezek matematikai modellje között, mégpedig az ún. Bar-Kochba játék példáját. Ez a játék ugyanis már maga is mintegy leegyszerűsített modellje a fentebb említett problémáknak. A Bar-Kochba játékban tudvalevőleg két játékos vesz részt — nevezzük őket *A*-nak és *B*-nek.



Az  $A$  játékos gondol valamire, a  $B$  játékos pedig arra törekszik, hogy kitalálja, hogy  $A$  mire gondolt. E célból kérdéseket tehet fel  $A$ -nak, azonban csak olyan kérdés van megengedve, amely igen-nel vagy nem-mel megválaszolható. A kérdésekre kapott válaszokból kell  $B$ -nek kitalálnia, hogy  $A$  mire gondolt. Ha  $H$ -val jelöljük azon „dolgok” (személyek, tárgyak, fogalmak stb.) halmazát, amelyekre az  $A$  játékos gondolhatott, minden kérdés, amit  $B$  feltehet, megfogalmazható olyan alakban is, hogy hozzátartozik-e a gondolt „dolog” a  $H$  halmaz egy bizonyos  $H$  részhalmazához. Mint már [3]-ban rámutattunk, a kérdések kiválasztása még gyakorlott játékos esetében is bizonyos mértékig véletlenszerűnek tekinthető. Míg [3]-ban csak a  $\beta = 1$  esetet tárgyaltuk, vagyis feltettük, hogy az  $A$  játékos minden kérdésre a valóságnak megfelelően válaszol, a Bar-Kochba játék tényleges lefolyásának jobban megfelel az hipotézis, hogy a válaszok bizonyos százaléka (a kérdés félreértése, vagy bizonyos tények ismeretének hiánya folytán) téves. (Lehetséges persze a Bar-Kochba játéknak egy olyan variánsa is, ahol az  $A$  játékosnak jogában áll a kérdések egy részére szándékosan téves választ adni, (pl. azon megszorítással, hogy a valóságnak meg nem felelően megválaszolt kérdések száma a játék során soha nem haladhatja meg az összes, az adott időpontig feltett kérdések számának pl. az ötödrészét).<sup>3</sup>

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a tárgyalt probléma mind gyakorlati, mind pedig elméleti szempontból elsősorban akkor érdekes, ha  $n$  (a  $H$  halmaz elemeinek száma) igen nagy szám. A következőkben ezt mindig fel fogjuk tenni.

Végül még csak azt szeretnénk hangsúlyozni, hogy olyan esetekben, amikor egy komplex berendezésben fellépő hiba keresését, az orvosi diagnózist, a kémiai analízist stb. képzett szakember végzi, az általa követett eljárás erősen eltér az általunk választott modelltől, amennyiben az egyes részvizsgálatok megválasztása csak részben függ a véletlentől, nagyobb részben viszont azt az illető szakember szaktudása, tapasztalatai, intuíciója szabják meg. Ha azonban az említett vagy azokhoz hasonló feladatok elvégzésére készített kibernetikai berendezésre gondolunk, annak működése már aligha képzelhető el másképpen mint az általunk választott modellnek megfelelően. Egy hibakereső gép konstruálása viszont a kibernetika mai állása mellett teljes mértékben a lehetőségek határán belül van, bár tudomásom szerint ezideig ilyen gép nem készült. Vizsgálataink eredményei felhasználásra kerülhetnek egy ilyen hibakereső kibernetikai berendezés konstrukciójánál.

Az 1. §-ban a fentebb megfogalmazott matematikai probléma megoldását adjuk meg. A 2. §-ban megmutatjuk, hogyan függ össze a vizsgált probléma a matematikai statisztika „diszkriminációs probléma” elnevezés alatt ismert problémakörével. A 3. §-ban viszont azt mutatjuk meg, hogyan függ össze az általunk vizsgált probléma az információelmélet szokásos kérdésfeltevésével (a zajos csatornán keresztül való információátvitel problémájával).

## 1. §. A probléma megoldása

E §-ban a következő problémával foglalkozunk. Legyen  $H$  egy  $n$  elemű halmaz. Legyenek  $H_1, H_2, \dots, H_k$  a  $H$  halmaz találmra, egymástól függetle-

<sup>3</sup> Természetesen ez a megszorítás nem teljesen felel meg a következőkben tárgyalt modell feltevéseinek, azonban nem is áll attól túl távol.



nül kiválasztott részhalmazai. Tegyük fel, hogy  $H_j$  ugyanakkora (tehát  $\frac{1}{2^n}$ ) valószínűséggel lehet azonos  $\mathbf{H}$  bármely részhalmazával.<sup>4</sup> Legyen  $x$  a  $\mathbf{H}$  halmaz egy ismeretlen eleme. Tegyük fel, hogy arra a kérdésre, hogy hozzátartozik-e  $x$  a  $H_j$  részhalmazhoz,  $\beta$  valószínűséggel helyes, és  $1-\beta$  valószínűséggel hamis választ kapunk ( $\frac{1}{2} < \beta < 1$ ), mégpedig oly módon, hogy az egyes kérdésekre kapott válaszok helyes ill. hamis volta független a többi kérdésre kapott válasz helyes ill. hamis voltától. Kérdés: milyen nagyra kell  $k$  értékét választani ahhoz, hogy a kapott válaszokból legalább  $\alpha$  valószínűséggel meg tudjuk állapítani, hogy a  $\mathbf{H}$  halmaz melyik  $x$  eleméről van szó? ( $0 < \alpha < 1$ ).

Feltesszük, hogy a fenti problémában szereplő  $\beta$  és  $\alpha$  megadott rögzített számok, és elsősorban a keresett  $k$  értéknek  $n$ -től való függését vizsgáljuk, ha  $n \rightarrow +\infty$ . Annak valószínűségét, hogy az ismeretlen  $x$  elemet  $k$  válaszból meg lehet állapítani,  $P_{nk}$ -val fogjuk jelölni; valójában  $P_{nk}$  attól is függ, hogy a kapott válaszok kiértékelését milyen módszer alapján végezzük el. A következőkben a válaszok kiértékelésének egy plauzibilis konkrét módját fogjuk alkalmazni. Arra a kérdésre, hogy miért éppen ezt az eljárást választottuk, még a 2. §-ban visszatérünk.

Mielőtt eredményünket megfogalmaznánk, rá szeretnénk mutatni, hogy az a feltevés, hogy  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$  nem jelenti az általánosság megszorítását. Ugyanis a  $\beta = \frac{1}{2}$  esetben nyilvánvalóan a válaszok semmi információt nem nyújtanak, míg a  $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$  eset visszavezethető az  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$  esetre oly módon, hogy minden választ az ellenkezővel helyettesítünk.

Vezessük be a következő jelölést:

$$(1.1) \quad I(\beta) = \beta \log_2 \frac{1}{\beta} + (1 - \beta) \log_2 \frac{1}{1 - \beta}.$$

Másszóval jelöljük  $I(\beta)$ -val a  $\beta$  és  $1 - \beta$  valószínűségekkel álló kéttagú valószínűségeloszlás entrópiáját.  $I(\beta)$  felfogható, mint egy egy válasz helyes voltára vonatkozó bizonytalanság mértékszám. Ily módon egy-egy válasz legfeljebb  $1 - I(\beta)$  információt nyújt. Mivel az  $x$  elem meghatározásához  $\log_2 n$  információ szükséges, heurisztikus megfontolás szerint csak akkor remélhetjük, hogy a  $k$  válasz elegendő  $x$  meghatározására, ha  $k(1 - I(\beta)) \geq \log_2 n$ , vagyis, ha

$$(1.2) \quad k \geq \frac{\log_2 n}{1 - I(\beta)}.$$

A heurisztikus megfontolással nyert (1.2) alatti alsó korlát nincs is távol a helyes eredménytől, ugyanis érvényes a következő

**Tétel.** Ha  $\frac{1}{2} < \beta < 1$  és

$$(1.3) \quad k(n) = \frac{\log_2 n + y \sqrt{\log_2 n} + o(\sqrt{\log_2 n})}{1 - I(\beta)},$$

<sup>4</sup> Ez azt jelenti, hogy elvben  $H_j$  az üres halmaz vagy maga  $\mathbf{H}$  is lehet, továbbá azt, hogy a  $H_1, H_2, \dots, H_k$  halmazok között elvben ugyanaz a halmaz többször is előfordulhat. A továbbiakban tárgyalt nagyságrendi viszonyok mellett azonban ezen lehetőségek valószínűségei olyan elenyészően kicsinyek lesznek, hogy e lehetőségeket felesleges eleve kizárni; ha e lehetőségeket kizárnánk, ez az  $n \rightarrow +\infty$  határesetre nyert eredményeket egyáltalán nem befolyásolná.

ahol  $y$  tetszőleges rögzített valós szám, és  $I(\beta)$  az (1.1) által definiált mennyiség, akkor<sup>5</sup>

$$(1.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,k(n)} = \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right),$$

ahol

$$(1.5) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

és

$$(1.6) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{I(\beta)}} \log_2 \frac{\beta}{1-\beta}.$$

*Megjegyzés:* A tétel eredménye úgy is fogalmazható, hogy ha  $\alpha$  tetszőleges előírt valószínűség ( $0 < \alpha < 1$ ) és

$$(1.3') \quad k(n) = \frac{\log_2 n + \sigma \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\log_2 n} + o(\sqrt{\log_2 n})}{1 - I(\beta)},$$

akkor

$$(1.4') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,k(n)} = \alpha.$$

Ez a fogalmazás világossá teszi, hogy az  $\alpha$  valószínűségi szint megválasztásától  $k(n)$  csak viszonylag kevésbé függ, hiszen a főtag (1.3')-ben független  $\alpha$ -tól.

**Bizonyítás.** Jelölje  $\tilde{H}_j$  azt a halmazt, amelyről a  $j$ -edik válasz azt állítja, hogy  $x$ -et tartalmazza. Tehát  $\tilde{H}_j = H_j$ , ha  $x \in H_j$  és a  $j$ -edik válasz helyes, vagy ha  $x \notin H_j$  és a  $j$ -edik válasz hamis, míg  $\tilde{H}_j = \bar{H}_j$ , ha  $x \notin H_j$  és a  $j$ -edik válasz helyes, vagy ha  $x \in H_j$  és a  $j$ -edik válasz hamis.<sup>6</sup> Jelöljék  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $\mathbf{H}$  halmaz elemeit. Legyen  $\varepsilon_{hj} = 1$ , ha a  $j$ -edik válasz összhangban van azzal a hipotézissel, hogy  $x = x_h$  és  $\varepsilon_{hj} = 0$ , ha a  $j$ -edik válasz ellentmond annak a hipotézisnek, hogy  $x = x_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Másszóval legyen

$$(1.7) \quad \varepsilon_{hj} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_h \in \tilde{H}_j \\ 0 & \text{ha } x_h \notin \tilde{H}_j. \end{cases}$$

Tegyük fel egy pillanatra, hogy  $x = x_1$ . Ez esetben, ha  $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$  tetszőleges, a 0 és 1 elemekből álló sorozat akkor

$$(1.8) \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{1j} = 1, \varepsilon_{2j} = \delta_2, \varepsilon_{3j} = \delta_3, \dots, \varepsilon_{nj} = \delta_n) = \frac{\beta}{2^{n-1}}$$

és

$$(1.9) \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{1j} = 0, \varepsilon_{2j} = \delta_2, \varepsilon_{3j} = \delta_3, \dots, \varepsilon_{nj} = \delta_n) = \frac{1-\beta}{2^{n-1}}.$$

<sup>5</sup> A kiértékelési módszer a bizonyítás során részletezendő alkalmas választása mellett.

<sup>6</sup> Itt  $\bar{H}_j$  a  $H_j$  halmaznak  $\mathbf{H}$ -ra vonatkozó kiegészítő halmazát jelöli.



Ugyanis  $\varepsilon_{1j} = 1$  akkor és csak akkor áll fenn, ha a  $j$ -edik válasz helyes, hiszen ha a  $j$ -edik válasz helyes, akkor  $\tilde{H}_j$  aszerint egyenlő  $H_j$ -vel vagy  $\bar{H}_j$ -sal, hogy  $x \in H_j$  vagy  $x \notin H_j$ , míg ha a  $j$ -edik válasz hamis, akkor ennek fordítottja igaz. Másrészt viszont, ha  $\delta_2, \dots, \delta_n$  tetszőleges rögzített, a 0 és 1 elemekből álló sorozat, akkor az  $\varepsilon_{2j} = \delta_2, \varepsilon_{3j} = \delta_3, \dots, \varepsilon_{nj} = \delta_n$  feltevések  $\varepsilon_{1j}$  értékével együtt egyértelműen meghatározzák a  $\tilde{H}_j$  halmazt. Ha  $\tilde{H}_j$  adva van, akkor  $H_j$  nem lehet más mint  $\tilde{H}_j$  vagy  $\tilde{\tilde{H}}_j$ . Ilyen módon (1.8) és (1.9) azonnal következik.

Jelölje  $E_{nk}$  azt az  $n \times k$  elemű mátrixot, amelynek  $h$ -adik sorának  $j$ -edik eleme  $\varepsilon_{hj}$  ( $h = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$ ) vagyis legyen

$$(1.10) \quad E_{nk} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1k} \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nk} \end{pmatrix}.$$

(1.8) és (1.9) úgy interpretálhatók (figyelembevétel, hogy az  $E_{nk}$  oszlopait alkotó vektorok a  $H_j$  halmazok megválasztásának feltételezett függetlensége folytán függetlenek), hogy az  $E_{nk}$  véletlen mátrixot úgy származtathatjuk, hogy első sorának minden helyére egymástól függetlenül  $\beta$  valószínűséggel 1-et, ill.  $1-\beta$  valószínűséggel 0-t írunk, míg az összes többi helyre egymástól és az első sor kitöltésétől függetlenül  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel írunk 1-et, ill. 0-t. Más szavakkal, az  $\varepsilon_{hj}$  ( $h = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$ ) valószínűségi változók teljesen függetlenek és

$$(1.11) \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{1j} = 1) = \beta, \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{1j} = 0) = 1 - \beta \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

míg ha  $2 \leq h \leq n$ , akkor

$$(1.12) \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{hj} = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_{hj} = 0) = \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Ha  $x$  nem  $x_1$ -gyel, hanem pl.  $x_h$ -val egyenlő, akkor hasonlóképpen az  $E_{nk}$  mátrix  $h$ -adik sorának elemei lesznek  $\beta$  valószínűséggel 1-gyel és  $1-\beta$  valószínűséggel 0-val egyenlők, és az összes többi sor elemei  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel lesznek 1-gyel, ill. 0-val egyenlők.

Legyen most

$$(1.13) \quad v_h = \sum_{j=1}^k \varepsilon_{hj}.$$

(Most nem tesszük fel, hogy  $x = x_1$ ).

Mármost a kapott válaszok kiértékelését a következő kézenfekvő módszer alapján végezzük: megnézzük, hogy az  $x = x_h$  hipotézisek közül ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) melyiket támasztja alá a legtöbb válasz. Ha egyetlen ilyen  $h$  van, akkor a mellett döntünk, hogy  $x = x_h$ ; ha több ilyen  $h$  volna, akkor azt mondjuk, hogy a válaszok nem teszik lehetővé az egyértelmű döntést. Persze, még ha ezen eljárás egyértelmű is, akkor is lehet az így hozott döntés téves. Ha tehát  $P_{nk}$  jelöli annak a valószínűségét, hogy ezen döntési eljárással helyesen hatá-

rozzuk meg az ismeretlen  $x$  elemet, a fenti konvenció mellett, mely szerint  $x = x_1$ , a helyes döntés valószínűsége

$$(1.14) \quad P_{nk} = \mathbf{P}(v_1 > \max_{2 \leq h \leq n} v_h).$$

Figyelembevéve az  $E_{nk}$  véletlen mátrix elemeinek függetlenségét és az (1.11)–(1.12) összefüggéseket, azonnal adódik, hogy

$$(1.15) \quad P_{nk} = \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \beta^l (1-\beta)^{k-l} \left( \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} \frac{1}{2^k} \right)^{n-1}.$$

(1.15)-ből a Moivre—Laplace tétel és a Stirling-formula segítségével teljesen kézenfekvő aszimptotikus meggondolások segítségével adódik a fenti tétel állítása. A számítás részleteit itt mellőzzük.

## 2. §. A probléma összefüggése a matematikai statisztika ismert problémáival

Az 1. tétel bizonyításából nyilvánvaló, hogy a tárgyalt probléma azonos a következő statisztikai problémával:  $n$  számú  $k$  elemű mintánk van; tudjuk azt, hogy az  $n$  minta független, közülük  $n-1$  egy olyan  $S\left(\frac{1}{2}\right)$  statisztikai soka-

ságból lett véve, amelyben az 1 és 0 számok valószínűsége  $\frac{1}{2}$ , míg az  $n$  minta közül az egyik egy olyan  $S(\beta)$  statisztikai sokaságból lett véve, amelyben az 1 ill. 0 számok valószínűsége  $\beta$  ill.  $1-\beta$  ( $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ). Eldöntendő, hogy az  $n$  minta közül melyik származik  $S(\beta)$ -ből.

Másrészt azt is könnyen beláthatjuk, hogy az általunk választott döntési eljárás tulajdonképpen nem más, mint a maximum likelihood módszeren alapuló eljárás. Ugyanis azon feltevés mellett, hogy a  $h$ -adik minta származik  $S(\beta)$  ból (vagyis  $x = x_h$ ), az  $n$  minta együttes valószínűsége

$$(2.1) \quad W_h = \frac{\beta^{v_h} (1-\beta)^{k-v_h}}{2^{(n-1)k}}$$

és így, ha a maximum likelihood módszer szerint döntünk, úgy azt az  $x_h$ -t fogadjuk el az ismeretlen  $x$ -nek, amelyre  $W_h$  maximális, tehát azt, amelyre  $v_h$  maximális, és mi éppen így járunk el. Ez megvilágítja, hogy miért éppen ezt a kiértékelési eljárást választottuk. A problémát a következőképpen is fogalmazhatjuk. Jelölje  $\Pi_h$  azt a hipotézist, hogy az  $E_{nk}$  mátrix  $h$ -adik sora a  $S(\beta)$  sokaságból, a többi sorai a  $S\left(\frac{1}{2}\right)$  sokaságból vett minták. Az általunk vizsgált probléma úgy is jellemezhető, hogy eldöntendő, hogy a  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  egymást kizáró hipotézisek közül melyik a helyes? E szerint a problémánk az ún. diszkriminációproblémák közé tartozik.

## 3. §. A probléma összefüggése az információelmélet ismert problémáival

Az 1. §-ban tárgyalt probléma a következőképpen is interpretálható. Legyen adva egy zajos csatorna, amelynél a lehetséges bemenő jelek  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , míg a lehetséges kimenő jelek a  $\mathbf{H} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  halmaz összes részhalmazaiból állnak. Jelöljék ezeket  $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(2^n)}$ . Jelölje  $p_{hi}$  (ahol



$h = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, 2^n$ ) annak valószínűségét, hogy a  $H^{(i)}$  halmazt kapjuk kimenő jelként, feltéve, hogy az  $x_h$  jelet adtuk le, és tegyük fel, hogy

$$(3.1) \quad p_{hi} = \begin{cases} \frac{\beta}{2^{n-1}} & \text{ha } x_h \in H^{(i)} \\ \frac{1-\beta}{2^{n-1}} & \text{ha } x_h \notin H^{(i)}. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy  $k$ -szor egymásután leadjuk az  $x_h$  jelet; a feladat az, hogy a felvett  $H_1, H_2, \dots, H_k$  jelekből rekonstruáljuk  $x_h$ -t. (Vegyük észre, hogy ezen átfogalmazásnál még a  $\beta = 1$  esetnek is *zajos* csatornán keresztül való információtovábbítás felel meg!). Kérdés: hányszor kell az  $x_h$  jelet leadni (vagyis milyen nagynak kell választani  $k$  értékét), hogy a felvett jelekből  $x_h$  legalább  $\alpha$  valószínűséggel meghatározható legyen. A probléma ezen átfogalmazásának fő érdekessége abban áll, hogy elvezet a probléma egy igen messze-menő általánosításához. A szóbanforgó kérdés, hogy tudniillik hányszor kell az  $x_h$  jelet leadni, hogy az előírt valószínűséggel dekódolható legyen, felvethető tetszőleges átmenet-valószínűségekkel bíró zajos-csatorna esetében is. E kérdés-feltevés, bár szorosan összefügg az információelmélet szokásos problematikájával, attól mégis eltér, és tudomásom szerint eddig nem képezte behatóbb vizsgálat tárgyát. Ezen általános információelméleti probléma tárgyalása azonban már túlnőne jelen dolgozat keretén.

(Beérkezett: 1962. február 27.)

#### IRODALOM

- [1] RÉNYI, A.: „On random generating elements of a finite Boolean algebra.” *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961) 75—81.
- [2] RÉNYI, A.: „Statistical laws of accumulation of information.” *Bulletin of the International Statistical Institute, 33<sup>rd</sup> Session*, Paris, 1961, 1—7.
- [3] RÉNYI, A.: „Az információ-akkumuláció statisztikus törvényszerűségeiről.” *MTA III. Osztályának Közleményei* **12** (1962) 15—33.

## ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

A. RÉNYI

### Резюме

Вот типический пример положений, математический модель которого рассматривается в этой работе: Следует найти дефектную часть сложной сети. В таком положении, если число частей, которые могут быть дефектными, очень велико, возможный метод найти дефект следующий: Провер-

яются некоторые под-сети; если под-сеть не работает, то она содержит дефектную часть; если работает, то дефектная часть содержится в дополнительной под-сети. Если сеть состоит из  $n$  частей и проверяются подходящим образом выбранные  $k > \log_2 n$  подсети, то таким образом найдется дефектная часть. В работе рассматривается, сколько таких проверок нужно выполнять, если под-сети выбираются случайным образом, независимо друг от друга, так что при каждом выборе каждая возможная под-сеть выбирается с той же самой вероятностью. При этом предполагается, что проверка под-сетей не всегда, а только с вероятностью  $\beta$  ( $1/2 < \beta \leq 1$ ) дает правильный результат и с вероятностью  $1 - \beta$  получается ошибочный ответ на вопрос, содержит ли под-сеть дефект. Такой вопрос может иметь значение при конструировании автоматов для поиска дефекта.

Доказывается следующая теорема: Если положим

$$I(\beta) = \beta \log_2 \frac{1}{\beta} + (1 - \beta) \log_2 \frac{1}{1 - \beta}$$

и если проверяются  $k = k(n)$  случайно и независимо выбранные под-сети, которая состоит из  $n$  частей, где  $k(n)$  зависит от  $n$  следующим образом:

$$k(n) = \frac{\log_2 n + y \sqrt{\log_2 n} + o(\sqrt{\log_2 n})}{1 - I(\beta)}$$

( $y$  фиксированное вещественное число), и  $P_{n,k}$  обозначает вероятность того, что из результатов проверок можно найти дефектную часть сети, то имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,k(n)} = \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

и

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{I(\beta)}} \cdot \log_2 \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Замечается, что имеются и другие процессы (кроме процесса нахождения дефекта), для которых выше описанная проблема может служить очень упрощенной моделью, так например процесс, с помощью которого врач найдет диагноз, или процесс химического качественного анализа и т. д.

Наконец указано, что вопрос может быть рассмотрен и как проблема математической статистики, или как частный случай следующей проблемы передачи информации: Пусть дан дискретный безпамятный канал с шумом. Передается тот же самый сигнал много раз; как можно из полученных сигналов разгадать, какой сигнал был передан?



# ON A PROBLEM OF INFORMATION THEORY

A. RÉNYI

## Abstract

A typical example of the situation, a mathematical model of which is discussed in this paper, is the following: one has to find that part of a complicated network which got out of order. In such a situation if the number of places of the defect is very large, a possible method to find the defect is to try whether certain sub-networks do work or not. If a sub-network (consisting of a subset of the parts of the total network) does not work, then it contains the defective part (it is supposed that only a single part is defective), while if it works, then the defective part is contained in the complementary subset. If the network consists of  $n$  parts and if  $k > \log_2 n$  suitably chosen sub-networks are tested in this way, the defective part can be determined. The question arises, how many sub-networks have to be tested, if the sub-networks are chosen completely at random. The answer to this question may be useful if one wants to construct defect-searching automata. The corresponding mathematical problem is solved under the supposition that the results of the tests of the sub-networks are correct with probability  $\beta$  only ( $1/2 < \beta \leq 1$ ) while with probability  $1-\beta$  they are false and thus misleading.

Let us put

$$(1) \quad I(\beta) = \beta \log_2 \frac{1}{\beta} + (1 - \beta) \log_2 \frac{1}{1 - \beta}.$$

It is shown that if the total number of parts any one of which may be defective is equal to  $n$ , and  $k = k(n)$  randomly and independently chosen sub-networks are tested (so that the probability of choosing any particular sub-network is the same) where

$$(2) \quad k(n) = \frac{\log_2 n + y \sqrt{\log_2 n} + o(\sqrt{\log_2 n})}{1 - I(\beta)}$$

where  $y$  is a fixed real number, then if  $P_{nk}$  denotes the probability that by evaluating the tests in a suitable way, the defective part can be identified, one has

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,k(n)} = \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

where

$$(4) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

and

$$(5) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{I(\beta)}} \log_2 \frac{\beta}{1-\beta}$$

It is mentioned that the mathematical problem solved above may also be considered as a highly simplified model of other processes too, e. g. the process

applied by a physician trying to make a diagnose, or the work of a chemist who wants to analyse some material of an unknown composition, or even of a judge trying to find out the truth in some criminal case. The special case when all tests lead to reliable results (i. e.  $\beta = 1$ ) has been considered in previous papers ([1], [2], [3]) of the author. It is pointed out that from the point of view of statistics the problem is one of discrimination, while from the point of view of information theory the problem can be characterized as follows: a discrete noisy memoryless channel is given and the same symbol is transmitted several times; one has to determine this transmitted symbol from the received symbols. The special channel corresponding to the problem solved in the paper is such that the number of symbols which can be sent is  $n$ , that of symbols which can be received is  $2^n$  while the matrix of transition probabilities (the channel probability function) contains only two sorts of elements, so that in each row exactly one half of the elements belong to the first, and one half to the second sort and all columns are different.



## A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET OSZTÁLYSEMINÁRIUMAIBAN 1960-BAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK

### A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

**1. RÉNYI ALFRÉD:** *Markov láncok ergodicitásának bizonyítása információelméleti módszerrel.* (Január 14.)

Lásd az előadó „On measures of entropy and information” című dolgozatát, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. I., 1961, 547—561.

**2. BÁNKÖVI GYÖRGY:** *Integrálok kiszámítása Monte Carlo módszerrel.* (Február 4.)

Lásd az előadó „Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the one dimensional random space filling” című dolgozatát, *e Közlemények* **5** (1960) A. 3, 339—352.

**3. FISCHER JÁNOS:** *Kétváltozós sztochasztikus kapcsolatokról.* (Február 11.)

Lásd az előadó CSÁKI Péterrel közös „On bivariate stochastic connection” című dolgozatát, *e Közlemények* **5** (1960) A. 3, 311—323.

**4—5. JUVANCZ IRÉNEUSZ:** *A nem-paraméteres eljárások kontraindikációi orvosi kísérleteknél.* (Március 24. és 31.)

Lásd: „Contraindications of non-parametric methods in medical experimentation.” *Quantitative Methods in Pharmacology*, *Proceedings of a Symposium held in Leyden, 1961.* North Holland Publishing Company, Amsterdam. 159—171.

**6—7. PALÁSTI ILONA:** *Többdimenziós véletlen térkitöltés.* (Április 7. és 14.)

Lásd a szerző „On some random space filling problems” című dolgozatát, *e Közlemények* **5** (1960) A. 3, 353—360.

**8. CSÁKI PÉTER:** *Kétváltozós sztochasztikus kapcsolatokról.* (Április 28.)

Lásd az előadó FISCHER Jánossal közös „On bivariate stochastic connection” című dolgozatát, *e Közlemények* **5** (1960) A. 3, 311—323.

**9. SARKADI KÁROLY:** *Exponenciális eloszlásból vett minta középértékének elhelyezkedése a rendezett minta elemei között.* (Május 5.)

Lásd az előadó SCHNELL Edit és VINCZE Istvánnal közös „On the position of the sample mean among the ordered sample elements” című dolgozatát, *e Közleményekben*, sajtó alatt.

**10. RÉNYI ALFRÉD:** *Aprítási folyamatok egy új modelljéről, amely a lognormális helyett a log-gamma eloszlásra vezet.* (Május 12.)

Egyes aprítógépek (pl. az ún. „visszasurrantó” malmok) olyan anyagot állítanak elő, amelyben a darabok nagysága egy meghatározott felső határt



nem haladhat meg. Az ilyen aprítási folyamatoknál az aprítás KOLMOGOROV-tól származó elméletének alapfeltevései nem teljesülnek és így várható, hogy a szemnagyság szerinti eloszlás a lognormális eloszlástól el fog térni. A tapasztalatok ezt valóban meg is erősítették. Felmerül a probléma, hogyan lehet a KOLMOGOROV-féle elméletet úgy módosítani, hogy a vizsgált aprítási eljárások esetére is megadja a szemcsemegoszlás törvényszerűségét. Az elméleti eloszlás alakja meghatározásának gyakorlati jelentősége abban áll, hogy adott aprított anyagnál a paraméterek számával megegyező számú szitamaradékból a paramétereket meghatározva az aprított anyag nehezen vagy egyáltalán nem mérhető jellemzői (pl. összfelszín) kiszámíthatókká válnak.

Az előadó az említett problémával a Hőtechnikai Kutató Intézet ösztönzésére, BÉKÉSSY Andrással együtt foglalkozott. A probléma vizsgálata során egy olyan aprítási modellt állítottak fel, amely arra az eredményre vezetett, hogy a szemcsék súly szerinti eloszlása log-gamma eloszlás, vagyis, a szemcsesúly logaritmus gamma-eloszlású. A log-gamma eloszlás három paramétert tartalmaz (szemben a lognormális eloszlás két paraméterével); ezek alkalmas választásával adott tapasztalati adatokhoz megkereshető az azokhoz legjobban illeszkedő log-gamma eloszlás; a numerikus számolásnál fel lehet használni a nem-teljes gamma-függvény táblázatát.

II. LUKÁCS, E.<sup>1</sup>: *Egy karakterizációs probléma.* (Szeptember 2.)

HÁJEK, J.<sup>2</sup>: *On linear estimation theory for an infinite number of observations.*

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát, Теория Вероятностей и её применения **6** (1961) 182–193.

12–13. ERDŐS PÁL: *Néhány valószínűségszámítási problémáról.* (Szeptember 29. és október 6.)

14. SZCZOTKA, F.<sup>3</sup>: *Az öröklés egy valószínűségszámítási modellje.*

(November 10.)

(W. KLONECKI által kidolgozott modell ismertetése.)

15. RÉNYI ALFRÉD: *Megjegyzések a Kolmogorov-Bernstein-féle egyenlőtlenségekről.* (December 1.)

Lásd az előadó „On Kolmogorov's inequality” című dolgozatát, e Közlemények **6** (1961) A. 3, 411–415.

16–17. MOGYORÓDI JÓZSEF<sup>4</sup>: *A Kolmogorov egyenlőtlenség egy általánosítása.* (December 15. és 22.)

Lásd a szerző „On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables” című cikkét, e Közlemények **6** (1961) A. 3, 365–371, valamint A. RÉNYI: „On Kolmogorov's inequality” című dolgozatát, e Közlemények **6** (1961) A. 3, 411–415.

### A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

1. FISCHER JÁNOS: *Beszámoló a lengyelországi tanulmányútról.* (Január 14.)

2. SARKADI KÁROLY: *A normalitásvizsgálatról.* (Január 21.)

Lásd Sarkadi K.: „On testing for normality” című dolgozatát, e Közlemények **5** (1960) A. 269–275.

<sup>1</sup> Washington.

<sup>2</sup> Prága.

<sup>3</sup> Wrocław.

<sup>4</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézete.



**3—4. CSÁKI ENDRE: Referáló előadássorozat.** (Február 4. és 11.)

Az előadó a következő könyvet ismertette: Линник, Ю. В.: Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. (Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит. Москва, 1958.).

**5. VAS ÉVA: Megjegyzések K. Stange:** „Die zeichnerische Behandlung von Plänen für messende Prüfung” című dolgozatához. (Február 18.)

Az előadó ismertette K. Stange fenti dolgozatát (lásd Metrika, **I.**, (1958), 111—129.), valamint a dolgozathoz fűzött megjegyzéseit, lásd Vas É.: „Bemerkungen zur Arbeit von K. Stange” című dolgozatát (Metrika, **3** (1960) 212—214.).

**6. SARKADI KÁROLY: Távközlési problémákról.** (Február 25.)

Az előadó ismertette a KGM Híradástechnikai Igazgatóságától kapott megbízással kapcsolatos matematikai problémákat.

**7. VINCZE ISTVÁN: Kétváltozós empirikus eloszlásfüggvények eltéréséről.** (Március 3.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát (A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei **10** (1960) 3, 361—372.).

**8. ZAJTA AURÉL:<sup>5</sup> A Lehmann próbáról.** (Március 10.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát, e Közlemények **5** (1960) B, 447—459.

**9. SARKADI KÁROLY: Bolyongási problémákról.** (Március 17.)

Lásd az előadó „On Galton's rank order test” című dolgozatát, e Közlemények **6** (1961) A. 127—131.

**10. ÉLTETŐ ÖDÖN:<sup>6</sup> Mintavételi eljárások népszámlálásnál.** (Március 31.)

Lásd ÉLTETŐ Ö.: „A munkás-alkalmazotti jövedelmi felvétel egyes matematikai statisztikai vonatkozású kérdései” c. dolgozatát (Statisztikai Szemle **38** (1960) 805—826.).

**11. BÁNKÖVI GYÖRGY: Referáló előadás.** (Április 7.)

Az előadó a nem egyenletes eloszlásból származó véletlen számok előállításai módszereit ismertette, különösen a következő dolgozat alapján: VOTAW, D. F., Jr.—RAFFERTY, J. A., „High speed sampling” (MTAC **5** (1951), 33. 1—8.).

**12. CSÁKI ENDRE: A Galton próbával kapcsolatos problémákról.** (Ápr. 21.)

Lásd CSÁKI E.—VINCZE I.: „On some problems connected with the Galton-test” című dolgozatát, e Közlemények **6** (1961) A. 97—109.

**13—22. CSÁKI PÉTER, FISCHER JÁNOS és RÉVÉSZ PÁL:<sup>7</sup> Referáló előadássorozat.** (Május 12., 19. és 26., június 2. és 9., október 6., 13., 20. és 27., november 3.)

Az előadók a következő könyvet ismertették: HALMOS P. R., „Introduction to Hilbert space” (Chelsea Publishing Company New York, 1951).

**23. BÁNKÖVI GYÖRGY: A Nim játék egy általánosításáról.** (November 10.)**24. VINCZE ISTVÁN: Két statisztikán alapuló rendezett mintás próbákról.** (November 17.)

Az előadó a valószínűségi hányados próba alkalmazásának kérdésével foglalkozott rendezett minták esetén.

CSÁKI ENDRE: Bolyongási problémákról. (November 17.)

<sup>5</sup> Agrártudományi Egyetem.

<sup>6</sup> Központi Statisztikai Hivatal.

<sup>7</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Lásd CSÁKI E.: „On the number of intersections in the one-dimensional-random walk” című dolgozatát, e Közlemények **6** (1961) A. 281–286.

**25. DUKÁTI FERENC:**<sup>8</sup> *Beszámoló a Karl-Marx-Stadt-i matematikai statisztikai kollokviumról.* (November 24.)

### A valós függvénytani osztály topológiai szemináriuma

**1. CSÁSZÁR ÁKOS:** *Közönséges görbékről.* (Január 12.)

Lásd Á. CSÁSZÁR et J. CZIPSZER: „Sur les courbes irramifiées”. Acta Mat. Ac. Sci. Hung. **9** (1959), 315–328.

**2. CSÁSZÁR ÁKOS:** *Triódamentes görbékről.* (Január 26.)

Lásd Á. CSÁSZÁR: „Sur les courbes atriodiques.” Acta Mat. Ac. Sci. Hung., **9** (1958), 229–232.

**3–4. FREUD GÉZA:** *Általános ívekre való felbontásról.* (Febr. 8. és 19.).

**5–6. PÁSZTOR ISTVÁN:**<sup>9</sup> *Ayres egy tételéről.* (Március 4. és 18.).

Lásd K. Menger: „Kurventheorie”, Leipzig, 1932.

**7–8. ALEXITS GYÖRGY:** *Megjegyzések a „Görbeelmélet” néhány még nem kidolgozott kérdéséhez.* (Április 1. és 5.).

Lásd ALEXITS György: „Baumkurven”. Monatshefte für Math. **40** (1933), 407–410.

**9. GALLAI TIBOR:** *Menger-féle gráftétel.* (Április 29.).

Lásd K. Menger: „Kurventheorie”, Leipzig, 1932.

**10–12. CSÁSZÁR ÁKOS:** *Az  $n$ -láb és  $n$ -ív tétel.* (Május 13., június 10. és 27.). Lásd: K. Menger: „Kurventheorie”, Leipzig, 1932.

**13–15. CSÁSZÁR ÁKOS:** *Gráfok topológiai jellemzése.* (Október 19., november 2. és 16.). (Az erről szóló cikk sajtó alatt).

**16–17. CSÁSZÁR ÁKOS:** *Folytonos függvények nívóhalmazainak szerkezetéről.* (November 30., december 14.)

### A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

**1–3. ADLER GYÖRGY:** *Referáló előadássorozat.* (Január 12., február 9. és 23.)

Az előadó folytatta a következő cikk ismertetését: FISCHER, G., „Una introduzione alla teorie delle equazioni integrali singolari” (Rendiconti Matematica e delle sue applicazioni **17** (1958) 82–191).

**4–5. HAJTMAN BÉLA:** *Referáló előadás.* (Január 19. és február 2.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: FINE, N. J.: „The Jeep problem” (The American Mathematical Monthly **54** (1947) 24–31) és a dolgozatban szereplő tételre egy új bizonyítást adott.

**6. PETHŐ ÁRPÁD:**<sup>10</sup> *Egy kvázilineáris elsőrendű parciális differenciálegyenletrendszer megoldásáról.* (Március 1.)

Az előadó egy kémiai problémából adódó differenciálegyenletrendszer megoldását nem a karakterisztikák ismert módszerével (BIHARI, I.—FREY, T.—PETHŐ, Á.: „Über ein Problem der Gasdynamik” (MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei **5** (1960) 179–202.)) nyeri, hanem PERRON

<sup>8</sup> Magyar Szabványügyi Hivatal.

<sup>9</sup> Budapest, Műegyetem (3-as Matematika).

<sup>10</sup> Központi Kémiai Kutató Intézet, Budapest.



(KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. [Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.] ) nyomán az ismeretlen függvényeknek egy (a peremfeltételekben szereplő) paraméter hatványai szerint való sorbafejtésével.

**7. ADLER GYÖRGY:** *Harmonikus függvények gradiensének becslése a peremértékek segítségével.* (Március 15.)

Az előadás kivonatát lásd: ADLER György: „Estimation du gradient des fonctions harmoniques à l'aide des valeurs aux limites.” (II. Magyar Matematikai Kongresszus, Budapest, 1960. augusztus 24–31. Előadaskivonatok VI. 1.)

**8. KRZYZANSKI, M.:<sup>11</sup>** *Parabolikus egyenletekkel kapcsolatos újabb eredmények.*

Az előadó röviden összefoglalva ismertette azokat az eredményeket, amelyeket a krakói Matematikai Intézet munkatársai az utóbbi években a parabolikus típusú differenciálegyenletekkel kapcsolatban elértek.

**9–15. FÉNYES TAMÁS:** *Referáló előadássorozat.* (Október 27., november 1., 10., 15., 22. és 29., december 8.)

Az előadó a következő cikket ismertette: WŁOKA, J.: „Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten” (Journal für die reine und angewandte Mathematik **202** (1959) 107–128.)

**16. HAJTMAN BÉLA:** *Referáló előadás.* (December 13.)

Az előadó a következő cikk egyes részleteit ismertette: TITCHMARSH, E. C.: „The zeros of certain integral functions (Proceedings of the London Mathematical Society Ser. 2. **25** (1926) 283–302.).

**17. ADLER GYÖRGY:** *Elliptikus és parabolikus egyenletekre vonatkozó maximum-elvek nem-folytonos illetve nem-korlátos kezdeti és peremfeltételek esetén.* (December 20.)

Az elliptikus és parabolikus típusú lineáris parciális differenciálegyenletekre vonatkozó jólismert pozitivitási<sup>12</sup> és unicitási tételek nem-folytonos, illetve nem-korlátos perem- és kezdeti feltételekre vonatkozó kiterjesztésével M. PICONE, A. TYIHONOV, majd PICONE módszerét követve M. KRZYZANSKI foglalkozott. (Lásd pl. KRZYZANSKI, M.: „Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminé par les conditions initiales.” (Ann. de la Soc. Polon. Math. **18** (1945) 145–156.); KRZYZANSKI, M.: „Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non-borné.” (Rendiconti dell'Acad. Nazion. dei Lincei, Serie VIII. **4** (1948) 408–416.); KRZYZANSKI, M.: „Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence.” (Studia Mathematica **11** (1949) 95–125.); KRZYZANSKI, M.: „Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non-borné.” (Ann. Polon. Math. **4** (1957) 93–97.); KRZYZANSKI, M.: „Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale.” (Bulletin de l'Acad. Polon. des Sci. **7** (1959) 131–135.; PICONE, M.: „Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo.” (Math. Annalen, **101** (1929)

<sup>11</sup> Matematikai Intézet, Kraków.

<sup>12</sup> Pozitivitási tételeknek azokat a tételeket nevezzük, melyek a kezdeti és peremértékek pozitív voltából az egyenlet megoldásainak a tartomány belsejében való pozitív voltát mondják ki.



701–712.); TYCHONOFF, A.: „Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.” (Recueil Mathématique).

Az előadó megmutatta, hogy az említett egyenletekre vonatkozó jól ismert maximum-elvek<sup>13</sup> a PICONE—KRZYŻANSKI-féle módszer módosításával (mégpedig annak lényeges leegyszerűsítésével) a nem-folytonos, illetve nem-korlátos kezdeti és peremfeltételek esetére ugyancsak kiterjeszthetők. — Egy ilyen, meglehetősen speciális esetre vonatkozó maximum-elvet az előadó (ADLER Gy.: „Un type nouveau des problèmes aux limites de la conduction de la chaleur.” (Publ. of the Hungarian Academy of Sciences 4 (1959) 109–127.) dolgozatában már bebizonyította.

### A komplex függvénytan osztály szemináriuma

1–6. ALPÁR LÁSZLÓ: *A logaritmikus potenciál*. (Január 8., 15., 22. és 29., február 5. és 12.)

Ismertető előadás DE LA VALLÉE POUSSIN, Ch. J.: „Le Potentiel logarithmique, Balayage et représentation conforme” (Gauthier-Villars, Paris, 1949) című műve alapján.

7–15. BALÁZS JÁNOS: *A sorok összehasonlításának Wirman-féle módszere a kis Picard-féle tétel bizonyítása*. (Február 19. és 26., március 4., 11. és 18., április 2. és 7., május 6. és 13.) Ismertető előadás SAXER, W.: „Über die Picardschen Ausnahmewerk sukzessiven Deriwirten”.

16. ALPÁR LÁSZLÓ—TURÁN PÁL: *Egy egész függvény értékeinek eloszlásáról*. (Május 20.)

Lásd a szerzők „Sur la distribution des valeurs d'une fonction entière” című dolgozatát, e Közlemények 6 (1961) A. 157–164.

17–24. FENYŐ ISTVÁN: *Szubharmonikus függvények*. (Május 27., június 3. és 17., október 17., 24. és 31., november 21. és 28., december 12.)

Az előadó a következő könyvet ismertette: RADÓ: „Subharmonic functions.” (Springer, 1937).

25. SZILÁRD KÁROLY: *A kvázikonform leképezésekről*. (December 19.)

Lásd e Közlemények 6 (1961) A. 376–381.

### A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

1. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Aszimptotikusan ortonormált sorozatok*. (Január 16.)

Legyen  $\{\varphi_n\}_1^\infty$  a  $H$  Hilbert tér egységvektorainak egy sorozata, tekintsük a következő mennyiségeket

$$a_n = \sup_{k < n} |(\varphi_k, \varphi_n)|, \quad b_n = \sup_{k > n} |(\varphi_k, \varphi_n)|.$$

Ha  $\{\varphi_n\}$  ortogonális rendszer, akkor nyilván  $a_n = b_n = 0$ . Ha a sorozat aszimptotikusan ortonormált, azaz van egy olyan  $\{\psi_n\}_1^\infty$  ortonormált sorozat, melyre

$$\delta_n = \|\varphi_n - \psi_n\| \rightarrow 0,$$

akkor

$$b_n \leq 2 \sup_{k > n} \delta_k \rightarrow 0.$$

<sup>13</sup> Maximum-elveknek azokat a tételeket nevezzük, melyek azt mondják ki, hogy az egyenletek megoldásai a tartomány belsejében a kezdeti és peremértékeknél nagyobb (illetve nagyobb és pozitív) értéket nem vehetnek fel.



Kérdés, hogy — fordítva —, a  $b_n \rightarrow 0$  feltétel biztosítja-e, hogy a sorozat aszimptotikusan ortonormált? A válasz erre negatív. Az előadó felhasználva N. G. de BRUIJN egy levélbeli közlését, a következőt bizonyította be:

*Van  $H$ -ban lineárisan független egységvektoroknak olyan  $\{\varphi_n\}_1^\infty$  sorozata, amelyre*

$$a_n, b_n = o(1/\sqrt{n}),$$

*de amely sorozat mégsem aszimptotikusan ortonormált.*

**2. TANDORI KÁROLY:**<sup>14</sup> *Aszimptotikusan ortonormált sorozatok.* (Január 23.)

Az előadó a következő tételt bizonyította be:

*Legyen  $\{\varphi_n\}_1^\infty$  a  $H$  Hilbert-tér egységvektorainak egy lineárisan független elemekből álló olyan sorozata, melyre az  $a_n = \max_{i \leq n-1} |(\varphi_i, \varphi_n)|$  jelölés mellett*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 < \infty.$$

*Akkor  $\{\varphi_n\}_1^\infty$  aszimptotikusan ortonormált, azaz van  $H$ -ban egy olyan  $\{\psi_n\}_1^\infty$  ortonormált sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \psi_n\| = 0$ .*

**3—4. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA:** *A kontrakciókra vonatkozó operátorkalkulus* (Február 2. és 9.).

Lásd: SZŐKEFALVI-NAGY B., „Sur les contractions de l'espace de Hilbert II.” (Acta Sci. Math. **18** (1957) 1—14.)

SZŐKEFALVI-NAGY B. et FOIÁŞ, C., „Sur les contractions de l'espace de Hilbert III.” (Acta Sci. Math. **19** (1958) 26—45.)

**5—7. GEHÉR LÁSZLÓ:** *A kvantummechanikai felcserélési relációkról.* (Február 16., 22. és 29.)

Lásd: FOIÁŞ, C., GEHÉR L. and SZ.-NAGY B., „On the permutability condition of quantum mechanics.” (Acta Sci. Math. **21** (1960) 78—89.)

**8. MÁTÉ LÁSZLÓ:**<sup>15</sup> *Operátorszámítás általános lineáris topológikus terekben.* (Március 14.)

Az előadó megjegyzéseket fűzött a Mikusiński-féle operátor-számításhoz.

**9—10. GEHÉR LÁSZLÓ:** *Egyenletesen korlátos operátorok.* (Március 22. és 29.)

Lásd: SZ.-NAGY B., „Completely continuous operators with uniformly bounded iterates” (MTA. Mat. Kut. Int. Közl. **4** (1959) 89—93.).

GEHÉR L., „Über ähnliche lineare Transformationen in endlichdimensionalen Räumen” (M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl., **4** (1959) 95—99.).

ROTA, M. G., „On models for linear operators” (Contract No. 7667 with the Office of Naval Research.)

**11. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA:** *Egyenletesen korlátos csoportelőállítások Hilbert tér operátoraival.* (Április 5.)

A következő tételt bizonyítja be az előadó: Legyen  $\{T_g\}$  a  $G$  csoport előállítása a Hilbert-tér operátoraival és legyen ez az előállítás *korlátos*, azaz  $\|T_g\| \leq M$  ( $g \in G$ ). Ha a  $G$  csoporton létezik balról invariáns közép (lásd a

<sup>14</sup> Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

<sup>15</sup> Műszaki Egyetem, Matematikai Tanszék (Budapest).



13. előadást), akkor a  $\{T_g\}$  előállítás hasonló egy unitér operátorokkal való  $\{U_g\}$  előállításához:  $T_g = Q U_g Q^{-1}$ .

E tétel következményei közül a következőket bizonyítja be: 1. Ha  $\{e_n\}$  a Hilbert tér egy „kommutatív” bázisa (azaz bármilyen átrendezésben is bázis), akkor van olyan  $Q$  lineáris, mindkét irányban folytonos leképezése a térnek önmagára, amely az  $\{e_n\}$  bázist egy ortogonális bázisba viszi át. (M. Gelfand tétele) 2. Ha a  $\frac{d^2x}{dt^2} + Ax = 0$  differenciálegyenletnek (ahol

$x = x(t)$  a Hilbert-tér változó vektora,  $A$  a tér korlátos lineáris operátora) csupa korlátos  $x(t)$  megoldásfüggvénye van, azaz  $\|x(t)\| \leq M$  ( $-\infty < t < \infty$ ), akkor  $A$  hasonló egy pozitív alsó korláttal bíró, korlátos, önadjungált  $D$  operátorhoz:  $A = Q^{-1} D Q$ . Ez a feltétel elegendő is (M. G. KREIN).

**12. TANDORI KÁROLY:** *Riesz-féle bázisok.* (Április 19.)

Lásd: КРЕЙН, М. Г., „О базисах Бари” (Успехи Мат. Наук **12** (1957) 333–341.)

**13. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA:** *Invariáns közepek létezése csoportokon.* (Április 26.)

A  $G$  topológikus csoporton folytonos, korlátos  $\varphi(g)$  függvények  $C$  lineáris terében értelmezett  $L[\varphi]$  pozitív lineáris operáció „középérték”, ha  $L[1]=1$  és (balról) invariáns, ha  $L[\varphi_h]=L[\varphi]$ , ahol  $\varphi_h(g)=\varphi(hg)$  ( $h, g \in G$ ). Ilyen invariáns középérték létezésének egy Dixmiertől származó kritériumát ismertette az előadó.

Lásd: DIXMIER, J., „Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications” (Acta Sci. Math. **12** (1950) 213–227.)

**14–16. KOVÁCS ISTVÁN:** *Egy kúpra vonatkozóan pozitív lineáris funkcionálok lokálisan konvex lineáris terekben.* (Május 3., 10. és 17.)

Lásd: KREIN, M., „Sur les opérations linéaires transformant un certain ensemble conique en lui-même” (Comptes Rendus de l’Académie des Sci. de l’U. R. S. S. **23** (1939) 749–752.).

GROSBERG, J. et KREIN, M., „Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives” (Comptes Rendus de l’Académie des Sci. de l’U. R. S. S. **23** (1939) 723–726.).

**17. KOVÁCS ISTVÁN:** *A Neumann-algebrák elmélete.* (Szeptember 29.)

Az előadó a Neumann-algebrák elméletének elemeit ismertette.

**18. GEHÉR LÁSZLÓ:** *Lineáris operátorok modelljei  $l^p$  és  $L^p$  terekben.* (Október 6.)

Legyenek  $B_1$  és  $B_2$  Banach terek,  $T$  a  $B_1$ ,  $R$  pedig a  $B_2$  egy-egy korlátos lineáris operátora. Akkor mondjuk, hogy  $R$  modellje  $T$ -nek, ha van  $B_2$ -nek egy olyan zárt lineáris altere, mely invariáns  $R$ -re és amelyen az  $R$  hasonló  $T$ -hez.

Az előadó a következő tételket bizonyította be:

Legyen  $(X, S, \mu)$  egy  $\sigma$ -véges nem atomos mértéktér.  $L^p(X, S, \mu)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) azon operátorainak, melyeknek spektruma az egységkör belsejében van, van közös modelljük a térben, és ez kontrakciónak választható. Ugyanezt a tételt az  $l^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) térben is bebizonyította.

**19–20. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA:** *Kontrakciók unitér dilatacióinak végtelen mátrixszal való előállítása.* (November 17. és december 1.)

Az előadó a következőket adta elő:

1. Legyen  $T$  a  $H$  Hilbert térnek egy olyan kontrakciója, melyre  $T^n \rightarrow 0$ .



Akkor a  $T$ -hez tartozó Schäffer-féle mátrix unitérekvivalens a  $0$ -hoz tartozó Schäffer-féle mátrixszal, vagyis a kétoldali eltolással. (De Bruijn)

2. A Schäffer-féle mátrixot úgy módosította, hogy az minden kontrakció esetén a minimális unitér dilatációt adja.

3. Ismertette P. Thorhauer magdeburgi matematikusnak azt az eredményét, amelyet az előadó irányítása mellett Szegeden ért el. P. Thorhauer a Schäffer-féle mátrixelőállítást általánosította két, duplánfelcserélhető kontrakció esetére.

**21–22.** DURST ENDRE:<sup>14</sup> *Schreiber néhány eredménye.* (December 8. és 15.)

Az előadó ismertette M. Schreiber néhány megjelenés alatt álló egyszerű eredményét.

### A matematikai logika és alkalmazásai osztály szemináriuma

**1.** JASKOWSKI, S.:<sup>16</sup> *Die dreistelligen Operatoren im Aussagenkalkül.* (Szeptember 5.)

**2–14.** KALMÁR LÁSZLÓ: *Formulanyelven programozható számológépről.* (Szeptember 20. és 27., október 4., 11., 18. és 25., november 1., 22. és 29., december 6., 7., 13. és 20.)

Az előadó egy oly számológép tervét ismertette, amely közvetlenül a szokásos matematikai formulák érzékelése alapján képes számításokat végezni. Beszámolt a gép részeinek (bemenő, memória-, aritmetikai, vezérlő és kimenő egység) szerkezeti felépítéséről; a gép működését irányító alapjelekről, összetett jelekről, az egyes jeleknek megfelelő utasításokról.

**15.** PAWLAK, Z.:<sup>17</sup> *The organization of a simple computer for calculation of arithmetical expressions.* (December 13.)

Az előadó egy oly számológép megépítésének matematikai megalapozását és logikai tervét ismertette, amely közvetlenül (program és utasítások használata nélkül) működik; vázolt néhány egyszerű alkalmazási lehetőséget.

**16.** PAWLAK, Z.:<sup>17</sup> *A new form of parenthesis-free notation of arithmetical formulae.*<sup>18</sup> (December 14.)

Az előadó megmutatta, hogy a gráf fogalmából kiindulva megadható az aritmetikai és logikai formuláknak egy oly zárójelmentes jelölésmódja, amely különbözik a jólismert Lukasiewicz-féle zárójelmentes jelölésmódtól.

### Közgazdasági alkalmazások csoport szemináriuma

**1.** PRÉKOPA ANDRÁS: *A szállítási problémára vonatkozó ún. kombinatorikus módszer ismertetése.* (November 4.)

**2.** PRÉKOPA ANDRÁS: *A folyam-problémáról.* (November 18.)

**3.** PRÉKOPA ANDRÁS: *A folyam-probléma megoldási módszerének alkalmazása a szállítási probléma megoldására.* (November 25.)

**4.** PRÉKOPA ANDRÁS: *A nem-lineáris programozásra vonatkozó Farkas-Uzawa módszer ismertetése.* (Október 21.)

<sup>16</sup> Tudományegyetem, Torun.

<sup>17</sup> A Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézete, Varsó.

<sup>18</sup> A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi tagozatával közös rendezésben.

5. PRÉKOPA ANDRÁS: *Egyszerű bizonyítás a König—Egerváry tételre. A hozzárendelési probléma.* (Október 28.)
6. KATONA GYULA:<sup>19</sup> *Maximális folyam-minimális vágás tétel.* (December 2.)
7. FERENCZI EÖRS:<sup>19</sup> *Wald egy tételéről.* (December 8.)
8. FERENCZI EÖRS:<sup>19</sup> *A termelés egy zárt lineáris modelljéről.* (December 16.)

### A biometria osztály szemináriuma

1. FISCHER JÁNOS: *Beszámoló előadás lengyelországi tanulmányútjáról.* (Január 11.)
2. Dr. JUVANCZ IRÉNEUSZ: *Indextulajdonság.* (Január 25.)  
Előadó ismertette kandidátusi disszertációját.
3. Dr. JUVANCZ IRÉNEUSZ: *A nemparaméteres módszerek kritikája.* (Március 11.)  
Az előadó Leydenben tartandó előadásához kiválasztotta és a hallgatósággal megvitatta az anyagot.
4. Dr. JUVANCZ IRÉNEUSZ: *Beszámoló a Biometric Society Leydeni üléséről.* (Május 16.)
5. F. SZCZOTKA:<sup>20</sup> *A genetika egy matematikai modelljének gyakorlati vonatkozásai.* (Október 31.)
- 6—13. CSÁKI PÉTER: *Referáló előadássorozat.* (Október 11., 18. és 25., november 1., 8., 22. és 29., december 6.)  
Az előadó KULLBACK, S.: „Information theory and statistics” (John Wiley and Sons, New York, 1959.) című könyvének néhány fejezetét ismertette.
- 14—16. LIPTÁK TAMÁS:<sup>21</sup> *Referáló előadássorozat.* (Október 21. és 28., november 21.)  
Az előadó Lehmann, E. L., „Testing statistical hypotheses” (John Wiley and Sons, New York, 1959.) című könyvének néhány fejezetét ismertette.

### A differenciálgeometriai csoport szemináriuma

1. Soós GYULA:<sup>22</sup> *Analitikus sokaságok.* (Október 14.)
2. Soós GYULA: *Az analitikus csoport fogalma. Lie-féle csoportok.* (Október 28.)
3. Soós GYULA: *A Lie-féle algebra.* (November 11.)
4. Soós GYULA: *Egyparaméteres transzformáció-csoportok.* (December 2.)  
Az egyes előadások anyaga (részben) megtalálható az alábbi könyvek megfelelő fejezeteiben:  
C. CHEVALLEY: „Theory of Lie Groups I.”, Princeton, Princeton University Press, 1946.  
K. NOMIZU: „Lie Groups and Differential Geometry”. The Math. Soc. of Japan, 1956.

<sup>19</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, alkalmazott matematika szakos hallgatók.

<sup>20</sup> Wrocław.

<sup>21</sup> Orvostudományi Egyetem Központi Kutató Laboratóriuma, Budapest.

<sup>22</sup> Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem.



### A mátrixelméleti csoport szemináriuma

**1. PETHŐ ÁRPÁD:**<sup>23</sup> *Parciális differencia-egyenletek megoldása mátrix-számítás segítségével.* (Február 2.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát, e Közlemények **5** (1960) A. 203—213.

**2. CSÉBFALVI KÁROLY:**<sup>24</sup> *Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerekről.* (Február 11.)

Lásd az előadó hasonló c. dolgozatát, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **39** (1959) 357—358.

**3. CSÉBFALVI KÁROLY:** *A Boole-féle mátrixok egy alkalmazásáról.* (Február 22.)

Az előadó ismertette a Boole-féle mátrixokat általában, majd azok kapcsolástechnikai alkalmazását. Ismertette a kapcsolási mátrixok alapvető tulajdonságait, reléköörök analízisének és szintézisének elemeit. Ezután a lineáris Boole-féle mátrix egyenletekre vonatkozó tételeket és azok megoldási módszereit ismertette.

**4, 5, 8—10, 12—14.** KARDOS GILBERT: PARODI „La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications”, Paris, Gauthier Villars (1959) c. könyvet referálta. (Március 3., 17., Május 19., június 2., 11., október 27., november 10., december 8.)

**6. TURÁN PÁL:** Determinánsokra vonatkozó szélsőértékfeladatokról. (Március 31.)

Előadó egyebek közt meghatározta azon  $n$ -edrendű determinánsok minimális értékét, melyek elemei a főátlóban, a felettelevő első rétegben, az alatta levő második rétegben  $> \alpha$  (ahol  $\alpha > 0$ ) és a többi eleme 0. Ennek általánosítása kapcsán több hasonló problémára mutatott rá. Gallai Tibor hozzászólásában e problémák gráfelméleti kapcsolatait világította meg.

**7. RÓZSA PÁL:** *Egy Routh-féle jelenség általánosításáról.* (Április 7.)

Lásd az előadó hasonló c. dolgozatát, Zeitschrift für Mathematik und Mechanik **40** (1960) Sonderheft T 114—115.

**11. TURÁN PÁL:** *Mátrixok sajátértékeinek közelítő meghatározásáról.*

Az előadó a következő két szabályt mutatta meg:

Ha  $A$  egy tetszőleges  $n \times n$ -es mátrix és  $k$  tetszőleges pozitív egész, akkor ismételt négyzetreemelésekkel készítsük el az  $A^{2^k} = B$  mátrixot. Ha  $A$  egy maximális abszolútértékű sajátértéke  $\lambda$ , akkor

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-k}} \leq \frac{|\lambda|}{\left(\max_{j=1,2,\dots,2n-1} |\text{spur } B^j|^{1/j}\right)^{2^{-k}}} \leq 1$$

és

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-k}} \leq \frac{|\lambda|}{\left(\max_{j=1,\dots,n} |\text{spur } B^j|^{1/j}\right)^{2^{-k}}} \leq 6^{2^{-k}}.$$

<sup>23</sup> Magyar Tudományos Akadémia Kémiai Kutató Intézete.

<sup>24</sup> Nehézipari Minisztérium.

## Geometriai szeminárium

- 1—3. HEPPES ALADÁR: *Egy általánosabb kitöltési feladat.* (Okt. 5, 12, 26).  
 4—6. MOLNÁR FERENC: *A Ceva és Menelaos tétel többdimenziós általánosítása.* (Mat. Lapok) (dec. 7, 14, 21.).

## A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET OSZTÁLYSZEMINÁRIUMAIBAN 1961-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK

### A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

1. MEDGYESSY PÁL: *Diszkrét valószínűség-eloszlások áttranszformálása sűrűségfüggvénnyé.* (Február 9.)

Diszkrét valószínűség-eloszlások szuperpozíciójára (ill. keverékére) nem alkalmazhatók a szuperpozíció-felbontás — részben az előadó által kidolgozott — módszerei. Egy diszkrét valószínűség-eloszlás szuperpozícióit felbontani, azaz ennek ismeretlen paramétereit meghatározni úgy lehetne, ha a szuperpozícióhoz egy sűrűségfüggvény-szuperpozíciót rendelhetnénk, mely felbontható az eddigi eljárásokkal; a felbontáskor kapott paraméterértékekből a kiindulási diszkrét valószínűség-eloszlás szuperpozíció ismeretlen paramétereire következtethetnénk. E háttérből kiindulva foglalkozik az előadó a következő problémával:

Legyen  $\{g_i(\tau)\}$  ( $i \in I$ ) egy diszkrét valószínűségeloszlás, melynek tagjai a  $\tau$  paramétertől függenek,  $h(x, \tau)$  pedig egy sűrűségfüggvény, mely szintén függ  $\tau$ -tól. Kérdés, milyen  $\{g_i(\tau)\}$  és  $h(x, \tau)$  mellett található olyan  $f_i(x)$  ( $i \in I$ ) (nem szükségszerűen sűrűség-) függvény-család, melyre fennáll

$$(I) \quad f_i(x) \text{ független } \tau\text{-tól } (i \in I),$$

$$(II) \quad \sum_{i \in I} f_i(x) g_i(\tau) = h(x, \tau).$$

E probléma általánosságban megoldatlan. Ha viszont  $g_i(\tau)$  és  $h(x, \tau)$   $\tau$  analitikus függvényei, kimutatható, hogy az  $f_i(x)$  függvények egy végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszer megoldásai. Ez az egyenletrendszer a legismertebb  $g_i(\tau)$  és  $h(x, \tau)$  típusok mellett sok esetben megoldható, ill. kimutatható róla, hogy nincs megoldása. — Példák:

$$(1) \text{ Ha } \{g_i(\tau)\} = (1 - \tau) \tau^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots; 0 < \tau < 1)$$

(geometriai eloszlás) és  $h(x, \tau) = (1 - \tau) e^{-(1-\tau)x}$  (exponenciális sűrűségfüggvény; ilyenek szuperpozíciója felbontható),  $f_i(x) = \frac{x^i e^{-x}}{i!}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ),

azaz  $\Gamma$  sűrűségfüggvény.

Megoldható az említett egyenletrendszer abban az esetben is, amidőn  $\{g_i(\tau)\}$  negatív binomiális eloszlás. — (2) Ha  $\{g_i(\tau)\}$   $\tau$ -ban polinom,  $h(x, \tau)$  pedig végtelen hatványsor  $\tau$ -ban, az említett egyenletrendszernek nincs megoldása (ide sorolható pl. a binomiális eloszlás esete). Az a sejtés, hogy itt (II) helyett más típusú lineáris transzformációt alkalmazva megoldható volna az alapprobléma.



**2—7. SZÉKELY GÁBOR:** *Teljes kapcsolatú láncok (O—M-láncok).* Refe-ráló előadássorozat. (Február 16. és 23., március 2., 9., 16. és 23.)

Az előadó a következő könyvet ismertette: CIUCU, G.—THEODORESCU, R.: „Procese cu legaturi complete” (Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1960).

**SARKADI KÁROLY:** Hozzászólás az ONICESCU-MIHOC folyamatokról tartott beszámolóhoz. (Március 9.)

**8. ERDŐS PÁL:** *Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása a gráf-elméletben.* (Március 30.)

**9. ERDŐS PÁL—RÉNYI ALFRÉD:** *Egy hízagos Fourier-sorokra vonatkozó probléma.* (Április 13.) (Lásd az előadók „On a problem of A. Zygmund” c. dolgozatát [sajtó alatt].)

**10. RÉNYI ALFRÉD:** *Maximális információt nyújtó konfidencia-intervallum meghatározása.* (Április 20.)

A statisztikai gyakorlatban általában önkényesen, ill. bizonyos kialakult, de egyáltalán nem megalapozott konvenciók alapján szokták azt a valószínűségi szintet meghatározni, amelyet a konfidencia-intervallum meghatározásánál előírnak (mint annak valószínűségét, hogy a konfidencia-intervallum fedje az ismeretlen paraméter valódi értékét). Előadó abból a szemléletesen evidens tényből indult ki, hogy ha az említett szintet igen magasnak választjuk, akkor a konfidencia-intervallum nagyon tág lesz és így ez esetben, bár a konfidencia-intervallum nagy valószínűséggel fedi a valódi paraméter értékét, azonban ebből a tényből a paraméterre nézve csak kevés információt nyerünk; ha viszont a szintet alacsonynak választjuk, akkor a konfidencia-intervallum szűk lesz, és így, bár ha tartalmazza a paramétert, ebből arra nézve sok információt nyerünk, azonban gyakran nem fogja tartalmazni. Az első esetben tehát nagy valószínűséggel kevés információt, másodikban kis valószínűséggel sok információt nyerünk. Felmerül a kérdés, hogy a szint mely választásánál lesz a nyert információ várható értéke maximális. E kérdésre a válasz attól függ, hogy az információ mérésére milyen mértékszámot használunk. Az előadó néhány példán keresztül bemutatta, hogy ilyen jellegű megfontolások a statisztikai gyakorlattal jó összhangban levő eredményekre vezetnek. Az említett megfontolások fő konklúziója az, hogy a szint optimális választása kell, hogy függjön a minta elemszámától, mégpedig minél nagyobb mintánk van, annál magasabb lesz általában az optimális szint (és mindamellett egyre rövidebb lesz az optimális konfidencia-intervallum).

**CSISZÁR IMRE:** *Egy információelméleti problémáról.*

Lásd a szerző „Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen” című cikkét e Közlemények **7** (1962) A. 1—2. füzetében, sajtó alatt.

**11. RÉVÉSZ PÁL:** *Véletlen ergod-tételek és alkalmazásuk a Markov-láncok elméletében.* (Április 27.)

Lásd a szerző „Some remarks on the random ergodic theorem, I., II.” című cikkei, e Közlemények; I.: **5** (1960) A. 3, 375—381, II.: **6** (1961) A. 1—2, 205—213, valamint „A probabilistic solution of Birkhoff's problem 111” című cikkét, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **13** (1962), sajtó alatt.

**12. ERDŐS PÁL:** *Trigonometrikus polinomok határeloszlásáról.* (Október 5.)

**13. PALÁSTI ILONA:** *Véletlen színes gráfok részgráfjaiként keletkező izolált fák számának eloszlásáról.* (Október 19.)



Lásd a szerző „On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph” című cikkét, e *Közlemények* **6** (1961) A. 3, 405—409.

BÁRTFAI PÁL: Síkgörbéken értelmezett eloszlások entrópiája.

**14.** CSISZÁR IMRE: *Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen.* — (Október 26.)

Lásd a szerző hasonló című cikkét, e *Közlemények* **7** (1962) A. 1—2. füzetében, sajtó alatt.

FISCHER JÁNOS: *Néhány valószínűségi számítási eltérésfogalom topologikus és metrikus tulajdonságairól.*

Lásd az előadó CSISZÁR Imrével közös „Informationsentfernungen im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen” című cikkét, e *Közlemények* **7** (1962) A. (sajtó alatt), valamint CSÁKI Péterrel közös „On the generalization of the maximal correlation” című cikkét, e *Közleményekben* (sajtó alatt).

CSÁKI PÉTER: *Néhány megjegyzés a maximál-korreláció általánosításairól.*

Lásd az előadó FISCHER Jánossal közös, „On the generalization of the maximal correlation” című cikkét, e *Közleményekben* (sajtó alatt).

**15.** ERDŐS PÁL: *A nagy szitáról.* (Október 27.)

**16.** MOGYORÓDI JÓZSEF: *Független valószínűségi változók véletlen tagszámú összegeinek határeloszlásairól.* (November 2.)

Lásd a szerző „On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables” című cikkét, e *Közlemények* **6** (1961) A. 3., 365—371, valamint „On the central limit theorem for sums of a random number of independent random variables” című cikkét, utóbbi az *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) kötetében fog megjelenni.

MEDGYESSY PÁL: *Sűrűségfüggvények alakjának jellemzéséről.*

Lásd a szerző „Über die Charakterisierung der Gestalt von Dichtefunktionen” című cikkét, e *Közlemények* **7** (1962) A. 1—2. füzetében, sajtó alatt.

**17.** CSÁKI ENDRE: *Bolyongási problémákról.* (November 9.)

Lásd a szerzőnek VINCZE Istvánnal közös, „On some problems connected with the Galton-test” című cikkét, e *Közlemények* **6** (1961) A. 1—2, 97—109.

BÁNKÖVI GYÖRGY: *Egydimenziós véletlen térkitöltési problémákról.*

### A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

**1—5.** CSÁKI ENDRE: *Referáló előadássorozat* (Március 15., 30., április 13., 20., május 11.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: ISII, K. „On a method for generalizations of Tchebycheff's inequality” (*Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Tokyo, **1** (1959) 65—88).

VINCZE ISTVÁN: *Megjegyzések az információ mérőszámához.* (Március 16.)

**6—8.** REIMANN JÓZSEF: *Referáló előadássorozat.* (Május 18., 25., június 8.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: FELLER W., „On combinatorial methods in fluctuation theory” (Grenander U., (ed.) „Probability and Statistics”, The Harald Cramér Volume, 75—91.)



9. SCHINDOWSKI, E.:<sup>1</sup> *Erfahrungen bei der Einführung der statistischen Qualitätskontrolle in der D. D. R.* (Július 21.)

10. CSÁKI ENDRE és SARKADI KÁROLY: Híradástechnikai alkatrészek élettartamának vizsgálata matematikai statisztikai módszerekkel. (Október 12.)

Az előadók a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet megbízásával kapcsolatosan felmerülő matematikai problémákat ismertették.

11. VAS GYÖRGYNÉ: *Beszámoló a magdeburgi statisztikai minőségellenőrzési kollokviumról.* (December 7.)

12. BÁNKÖVI GYÖRGY és SARKADI KÁROLY: *Beszámoló frakcionális faktoriális kísérletek tervezéséről.* (December 14.)

Az előadók a Nagynyomású Kísérleti Intézet megbízásából végzett 5/9 replikációs 3<sup>4</sup> faktoriális kísérlet tervezését és kiértékelését ismertették.

### A valós függvénytan osztály topológiai szeminárium

1—7. CSÁSZÁR ÁKOS: *Többszörözés folytonos függvények nívóhalmazainak szerkezetéről.* (Január 16., február 15., március 1., 22., április 12., május 10., 24.)

Lásd КРОНРОД: «О функциях двух переменных» (Успехи Мат. Наук 5 (1950) 24—134.)

8—12. CSÁSZÁR ÁKOS: *A szintopogén terek elméletéről.* (Október 20., november 3., 17., december 1., 15.)

Lásd a szerző „Fondements de la topologie générale” c. könyvét (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.)

### A differenciálegyenletek osztályának szeminárium

1. BALATONI FERENC: *Referáló előadás.* (Január 10.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: IGLISCH, R.: „Der Resonanzbegriff bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.” (Archive for Rational Mechanics and Analysis, 3 (1959) 179—186.)

2. HAJTMAN BÉLA: *A sakktábla-probléma egy általánosításáról.* (Január 18.)

Sajtó alatt ezen Közleményekben.

3. HAJTMAN BÉLA: *Referáló előadás.* (Január 24.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: GOLOMB, S. W.: „Checker boards and polyominoes.” (American Mathematical Monthly, 61 (1954) 675—682.)

4. BALATONI FERENC: *Referáló előadás.* (Január 31.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: IGLISCH, R.: Der Resonanzfall bei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Archive for Rational Mechanics and Analysis, 3 (1959) 187—193.)

5. KOSIK PÁL: *Hővezetési probléma összetett peremfeltételekkel.* (Február 14.)

Közlésre leadva ezen Közleményekben.

6—8. FÉNYES TAMÁS: *Referáló előadásorozat.* (Február 21., Március 7., 14.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: BUTZER, P. L.: „Singular

<sup>1</sup> Deutsche Akademie der Wissenschaften, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin.

Integral Equations of Volterra Type and the Finite Part of Divergent Integrals. (Archive for Rational Mechanics and Analysis **3** (1959) 194–205.)

**9–12.** ZIMÁNYI JÓZSEFNÉ: *Referáló előadássorozat.* (Március 21., Április 25., 28., Május 4.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: TITCHMARSH, E. C.: „The zeros of certain integral functions.” (Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2. **25** (1926) 283–302.)

**13–14.** FEKETE GÉZA<sup>2</sup>: *A klasszikus variációs probléma általánosítása.* (Április 11., 18.)

Az előadó a

$$\varphi \left[ \int_{x_1}^{x_2} f_1(x, y, y') dx, \dots, \int_{x_1}^{x_2} f_p(x, y, y') dx \right] = \text{extrémum}$$

variációs problémával foglalkozott, ahol  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$  a változóinak kellő simaságú függvénye. Ezen problémából kiindulva a klasszikus elmélet több tételét (pl. a Legendre-, Jacobi-, Euler-feltételeket) általánosította.

**15.** FÉNYES TAMÁS: *Referáló előadás.* (Október 17.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: MIKUSIŃSKI, J.: „Sur la convolution par  $\exp(t^2)$ ”. Bull. Ac. Pol. Sci. **11** (1959) 669–671.

**16.** FÉNYES TAMÁS: *Referáló előadás.* (Október 23.)

Az előadó a következő dolgozatot ismertette: MIKUSIŃSKI, J.: „Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus.” Studia Mathematica **19** (1960) 187–192.

**17.** HUTA, A.:<sup>3</sup> *Közönséges differenciálegyenletek formális megoldásáról.* (December 6.)

Lásd az előadó következő dolgozatát: „Über das formale Ausdrücken des partikulären Integrals einer Differentialgleichung durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung.” Acta F. R. N. Univ. Comen. **4** (1959) 133–145.

### A komplex függvénytani osztály szemináriuma

**1–13.** FENYŐ ISTVÁN: *Szubharmonikus függvények.* (Január 2., 9., 16., 23., február 6., 13., 20., 27. és március 6., 13., 20., 27.)

Ismertető előadás RADO: „Subharmonic functions” (Springer, 1937) című műve alapján.

**14–24.** SZILÁRD KÁROLY: *A kvázikonform leképezésekről és kvázikonform függvényekről.* (Április 17., 24., május 8., 15., 22., 29., június 12., 19., 26., szeptember 7., 21.)

Ismertető előadás a következő művek alapján: BELTRAMI: „Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque” (Annali di Mat. **2** (1867)), AHLFORS-BEURLING: „Conformal invariants and functiontheoretic nullsets” (Acta Math. **83** (1950)), HERSCH-PFLUGER: „Principe de l'augmentation des longueurs extrémales” (C. R. **237** (1953), 120–51207), PFLUGER: „Extremallängen und Kapazität” (Comment. Math. Helv. **29** (1955) 120–131).

**25–27.** DANCs ISTVÁN: *Ismertető előadás* (október 20., 27., november 3.)

Az előadó a következő dolgozatokat ismertette: DINGHAS: „Bemerkung zu einer Differentialgleichung von Carleman” (Mat. Zeitschr. 1936), DAVENPORT: „On a theorem of P. Cohen” (Journ. of the Lond. Math. Soc. 1961.)

**28.** TURÁN PÁL: *A Carleman-féle jelenség.* (December 15.)

<sup>2</sup> Eötvös Loránd Tud. Egy., alk. mat. szak. V. évf. hallgatója.

<sup>3</sup> Bratislawai Tudományegyetem.



### A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

**1—8. KOVÁCS ISTVÁN—DURSZT ENDRE:**<sup>4</sup> *Általános parciális differenciáloperátorokról.* (Február 7., 14., 24., Március 2., 10., 17., 24., 31.)

Lásd HÖRMANDER, L.: „On the theory of general partial differential operators” (Acta Mathematica, **94** (1955) 161—248.).

**9. PAPP ZOLTÁN:**<sup>5</sup> *Kompakt csoportok irreducibilis unitér előállításainak végesdimenziós voltáról.* (Április 14.)

Lásd NACHBIN, L.: „On the finite dimensionality of every irreducible unitary representation of a compact group” (Proc. of the Amer. Math. Soc., **12** (1961), 11—13.)

**10—12. KOVÁCS ISTVÁN:** *Unitér-algebrák  $\times$ -automorfizmusairól.* (Április 21., 28. és Május 5.)

Az előadó bebizonyította, hogy egy  $R$  irreducibilis unitér algebra  $M$   $\times$ -automorfizmusa — az unitér algebra elemeihez tartozó szorzásoperátorokon keresztül — akkor és csak akkor „indukál”  $\times$ -automorfizmust az unitér algebra jobb- és baloldali szorzásgyűrűjében, ha  $M \lambda V$  alakú operátorra folytatható  $\mathfrak{H}_R$ -ben, ahol  $\mathfrak{H}_R$  az  $R$  teljessé tétele által kapott Hilbert-tér,  $\lambda > 0$  valós,  $V$  pedig unitér  $\mathfrak{H}_R$ -ben. (Egy unitér algebrát akkor nevezünk irreducibilisnek, ha szorzásgyűrűi faktorok.)

**13. GEHÉR LÁSZLÓ:** *Weyl-féle felcserélési relációnak elegendő kontrakciós félcsoporthoz dilatálása.* (Május 19.)

Az előadó bebizonyította, hogy ha  $\{T_t\}$   $t \geq 0$  és  $\{S_s\}$   $s \geq 0$  a  $H$  Hilbert-tér kontrakcióinak két erősen folytonos egyparaméteres félcsoportha, melyek eleget tesznek a Weyl-féle

$$T(t) S(s) = e^{its} S(s) T(t)$$

felcserélési relációnak, ahol

$$T(t) = \begin{cases} T_t, & \text{ha } t \geq 0, \\ T_{-t}^*, & \text{ha } t < 0, \end{cases}, \quad S(s) = \begin{cases} S_s, & \text{ha } s \geq 0, \\ S_{-s}^*, & \text{ha } s < 0, \end{cases}$$

akkor  $\{T_t\}$  és  $\{S_s\}$  mindig dilatálható unitér operátoroknak ugyanezen felcserélési relációt kielégítő folytonos egyparaméteres csoportjaivá.

**14. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA:** *Beszámoló Kanadában és az USA-ban tett utazásról.* (A Bolyai Társulattal közös rendezésben) (Szeptember 20.)

**15. GEHÉR LÁSZLÓ:** *A kvantummechanikai felcserélési relációról.* (Szeptember 30.)

Az előadó ismertette T. KATO következő eredményét: Legyen  $e^{tA}$ ,  $e^{tB}$  az  $X$  Banach-tér korlátos operátorainak két erősen folytonos egyparaméteres félcsoportha ( $A$  és  $B$  az infinitézimális generátorok). Ha van olyan  $c$  konstans, hogy

$$(1) \quad e^{sA} e^{tB} = e^{cst} e^{tB} e^{sA} \quad (s \geq 0, t \geq 0),$$

akkor  $D = D_{AB} \cap D_{BA}$  sűrű  $X$ -ben és

$$(2) \quad (AB - BA)f = cf, \quad \text{ha } f \in D.$$

<sup>4</sup> Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

<sup>5</sup> Pedagógiai Főiskola, Szeged.

Továbbá  $(A-a)(B-b)D = (B-b)(A-a)D = X$ , ha  $\operatorname{Re} a > \omega_A$  és  $\operatorname{Re} b > \omega_B$ , ahol  $\omega_A$  és  $\omega_B e^{tA}$  ill.  $e^{sB}$  típusa ( $A$  és  $B$  rezolvens halmaza lefed egy  $\operatorname{Re} z > \omega_A$  ill.  $\operatorname{Re} z > \omega_B$  félsíkot). Megfordítva, tegyük fel, hogy létezik egy sűrű lineáris  $D \subset D_{AB} \cap D_{BA}$  halmaz úgy, hogy (2) fennáll  $D$ -n és  $(A-a)(B-b)D$  és  $(B-b)(A-a)D$  közül legalább egyik sűrű  $X$ -ben, ahol  $a, b$  tetszőleges számok, melyekre  $a > \omega_A$  ill.  $b > \omega_B$ , akkor (1) is fennáll.

**16–17. DURSZT ENDRE:** *A Hilbert-tér eltolási operátorairól.* (Október 5., 19., és 26.)

Lásd HALMOS, P.: „Shift on Hilbert spaces” (Journ. für reine und angewandte Math., **208** (1961) 102–112.).

**18. MÁTÉ LÁSZLÓ:** *Operátor-félcsoportok Frechet terekben.* (Október 12.) Az előadó a Hille-Yoshida tétel Feller-féle alakját általánosítja Frechet terekre.

**19–21. SZ. NAGY BÉLA:** *Unitér dilatációk szerkezetéről.* (November 18., 25 és December 7.)

Az előadó a következő tételeket ismertette: Legyen  $T$  a Hilbert-tér kontrakciója és  $U$  ennek minimális unitér dilatációja a  $K$  térben. Egyszerű bizonyítása a következő tételeknek:

a) Az  $L = \overline{(U-T)H}$  és  $L^* = \overline{(U^*-T^*)H}$  alterek „vándorlók”  $U$ -ra nézve, azaz  $U^n L \perp U^m L$ ,  $U^n L^* \perp U^m L^*$  ha  $n, m = 0, 1, \pm 2, \dots, n \neq m$ .

b) Ha  $T^n \rightarrow 0$ , akkor  $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} U^n L = K$  és ha  $T^{*n} \rightarrow 0$ , akkor  $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty} U^n L^* = K$  (de Bruijn tételei).

c) Ha  $T$  teljesen nem unitér, akkor az  $U^n L$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) és  $U^n L^*$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) alterek együtt kifeszítik  $K$ -t. Ebből következik, hogy  $U$  spektruma, ekkor teljesen folytonos. Következik továbbá, hogy ha  $L$  vagy  $L^*$  dimenziója egyenlő a  $H$  térével, akkor  $U$  „kétoldali eltolás-operátor”.

d) Ha  $T$  spektrumának nincsen pontja a  $|\lambda| = 1$  egységkör egy  $\alpha$  szakaszán, akkor  $U = U_0 \oplus U_1$ , ahol  $U_0$  „kétoldali eltolás operátor”,  $U_1$  pedig olyan unitér operátor, amelynek nincsen  $\alpha$ -n spektrum-pontja (Foiás).

e) Ha  $H = A \oplus M \oplus B$ ;  $TA \subset M$ ,  $T(M \oplus B) \subset B$ ;  $(TP_A)^n \rightarrow 0$ ,  $(TP_B)^n \rightarrow 0$  (ahol  $P_A, P_B$  az  $A$  ill.  $B$  altérre való projekció), akkor  $U$  kétoldali eltolásoperátor (Halperin tétele).

**22–23. DURSZT ENDRE:**<sup>4</sup> *Korlátos függvények spektrál-szintéziséről.* (December 13. és 23.)

Lásd BEURLING, A.: „On the spectral synthesis of bounded Functions” (Acta Mathematica, **81** (1948) 1–14.)

### A matematikai logika és alkalmazásai osztály szemináriuma

**1. KALMÁR LÁSZLÓ:** *Boole-féle függvények minimalizációjával kapcsolatos kérdések.* (Június 5.)

Az előadó az  $n$ -változós logikai műveletek értelmezési tartományának a  $0, 1, \dots, 2^{n-1}$  számokkal (e számok diadikus kifejezéseinek megfelelően) történő alkalmas kódolása, továbbá maguknak az  $n$ -változós műveleteknek a  $0, 1, \dots, 2^n - 1$  számokkal való alkalmas kódolása felhasználásával áttekinthető alakban megfogalmazta az  $f$  számmal kódolt  $n$ -változós logikai művelet minimális zárójeles előállításának hosszát megadó  $\lambda_n(f)$  függvény néhány tulajdonságát.

<sup>4</sup> Műszaki Egyetem III. Mat. Tanszék, Budapest.



**2. ÁDÁM ANDRÁS:** *Logikai műveletek szuperpozícióiról.* (Június 8.)

Lásd az előadó „Zur Theorie der Wahrheitsfunktionen” c. dolgozatát (Acta Sci. Math. **21** (1960) 47–52).

**3. GAVRILOV, M. A.<sup>7</sup>** *Új módszer híd-áramkörök szintézisére.* (Augusztus 9.)

A híd-áramkörök szintézis-problémája mai állásának ismertetése és a megoldásra ajánlott módszerek áttekintése után ismertetett egy új módszert híd-áramkörök közelítőleg optimális szintézisére gráf-alakban összekapcsolt működési táblázatokkal megadott működési feltételek alapján. A módszer a működési táblázat-gráf négyféle átalakításának iterálásán alapul; minden lépésben szabadon választhatunk e négyféle átalakítás közül azok között, amelyek elvégezhetők. Az, hogy a módszer alkalmazásával kapott híd-áramkör mennyiben közelíti meg az optimálist, attól függ, hogyan választunk az elvégezhető átalakítások között lépésről-lépésre.

**4. ÁDÁM ANDRÁS:** *Vizsgálatok logikai műveletekről és azoknak kétpólusú gráfok általi realizációiról.* (Augusztus 11.)

Lásd az előadó „Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen” (Acta Sci. Math. **23** (1962) sajtó alatt) és „On the repetition-free realization of truth functions by two-terminal graphs” (MTA Mat. Kut. Int. Közl. **7** (1962) sajtó alatt) c. dolgozatait.

**5–6. IVANOV, V. I.<sup>7</sup>** *V. D. Kazakov eredményei Boole-féle függvények minimális zárójeles alakjának előállításával kapcsolatban.* (Augusztus 11–12.)

Nevezzük  $P$  ill.  $S$  típusú Boole-féle formulának logikai változók és logikai változók negációi konjunkcióját ill. diszjunkcióját,  $SP$  ill.  $PS$  típusú Boole-féle formulának  $P$  típusú Boole-féle formulák konjunkcióját ill.  $S$ -típusú Boole-féle formulák diszjunkcióját stb. Az előadó ismerteti Kazakov néhány tételét az adott Boole-féle függvényt előállító legrövidebb (azaz legkevesebb változó-példányt tartalmazó) Boole-féle formula típusában előforduló  $S$ - és  $P$  szimbólumok számának a Boole-féle függvény tényleges változói (vagyis amelyektől valóban függ) számával, valamint teljes normálformái tagjainak számával való kapcsolatáról. E legrövidebb formula meghatározásához szükséges lépések száma még e tételek felhasználása esetén is nagyon magas lehet, ezért három, különböző, ugyancsak Kazakovtól származó olyan egyszerűbb algoritmust ismertet, amelyek az adott Boole-féle függvény redukált normálformáiból kiindulva, a tapasztalat szerint a legtöbb esetben a legrövidebbnél nem sokkal hosszabb Boole-féle formulával való előállításához vezetnek.

**7. BERCZKI ILONA:** *Boole-féle függvények minimális zárójeles előállításainak hosszáról.* (Augusztus 12.)

Az előadó megadta a minimális előállítás hosszára vonatkozó pontos felső korlátot, mint a változók számának függvényét, valamint megvilágította a következő problémákat oly Boole-féle függvényekre, amelyek legfeljebb három helyen veszik fel a két logikai érték egyikét: az egy-egy Pólya-féle osztályba tartozó Boole-féle függvények minimális előállításai szerkezetének kiderítése, az ugyanazon Pólya-osztályba tartozó függvények számának meghatározása, a minimális előállítások hosszának meghatározása.

**8. KALMÁR LÁSZLÓ és MUSZKA DÁNIEL:** *Az osztály laboratóriumában folyó munka ismertetése.* (Augusztus 14.)

<sup>7</sup> A Szovjet Tudományos Akadémia Automatikai és Távmechanikai Intézete.

<sup>8</sup> A Matematikai Kutató Intézet Közleményei VI. B/4.



Az előadók az osztály szovjet vendégei, valamint a szeminárium többi résztvevői számára ismertették az osztály laboratóriumában legutóbb végzett munkákat, különösen a logikai gép átalakítását, amelynél fogva többütemű áramkörök vizsgálatára is alkalmassá vált, valamint a folyamatban levő munkák állását és azok áramköri terveit. Az ismertetést laboratóriumi bemutatás követte.

**9—10. KALMÁR LÁSZLÓ:** *A matematikai formulanyelven közvetlenül programozható elektronikus számológéppel kapcsolatos újabb tervekről.* (Október 11 és 12.)

Az előadó ismertette a matematikai formulanyelven közvetlenül programozható elektronikus számológép terveit abban a formában, amely már figyelembe veszi a lengyel szakemberekkel való varsói tárgyalásai során felvetődött újabb szempontokat is.

**11. OLEJNYIK-OVOD, J.<sup>8</sup>** *Közgazdasági problémák megoldása a Szovjet Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központjában.* (Október 12.)

A SzTA Számítástechnikai Központja az ún. szállítási probléma különböző változatai és több rokon feladat konkrét eseteinek megoldásával jelentékenyen segíti elő a népgazdaságot. Az előadó matematikailag megfogalmazta a legegyszerűbb ilyen problémákat, amelyek a gazdasági tervezés munkájában felmerülnek, és vázolt egy tipikus megoldási programot.

**12. KALMÁR LÁSZLÓ:** *A matematikai logika fejlődésének újabb irányairól.* (December 2.)

Az előadó ismertette azokat az irányokat, amelyekben a legtöbb külföldi elméleti kutatás folyik a matematikai logika terén, összehasonlította az így kapott képet a magyar matematikai logikai kutatásokkal és feltárta a legfontosabb teendőket a külföldi matematikai logikai kutatással való megismerkedés és azokba való bekapcsolódás tekintetében.

**13. DÖMÖLKI BÁLINT:<sup>9</sup>** *Az algoritmusok elmélete terén folyó kutatások ismertetése* (December 30.).

#### A biometriai osztály szemináriuma

**1—16. CSÁKI PÉTER:** *Referáló előadássorozat.* (Január 10. és 31., Február 7, 14., 21., és 28. Március 7., 14., 21. és 28., Április 11., 18. és 25., Május 2., 16. és 23.)

Az előadó folytatta KULLBACK, S.: „Information theory and statistics” (John Wiley and Sons, New York, 1959) című könyvének ismertetését.

**17—18. FISCHER JÁNOS:** *Statistikai módszerek rádióaktív izotópokkal végzett biológiai kísérletek értékelésében.* (Január 23., Február 6.)

Lásd ZOLTÁN, T.—FISCHER, J.—JUVANCZ, I.—FÖLDI, M.: Studies on the absorption of  $^{131}\text{I}$ -albumin and  $\text{K}^{131}\text{I}$  from the subcutaneous tissues of the dog.” című dolgozatát (Acta Physiologica Acad. Sci. Hung. 20 (1961) 361—372.).

**19. FISCHER JÁNOS és CSÁKI PÉTER:** *Biológiai kísérletek analízise szélsőértékek segítségével.* (Január 30.)

Lásd FISCHER, J.—CSÁKI, P.: „Analysis of reaction curves by extreme values” című dolgozatát (Acta Medica Acad. Sci. Hung., sajtó alatt).

**20—22. Az „Examination in statistics” (University of Aberdeen, 3. Oct., Session 1960—61) vizsgakérdések megbeszélése.** (Február 13., 20. és 27.)

<sup>8</sup> A Szovjet Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja.

<sup>9</sup> MTA Számítástechnikai Központja.



**23. CSISZÁR IMRE:** *Markov-láncok ergodicitásának bizonyítása információelméleti úton.* (Május 9.)

Előadó általánosította RÉNYI A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Leipzig, Verlag der Wissenschaften, 1962, sajtó alatt), Anhang, §. 9. 2. tételét (482–487) arra az esetre, amikor  $p_{ik}$  csak egy alkalmas  $k$  indexre pozitív.

**24–32. CSISZÁR IMRE:** *Referáló előadássorozat.* (Szeptember 12. és 22., Október 6., 13., 20. és 30., November 4., December 4. és 11.)

Az előadó ismertette FEINSTEIN, A.: „Foundations of information theory” (McGraw-Hill, New York, 1958) című könyvét.

### A közgazdasági alkalmazások csoport szemináriuma

**1. BOD PÉTER:** *Szegmentált programozás.* (Február 3.)

**2–4. PRÉKOPA ANDRÁS:** *A magyar módszer alkalmazása a kijelölési és a szállítási problémára.* (Február 10., 17. és 24.)

Lásd: A. PRÉKOPA, On the Hungarian Method for the Transportation Problem and a Method for Solving Programming Problems (2 lectures, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Denmark)

**5–6. PRÉKOPA ANDRÁS:** *A folyam-probléma.* (Március 3. és 10.)

Lásd: G. B. DANTZIG and D. R. FULKERSON, On the Max-Flow Min-Cut Theorem of Networks (Linear Inequalities and Related Systems, Ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, 1956, 215–221).

**7–8. FERENCZY EÖRS:**<sup>10</sup> *Lineáris termelési modellek.* (Március 17., 24. és 31.)

Lásd: D. GALE: The Closed Linear Model of Production (Linear Inequalities and Related Systems, Ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, 1956, 285–303.)

**10. PRÉKOPA ANDRÁS:** *A Kuhn-Tucker tétel.* (Április 7.)

Lásd: KUHN, H. W. and TUCKER, A. W.: Non-linear programming (Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., ed. J. Neyman, 1951, pp. 481–492.)

**11–12. FRIVALDSZKY SÁNDOR:**<sup>10</sup> *Kvadratikus programozás.* (Április 14. és 21.)

Lásd: Ph. WOLFE: A szimplex módszer kvadratikus programozás eseteére (fordítása), MTA III. Oszt. Közl. **10** 1960 (373–391).

**13–15. KOVÁCS LÁSZLÓ:**<sup>10</sup> *Dinamikus programozás.* (Április 28., május 5. és 12.)

**16–9. BOD PÉTER:** *Gráfelmélet és alkalmazásai.* (Október 13., 20., 27. és november 3.)

Lásd: Cl. BERGE, Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1958. pp. 274 + VIII.

**20–22. FERENCZY EÖRS:** *Gráfelmélet és alkalmazásai.* (November 10., 17. és 24.)

Folytatása a fenti könyvismertetésnek.

**23–24. KOVÁCS LÁSZLÓ:** *Gráfelmélet és alkalmazásai.* (December 1. és 8.)

Folytatása fenti könyvismertetésnek.

**25. STÁHL JÁNOS:**<sup>10</sup> *Gráfelmélet és alkalmazásai.* (December 15.)

Folytatása fenti könyvismertetésnek.

<sup>10</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, alk. mat. szakos hallgató.



### A differenciálgeometriai csoport szemináriuma

1. VARGA OTTÓ: *Differenciálható sokaságok és a konnexió fogalma a Riemann-geometriában.* (Referáló előadás.) (Október 16.)
2. VARGA OTTÓ: *A Finsler-féle geometria értelmezése és metrikus alapfogalmainak bevezetése.* (Referáló előadás.) (Október 30.)
3. WRONA, W.: *A skalárgörbület általánosítása a Riemann geometriában.* (November 27.) Az előadónak az 1941., 1947. és 1948-ban közölt publikációi alapján.
4. VARGA OTTÓ: *A Finsler-féle terek konnexiója a Cartan-féle elmélet szerint.* (Referáló előadás) (November 27.)
5. SOÓS GYULA: *A Finsler-féle terek konnexiójának bevezetése globális fogalmak alapján.* (December 4.) Részlet az előadó doktori disszertációjából.
6. VARGA OTTÓ: *A Finsler-féle terek konnexiójának megalapozása a Minkowski-féle konnexió bevezetése segítségével.* (December 18.)

### Az algebrai osztály szemináriuma

1. FRIED ERVIN,<sup>11</sup> LÁNCZI IVÁNNÉ,<sup>11</sup> SCHMIDT E. TAMÁS: *Élménybeszámoló a Deutsche Mathematiker-Vereinigung Halle-i tudományos ülészakáról.* (Szeptember 29.)
2. BÓDI BÉLA:<sup>12</sup> *A félcsoportnak gyűrűvel vett általánosított keresztszorzatáról.* (Október 6.)  
Lásd: Доклады Акад. Наук, СССР. **137** (1961) 6, 1267—1269.
- 3—4. FRIED ERVIN: *Az általános izomorfia-tételekről, I—II.* (Október 13., 20.)
5. LOTHAR MICHLER:<sup>13</sup> *Die Einbettbarkeit der Kategorien in Brandtsches Gruppoid.* (Október 27.)  
Lásd: Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Schwermaschinenbau, Magdeburg **5** : 1 (1961) 21—28.
6. FRIED ERVIN: *Az általános izomorfia-tételekről, III.* (November 3.)
7. GRÄTZER GYÖRGY: *Matematikai beszámoló a Kanadában tett tanulmányútról.* (November 10.)
- 8—10. GRÄTZER GYÖRGY, SCHMIDT E. TAMÁS: *Az algebrai struktúrák beágyazási tételei, I., II., III.* (November 17., 24., december 1.)
11. DÉNES JÓZSEF, PÁSZTOR ENDRÉNÉ: *Vermes egy problémájának megoldása végtelen permutációkra vonatkozólag.* (December 8.)

### Geometriai szeminárium

- 1—3. BOGNÁR MÁTYÁS<sup>11</sup>: *Új bizonyítás a Jordan-tételre.* (febr. 22., márc. 1., 8.)
- 4—7. ANDRÁSFAI BÉLA: *Gráfok útjairól, köreiről és hurkairól.* (Mat. Lapok 1962) (márc. 22., máj. 3., 10., 14.)
- 8—10. BALÁZS JÁNOS, 12—13. HAJÓS GYÖRGY, 14. HEPPES ALADÁR:

<sup>11</sup> ELTE Matematikai Intézete.

<sup>12</sup> Moszkvai Állami (Lomonoszov-) Egyetem Matematikai Intézete, Algebrai Tanszék.

<sup>13</sup> Nehézipari Technikai Főiskola Matematikai Intézete.



*Bizonyítások egy rácsszerű körrendszerekre vonatkozó tételre.* (szept. 17., okt. 11., okt. 25., nov. 15., nov. 22.)

9. BÖHM J.:<sup>14</sup> *Inhaltsmessung in Räumen konstanter Krümmung* (okt. 4.)

11. POLÁK, V.:<sup>15</sup> *On polygonal lines in the plane and in the space.* (okt. 18.)

15–17. ANDRÁSFAL BÉLA: *Adott csúcsszámú, adott maximális független pontszámú, háromszögmentes gráfok közül a maximális élszámúak meghatározása.* (Über ein Extremalprobleme der Graphentheorie, Acta Math. Acad. Sci. Hung.) (nov. 29., dec. 6., 13.)

---

<sup>14</sup> Jena.

<sup>15</sup> Brno.

**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEK-  
BEN MÉG FEL NEM TÜNTETETT, MÁSUTT MEGJELENT VAGY SAJTÓ  
ALATT LEVŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE<sup>1</sup>**

- [1] ALPÁR L.: „Edwin F. Beckenbach: Modern matematika mérnököknek c. könyv ismertetése”. *Magyar Tudomány* 5 (1961) 320—322.
- [2] BALÁZS J.: „Súlyozott (0,2) interpoláció ultraszférikus polinomok gyökei”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 11 (1961) 305—338.
- [3] BALÁZS J.: „Megjegyzések a stabil interpolációról”. *Matematikai Lapok* 11 (1960) 280—293.
- [4] BALÁZS J.: „Hermite-féle polinomokra vonatkozó egyenlőtlenség”. *Matematikai Lapok* 12 (1961) 72—74.
- [5] BÁNKÖVI Gy.—DOBÓ A.: „Egydimenziós véletlen térkitöltés változó hosszúságú szakaszokkal”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 11 (1961) 399—415.
- [6] BOD P.: „Néhány gyakorlati megjegyzés az ágazati kapcsolatok formális elemzéséhez”. *Statistikai Tudományos Konferencia, Budapest, 1961 júniusi anyagai, német, angol, orosz és magyar nyelven. Az orosz és angol nyelvű kötet sajtó alatt.\**
- [7] CSÁSZÁR Á.: „A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközei”. *Matematikai Lapok.\**
- [8] CSISZÁR I.: „Megjegyzések a csonkagúla és a gömb térfogatáról”. *A Matematika Tanítása*, 1961.
- [9] CSUKÁS A.-né—CZAKÓ J.: „Adatok a laktációra jellemző tejfehérje százalék megállapítására szükséges vizsgálatok számához”. *Állattenyésztés* 10 (1961) 289—297.
- [10] CSUKÁS A.-né—GUBA S.—KECSKÉS S.: „Szarvasmarha utódellenőrzés leányok és kortársak termelésének összehasonlítása útján”. *Állattenyésztés* 9 (1960) 287—294.
- [12] FENYŐ I.—LEVENDEL L.: „Elektroklaszifikátor: egy orvosi diagnosztikai segéd-eszköz”. *Orvosi Hetilap*, 1961.
- [13] FISCHER J.—SZIGETI J.: „Nemek szerinti különbségek hízekonyságra vizsgált sertéseken”. *Állattenyésztés.\**
- [14] HAJTMAN B.: „Egy üzemenyagtakarékossági probléma”. *Matematikai Lapok.\**
- [15] MEDGYESSY P.: „Két elv fotografikus regisztrált változó mennyiség függvényének közvetlen regisztrálására”. *Magyar Fizikai Folyóirat.\**
- [16] MEDGYESSY P.: „Külföldi szakfolyóiratok az Akadémiai Kiadónál megjelent önálló matematikai munkákról”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei.\**
- [17] MUSZKA D.: „A gépjárműközlekedés biztonsága és az automatika”. *Magyar Tudomány* 6 (1961) 669—673.
- [18] MUSZKA D.—KOVÁCS K.: „Mérőhídszerkesztés talajminták szöszótartalmának meghatározására”. *Mérés és Automatika.\**
- [19] PALÁSTI I.: „Érdekes matematikai eljárás, a Monte-Carlo módszer”. *Természet-tudományi Közöny* 5 (92) (1961) 8. sz.
- [20] PRÉKOPA A.: *Valószínűségszámítás*. Műszaki Kiadó\*

<sup>1</sup> A csillaggal jelölt dolgozatok sajtó alatt vannak.



- [21] RÉNYI A.: „A II. Magyar Matematikai Kongresszusról”. *Magyar Tudomány* **10** (1961) 13—24.
- [22] RÉNYI A.: „Gondolatok a matematikusképzés továbbfejlesztéséről” *Magyar Tudomány* **10** (1961) 593—600.
- [23] RÉNYI A.: „Turán Pál matematikai munkásságáról”. *Matematikai Lapok* **11** (1960) 229—263.
- [24] RÉNYI A.: „Az információ-akkumuláció statisztikus törvényszerűségeiről.” *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 15—33.
- [25] SURÁNYI J.: „Polinomok azonossága”. *Középiskolai Matematikai Lapok* **23** (1961) 103—105.
- [26] SZABÓ Á.: „A matematika alapjainak euklideszi terminusai II.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 1—46.
- [27] SZÁSZ F.: „A teljesen reducibilis operátormodulusokról.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*\*
- [28] TAMÁSSY J.-né—SEBESTYÉN G.: „Örökölhetőség megállapítása az édestestvérek módszere alapján”. *Állattenyésztés* **10** (1961) 367—372.
- [29] VINCZE I.: „A valószínűség-számítási információfogalom néhány kérdéséről. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 7—14.
- [30] VINCZE I.: „Egy Gauss-féle sztochasztikus folyamatról”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **12** (1962) 35—46.
- [31] VINCZE I.: „A MTA Matematikai Kutató Intézetének munkájáról”. *Természettudományi Közöny* 1961, 6. sz.
- [32] VINCZE I.: „Matematikai statisztika az ipar szolgálatában”. *Műszaki Élet*, 1961. február.
- [33] VINCZE I.: „Rédei Jenő: A születések és halálozások a XIX. és XX. században Európában és Magyarországon. Könyvismertetés”. *Magyar Tudomány*\*
- [34] VINCZE I.: „Hozzászólás Éltető Ödön „A jövedelemeloszlás vizsgálata” c. előadásához”. *Statisztikai Tudományos Konferencia, 1961. június —1—15. kiadványában*\*

## A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI ADATOKKAL SZEREPLŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATOK PONTOS ADATAI<sup>2</sup>

- V.: [1] ALPÁR L.: „Egyes hatványsorok abszolút konvergenciája a konvergenciakör kerületén”. *Matematikai Lapok* **11** (1960) 312—322.
- V.: [5] BÁRTFAI P.—DOBÓ A.: „Egy közlekedési problémáról”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 263—291.
- V.: [16] FÉNYES T.: Mikusinski „Operátorszámítás” c. könyve magyar fordításához „A modern operátorszámítás néhány elektrotechnikai alkalmazása” c. fejezet írása. *Műszaki Kiadó*, 1961, 407—439.
- V.: [27] RÉNYI A.: „Egy általános módszer valószínűség-számítási tételek bizonyítására és annak néhány alkalmazása.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 79—105.
- V.: [35] SERES I.: „Egy polinom irreducibilitása”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 131—134.
- V.: [39] SZÁSZ F.: „A főbbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **11** (1961) 135—177.
- V.: [44] ZIERMANN M.—ÉLTETŐ Ö.: *Matematikai Statisztika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1961. 162 oldal.

<sup>2</sup> A sorszám előtt a megfelelő dolgozatjegyzéket tartalmazó évfolyamra utalunk.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Vidosa László

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. III. 8. — Példányszám: 900 — Terjedelem: 10,5 (A/5) ív

---

1962/54992 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György



## СОДЕРЖАНИЕ

Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ 60 (Перевод от Révész Gy.) .....	425
JÁNOSY, L. — LEE, A. — RÓZSA, P.: Оценка параметра рассеивания Кулона, на основании измерений, выполненных в фотосимуляции .....	467
Вод, Р.; О связи инпут-аутпут балансов отраслевого и административного построения .....	499
RÉNYI, A.; Об одной проблеме теории информации .....	505
Доклады, произнесенных в семинарах отделений Института .....	517
Список работ сотрудников Института на венгерском языке, опубликованных в других изданиях или находящихся в печати и еще не отмеченных в предыдущих списках литературы .....	541

## INDEX

Report on the Algorithmic Language ALGOL 60. (Translated by Révész Gy.) ..	425
JÁNOSSY, L.—LEE, A.—RÓZSA, P.: On the estimation of the scattering constant of an emulsion track in the presence of noise .....	467
BOD, P.: Über die Zusammenhänge der noch Produktionszweigen bzw. Verwaltungs zweigen zusammengestellten Verflechtungsbilanzen .....	499
RÉNYI, A.: On a problem of information theory .....	505
Lectures delivered in the seminars of the Institute .....	517
List of papers in Hungarian of the members of the Institute published or in print in another periodical and not yet marked in the previous list of papers .....	541